SPC (Special Problems for Champions)

문과 공개 문항 For 2017 (1st)

정답 및 해설

문과정답

1	53	**2**	80	**3**	④	**4**	17	**5**	720
6	17								

문제에 대한 문의사항은

초성민

퓨에르

미천한수학자에게 쪽지나

댓글로 남겨주시기 바랍니다.

감사합니다.

문과 1번 (수학 Ⅱ)

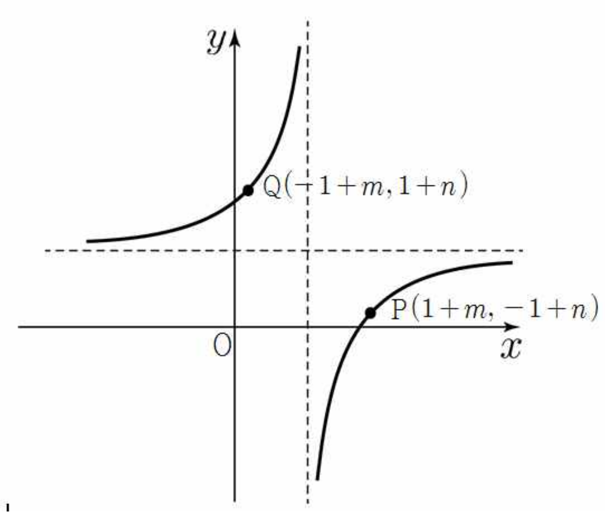
유리함수 $y=-\dfrac{1}{x-m}+n$ 는 $y=-\dfrac{1}{x}$을

x축으로 m칸 y축으로 n칸 평행 이동한 함수이다.

그리고 두 점 P와 Q는 유리함수 위의 점인데

x좌표와 y좌표가 정수인 점은 오직 두 개다. $y=-\dfrac{1}{x}$이 항상 $(1,-1)$과 을$(-1,1)$ 지나므로

점 P와 Q는
$\mathrm{P}(1+m,-1+n)$, $\mathrm{Q}(-1+m,1+n)$ 가 된다.



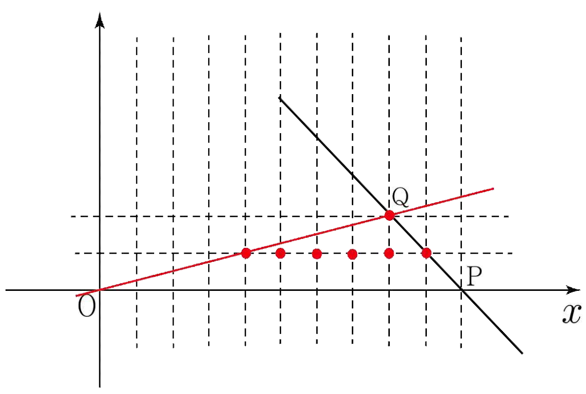
그림과 같이 $y=-\dfrac{1}{x}$을 (m,n)만큼 평행이동한 그래프가 되는데, $m+n=10$이므로,

유리함수의 중심은 $x+y=10$위의 점들이다.

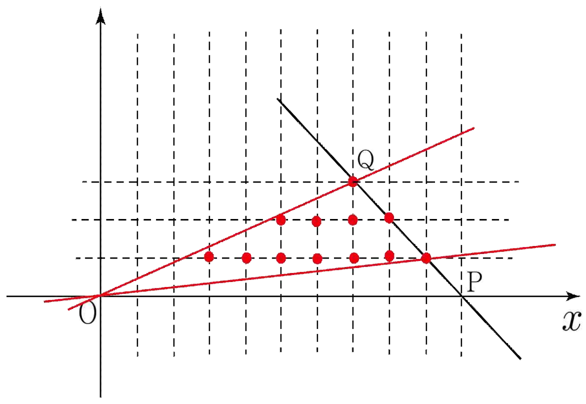
그리고 예를 들어 $f(1)=7$이므로 ,

확인해보자.

1) $n=1$일 때,

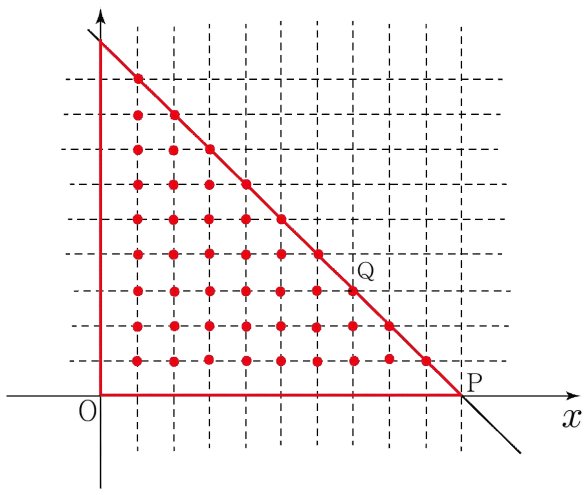


2) $n=2$일 때,



이런 식으로 찾아 올라갈 수 있는데,
사실 구하는 값을 보면
$f(1)+f(3)+f(5)+f(7)+f(9)$이다

즉,

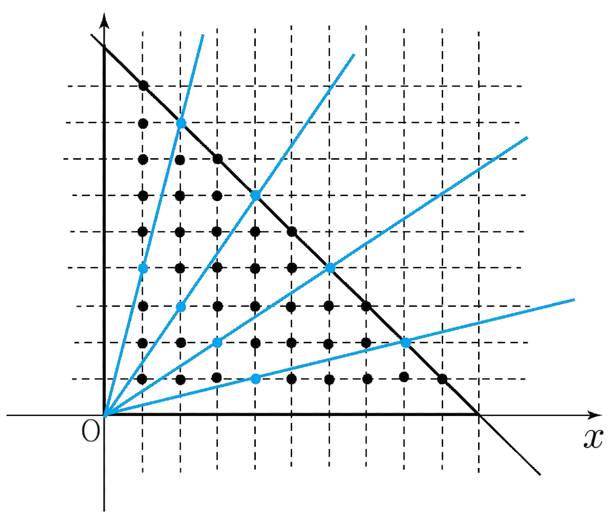


그림과 같이 삼각형 내부의 점들이다.
단,

$f(1)+f(3)$에서 나오는 두 삼각형은

모두 $y=\frac{1}{4}x$ 라는 직선을 공유하고 있다.

따라서 삼각형의 각 변들의 점들은 한번 씩 더 세주어야 한다.



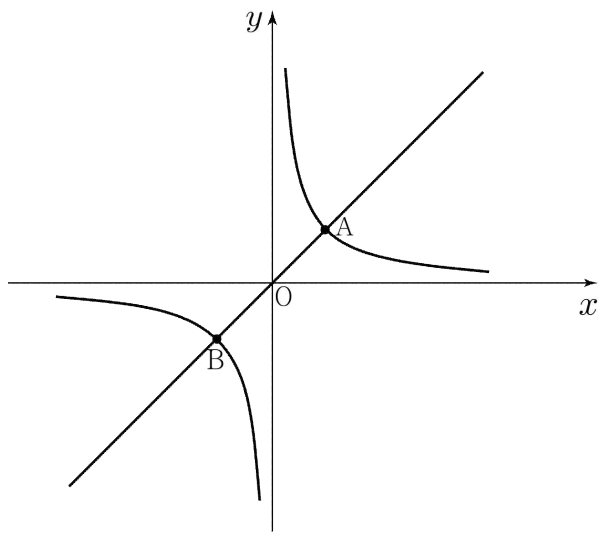
아래와 같이
8개의 점들이 한번 더 추가되어서 최종적으로
$1+2+3+\cdots+9=45$
그리고 8개 추가되어서, 53개가 된다.

문과 2번 (수학 Ⅱ)

삼각형의 개수이며, n의 값에 따른 유리함수와 직선의 점들을 찍어가면서 ABC를 찾아가며 확인해 준다.

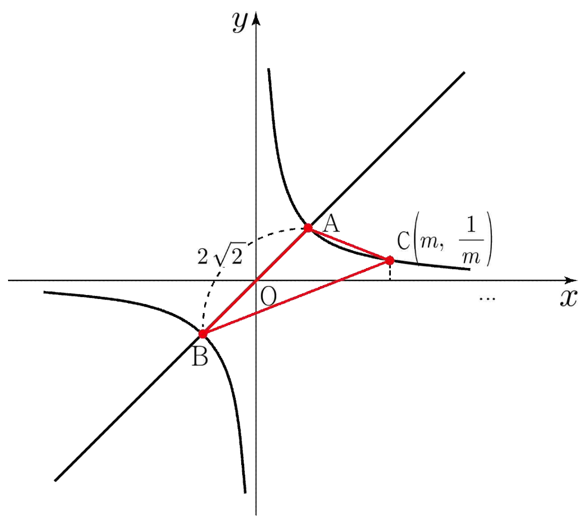
1) $n=0$일 경우,

$y=\frac{1}{x}$와 $y=x$의 그래프의 교점은
$\mathrm{A}(1,1)$, $\mathrm{B}(-1,\ -1)$가 된다.



선분 $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$이고 $x=m$ 과 $y=\frac{1}{x}$의 교점은

$\mathrm{C}\left(m,\ \frac{1}{m}\right)$이 된다. (C라 하자)



삼각형 ABC에서 밑변 AB는 고정된 길이이므로,
점 C에서 $y=x$ 까지의 거리가 높이가 된다.

따라서, $y-x=0$ 에 대해서,

높이가 $\dfrac{\left|m-\frac{1}{m}\right|}{\sqrt{2}}$ 가 되고,

$\frac{1}{2}\cdot\dfrac{\left|m-\frac{1}{m}\right|}{\sqrt{2}}\cdot 2\sqrt{2}=\left|m-\frac{1}{m}\right|$가 20 이하가 되는 m을 찾으면 된다.

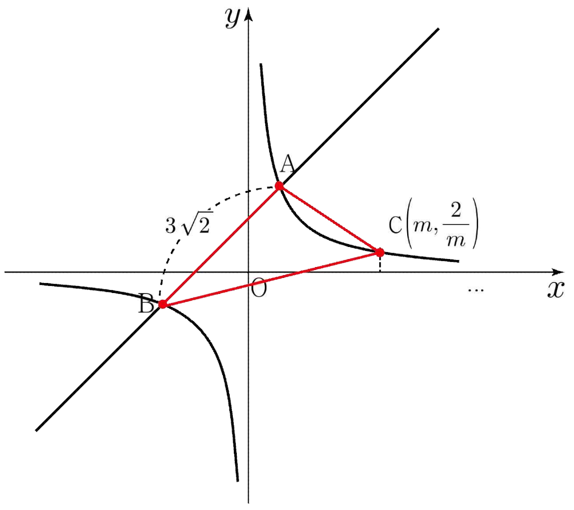
그냥 일일이 찾되,
m이 음수가 되는 값들 역시 놓치지 말고 찾자.

그리고 $m=1,\ -1$이 되는 점은 되지 않는 것
역시 확인해야 한다.

따라서,
m은 $2, 3, 4, 5, \cdots 20,$
그리고 $-2, -3, -4, \cdots, -19$
총 38개가 된다.

2) $n=1$일 경우,

$y=\dfrac{2}{x}$와 $y=x+1$의 형태로 살펴보자.



$\mathrm{A}(1, 2)$, $\mathrm{B}(-2, -1)$가 되고,
마찬가지로 밑변 $\overline{\mathrm{AB}}=3\sqrt{2}$

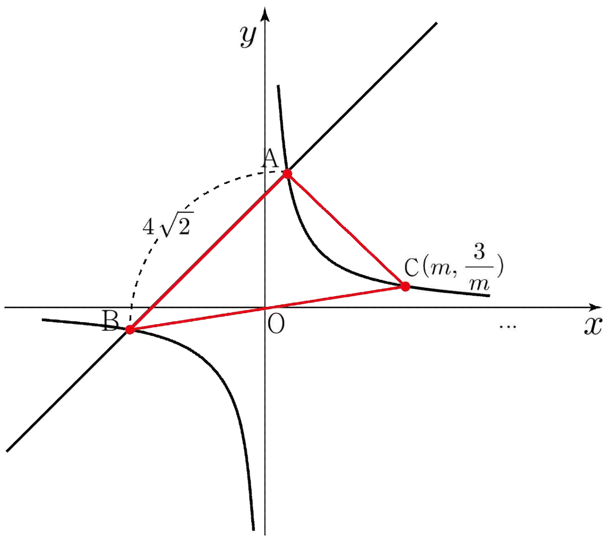
점 C에서 $y=x+1$에 내린 수선이 높이가 되므로 $d=\dfrac{\left|\dfrac{2}{m}-m-1\right|}{\sqrt{2}}$
가 되고 삼각형 넓이는
$\dfrac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot\dfrac{\left|\dfrac{2}{m}-m-1\right|}{\sqrt{2}}$가 되며 이 역시 20보다 작아지는 m값을 찾는다.

역시 음수일 때를 놓치지 말아야 하고,
점 A, B가 되는 값은 제외해주면

$m=2, 3, 4, \cdots 12$
$m=-1, -3, -4, \cdots, -14$
따라서 $f(1)=24$

3) $n=2$일 경우,

$y=\dfrac{3}{x}$와 $y=x+2$의 형태로 살펴보자.



$\mathrm{A}(1, 3)$, $\mathrm{B}(-3, -1)$가 되고,

점 C에서 $y=x+2$에 내린 수선이 높이가 되므로 $d=\dfrac{\left|\dfrac{3}{m}-m-2\right|}{\sqrt{2}}$
가 되고 삼각형 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot\dfrac{\left|\dfrac{3}{m}-m-2\right|}{\sqrt{2}}$가 되며
넓이가 20보다 작아지는 m값을 찾는다.

역시 음수일 때를 놓치지 말아야 하고,
점 A, B가 되는 값은 제외해주면

$m=2, 3, 4, \cdots 8$
$m=-1, -2, -4, \cdots, -12$
따라서 $f(2)=18$
모두 더하면, 80개가 된다.

문과 3번 (미적분Ⅰ)

우선 함수 $g(x)$는 (일차함수)×(이차함수) 이므로
삼차함수이다.

(가) 조건을 살펴보면 $g(x)$가 역함수를 갖는다.
$f_1(x), f_2(x)$가 최고차항의 계수가 1이기 때문에 $g(x)$는 단조증가함수이다.
그런데, $f_1(x)$는 반드시 하나의 근 $x=\alpha$를 갖는다.
$f_2(x)$는 이차함수이므로 근을 2개 이하를 가질 수 있다. 그런데 $f_2(x)$가 근을 2개 $x=a, b$ 를 가지면 $g(x)=(x-\alpha)(x-a)(x-b)$ 이므로, 증가함수가 될 수 없다.
즉, $f_2(x)$는 중근을 갖거나 허근을 가져야한다.

(나) 조건을 보자.
$h(a)=\lim_{x \to a}\frac{f_2(x)}{(x-\alpha)}$ 이다. ($\because f_1(x)=x-\alpha$)

이제 $f_2(x)$의 케이스를 분류해보자.

① $f_2(x)=(x-\beta)^2$
$h(a)=\lim_{x \to a}\frac{(x-\beta)^2}{(x-\alpha)}$인데, $a \neq \alpha \text{ or } \beta$ 일 때는
분수함수 꼴이기 때문에 연속하다. 그런데 $a=\alpha$에서 연속하려면 $\beta=\alpha$ 여야만 한다.

② $f_2(x)=x^2+px+q$ (단, $D<0$)
$h(a)=\lim_{x \to a}\frac{x^2+px+q}{x-\alpha}$ 이면, $a=\alpha$일 때 연속하지 않는다.

그러므로 $f_2(x)=(x-\alpha)^2$ 이고,
$f_2(2)=1=(2-\alpha)^2$ 이므로 $\alpha=1 \text{ or } 3$
$\therefore g(x)=(x-1)^3 \text{ or } (x-3)^3$
$g(5)$의 최솟값은 $g(x)=(x-3)^3$일 때, $g(5)=8$

문과 4번 (미적분Ⅰ)

원점을 지나는 두 함수이므로
우선 $f(x)$와 $g(x)$는 $(0, 0)$을 공유한다.

그리고 $h(x)$를 살펴보면 $f(x)$와 $g(x)$ 중 더 큰 값으로 정의가 되고 있는데

$h(x)$는 $x=-4$에서만 미분이 불가능하므로
$f(x)$와 $g(x)$중 더 큰 값으로 가지고 있을 때는

다항함수이기에 항상 미분이 가능하고
미분이 불가능할 수 있는 곳은
대소가 변하는 점이다.

즉 $h(x)$를 수식적으로 다시 해석하였을때

$p(x)=f(x)-g(x)$라 두었을 때 $h(x)$는

$p(x)>0$ 일 경우 $f(x)$
$p(x)<0$ 일 경우 $g(x)$

가 되므로, 즉 $p(x)=0$가 되는 곳에서 미분 불가능의 가능성이 존재한다는 것이다.
(함수자체가 바뀌므로)

두 함수 모두 $(0,0)$을 지나므로
$p(0)=0$, 그리고 $x=-4$에서 미분이 불가능하므로 $x=-4$에서 $f(x)$와 $g(x)$가 교점을 가지면서
$f \to g$ or $g \to f$로 변하는 곳이라 생각할 수 있다.
(단 접하지는 않아야 한다.) $p(-4)=0$ 이 된다.

$p(x)=f(x)-g(x)=mx(x+4)Q(x)$ (단, $Q(x)$는 이차함수)

하지만, 여기서 $h(x)$는 $x=0$에서는 미분가능하고
$x=-4$에서 미분 불가능해야 하므로,

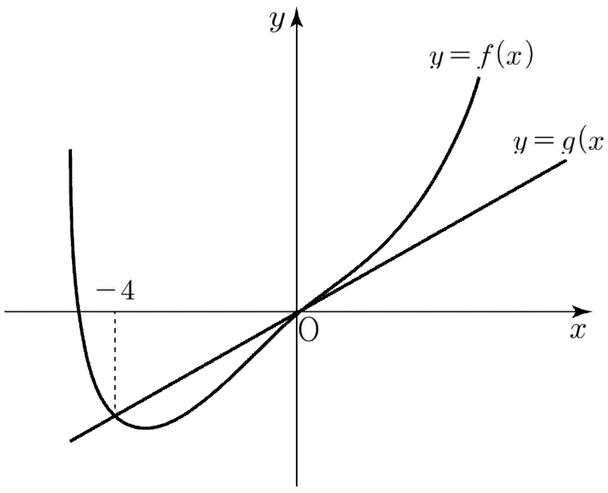
$Q(x)$는 x와 $(x+4)$이외의 인수를 가지게 되면
$h(x)$는 또 다른 곳에서 미분 불가능해질 수 있으므로 안된다. 물론, $(x-a)^2$의 형태로 나오면 $x=a$에서 미분이 가능하므로 문제가 없지만 이렇게 될 경우 $x=0$ 에서도 미분이 불가능해진다.
(인수가 하나이므로)

따라서
$p(x)=mx(x+4)\cdot x^2$
$p(x)=mx(x+4)\cdot x(x+4)$
$p(x)=mx(x+4)\cdot (x+4)^2$
이 되는데, 이 중 $x=0$ 에서 미분이 가능하고
$x=-4$에서 미분이 불가능하므로,
$p(x)=f(x)-g(x)=mx^3(x+4)$ 가 된다.

★ $p(x)$는 $x=0$에서 부호가 변하지만,

미분계수가 0이므로, $f(x)$와 $g(x)$가 번갈아 나타나면서, 미분계수는 같다는 것이고, $x=-4$에서 양수에서 음수로 가므로 $h(x)$는 $x<-4$에서 $f(x)$ $x>-4$에서는 $g(x)$가 나타나는데, $p'(-4)\neq 0$이므로 $f'(-4)\neq g'(-4)$라고 결론이 이루어진다. 아래 그림으로 바로 이해하도록 하자. ★★

(사실 바로 그림으로 설명하려 하였으나, 엄밀한 미적분의 실력을 위해서는 수식적 이해가 반드시 필요하다.)



위의 그림처럼
$x=0$에서는 삼중근을 갖고 $x=-4$에서 교점이 생기는 그래프를 그려 바로 추론도 가능하다
식들과 그래프 개형 추론을 종합하여

$f(x)=mx^3(x+4)+nx$
$g(x)=nx$
가 된다.

다음으로 (나) 조건을 해석해야하는데,
$\int_{-4}^{1} h(x)dx$는 x의 범위에 따라 $h(x)$가 위그림과 같으므로
$\int_{-4}^{0} g(x)dx+\int_{0}^{1} f(x)dx=3$이므로
$\int_{-4}^{0} g(x)dx=-8n$
$\int_{0}^{1} f(x)dx=\frac{6}{5}m+\frac{1}{2}n$
이 되므로, $\frac{6}{5}m-\frac{15}{2}n=3$이 된다.
이에 만족하는 m과 n을 구하면
$m=15,\ n=2$ 된다. $(4m-25n=10)$

문과 5번 (확률과 통계)

가방끼리 겹치는 경우 (여섯자리) 와
겹치지 않는 경우 (다섯자리) 로 나눈다.

㉠ 가방끼리 겹치지 않을 때

가방과 사람을 묶은 후 배열한다.

v (A+가방) v (B+가방) v (C+가방) v

- A.B.C 배열 3!
- 가방과 사람이 앉는 경우 2가지. 총 3명 2^3
- v 로 표시된 곳에 의자 두기. ${}_4H_2$ (중복허락 2자리 고르기)

$$3!\cdot 2\cdot 2\cdot {}_4H_2=480$$

㉡ 가방끼리 겹칠 때.

1) v [사람+(가방2)+사람] v [사람+가방] v
2) v [사람+가방] v [사람+(가방2)+사람] v

- 사람 3명의 배치 x3!
- 단독으로 앉은사람 가방과 자리바꾸기 2가지
- 그리고 위 2가지의 형태가 경우의 수가 같으므로 역시 x2 (앞에 두명이 겹칠 때 or 뒤에 두명이 겹칠 때)
- v 표시된 곳에 가방 둔 곳 ${}_3H_3$

$$2\cdot 3!\cdot 2\cdot {}_3H_3=240$$

정답 720가지

문과 6번 (확률과 통계)

A주머니에 공 한개를 먼저 넣어두고 시작하자

그리고 흰공이 총 2개이므로
흰공을 기준으로 공을 어떻게 분배할지 생각하는
것이다.

1) A주머니 흰공 두 개

자연스럽게 B, C 주머니에는 검은 공이 2개씩은 들어가데 된다.
그리고 그 이후가 문제인데, 여기서 분배하는 아이디어는 자연수 분할이다.

어느곳이든 갈수는 있지만, 크기가 정해져있기에
남은 공들에 있어서 숫자적으로 어떻게 배분할것인지만 정해주면 크기 순서대로 공들이 가게 된다.

현재 검은공 3개가 남아있으므로
$\mathrm{P}(3,1)+\mathrm{P}(3,2)+\mathrm{P}(3,3)=3$ 이된다.

(예를 들어, $P(3,2)=1$, $(1+2=3)$가지 인데,
이는 남은 검은공 3개를 1개와 2개로 나누어서 A, B, C에 분배하는데,
문게가 정해져있으므로
자연스럽게 2개는 C 1개는 B에 들어갈 수 밖에 없는 구조이다.)

2) A에 흰고 한 개, B나 C에 흰공 한 개 (2가지)

A에 흰공 하나를 넣고 B에 흰공 하나를 넣자.
그러면 역시 C에는 검은공 하나가 들어가고

남은 검은공 6개를 A, B, C에 분배하는 구조이므로
$\mathrm{P}(6,1)+\mathrm{P}(6,2)+\mathrm{P}(6,3)$이 된다.
(위와 같은 원리이다.)

$\mathrm{P}(6,1)=1$, $\mathrm{P}(6,2)=3$, $\mathrm{P}(6,3)=3$
즉 총 7가지인데, B에 흰공이 아닌 C에 흰공을 넣는 경우도 같아 14가지가 된다

따라서 $14+3=17$