02 명제

수학Ⅱ 교과서 Review

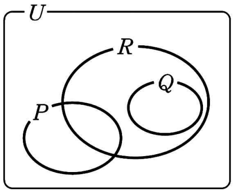
문제 1

실수 x에 대하여 집합 A, B, C, D가 각각 다음과 같을 때, 조건 $g(x) < 0 \le f(x)$의 진리집합을 A, B, C, D로 나타내어라.

$A = \{x \mid f(x) = 0\}$, $B = \{x \mid f(x) > 0\}$
$C = \{x \mid g(x) = 0\}$, $D = \{x \mid g(x) > 0\}$

문제 2

전체집합 U에 대하여 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라고 할 때, 세 집합 P, Q, R 사이의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.
보기의 명제 중 참인 것을 모두 찾아라.



| 보 기 |

ㄱ. $p \to \sim q$　　ㄴ. $\sim p \to q$
ㄷ. $\sim r \to \sim q$　　ㄹ. $p \to \sim r$

문제 3

두 조건
p: $-1 < x \le a$, q: $b \le x < 2$에 대하여 명제 $p \to q$가 참일 때, 두 정수 a, b의 최댓값을 각각 구하여라.

문제 4

네 조건 p, q, r, s에 대하여 다음 네 명제가 모두 참이라고 한다.

| 조 건 |

- p이면 q이다.
- r가 아니면 q가 아니다.
- s가 아니면 r가 아니다.
- s이면 r이다.

이때 다음 중 항상 참인 것을 모두 골라라.

(1) p이면 r이다.

(2) q는 s이기 위한 필요충분조건이다.

(3) s는 p이기 위한 필요조건이다.

02 명제

수학II 교과서 Review

문제 5

다음 중 p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닌 것을 골라라. (단, x, y는 실수)

(1) p: $x+y>0$이고 $xy>0$
q: $x>0$이고 $y>0$

(2) p: $x+y>2$
q: $x>1$ 또는 $y>1$

(3) p: $xy \geq 0$
q: $|x+y|=|x|+|y|$

문제 6

세 집합 A, B, C에 대하여 다음 보기의 설명 중에서 옳은 것을 모두 골라라.

보 기
ㄱ. $A=B$는 $A\cap B=B\cap C$이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다. ㄴ. $A\subset(B\cap C)$는 $A\subset B$이고 $A\subset C$이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다. ㄷ. $A\subset(B\cup C)$는 $A\subset B$ 또는 $A\subset C$이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.

문제 7

두 조건 p: $x\neq 2$, q: $x^2+ax+8\neq 0$에 대하여 p가 q이기 위한 필요조건일 때, 실수 a의 값을 구하고 그 과정을 서술하여라.

문제 8

두 집합 A, B에 대하여 $A\triangle B=(A\cup B)-(A\cap B)$로 정의할 때, 다음 $\square$ 안에 알맞은 말을 써넣어라.

보 기
$A\triangle B=B$인 것은 $A-B=\varnothing$이기 위한 $\square$조건이고, $A=\varnothing$이기 위한 $\square$조건이다.

02 명제

수학 II 교과서 Review

문제 9

전체집합 U에서 세 조건 $p,\ q,\ r$의 진리집합을 각각 $P,\ Q,\ R$라고 하자. $(P-Q)\cup(Q-R^C)=\varnothing$ 일 때, 다음 중 옳은 것은? (단, $P,\ Q,\ R$는 공집합이 아니다.)

① p는 r이기 위한 충분조건이다.
② $\sim r$는 q이기 위한 충분조건이다.
③ p는 $\sim r$이기 위한 충분조건이다.
④ p는 q이기 위한 필요조건이다.
⑤ r는 q이기 위한 필요조건이다.

문제 10

두 조건 $p,\ q$가
$p: x<0$ 또는 $x \geq 6,\ q: a-7<x\leq 3a$
일 때, 명제 $\sim q \rightarrow p$가 참이 되도록 실수 a의 값의 범위를 정하여라.

문제 11

다음은 $a,\ b,\ c$가 자연수일 때,
'$a^2+b^2=c^2$이면 $a,\ b$ 중에서 적어도 하나는 3의 배수이다.'
를 증명하는 과정이다. (가) (나)에 알맞은 것을 써넣어라.

| 증 명 |

결론을 부정하여 $a,\ b$가 모두 3의 배수가 아니라고 하면 적당한 정수 $l,\ m$에 대하여

$$a=3l\pm1,\ b=3m\pm1$$

로 나타낼 수 있다.
이때 $a^2+b^2=\boxed{(가)}$ · · · · · · · · · · · · ①
따라서 a^2+b^2을 3으로 나눈 나머지는 $\boxed{(나)}$이다. 그런데 $c=3k$인 경우 $c^2=9k^2$이고 $c=3k\pm1$인 경우 $c^2=3(3k^2\pm2k)+1$이다. (k는 정수) · · · · · · · · · · · · ②
①, ②에서 $a^2+b^2\neq c^2$이고 이것은 $a^2+b^2=c^2$이라는 가정에 모순이므로 $a,\ b$ 중에서 적어도 하나는 3의 배수이어야 한다.

문제 12

a, b가 실수일 때, 다음 부등식을 증명하여라.
(1) $a^2+b^2 \geq 2a+2b-2$
(2) $|a|+|b| \geq |a-b|$

02 명제

문제 13

실수 a, b에 대하여 다음 부등식이 성립함을 증명하여라. 또, 등호가 성립하는 경우를 구하여라.
$(a^2+1)(b^2+1) \geq (ab+1)^2$

문제 14

$a>0$, $b>0$일 때, 다음 부등식이 성립함을 증명하여라. 또 등호가 언제 성립하는지 말하여라.

$$(2a+b)\left(\frac{8}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 25$$

문제 15

세 양수 a, b, c에 대하여 $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$의 최솟값을 구하여라.

문제 16

$x>5$일 때, $x+\frac{1}{x-5}$의 최솟값을 m, 그때의 x의 값을 n이라고 하자. 이때 $m+n$의 값을 구하여라.

02 명제

문제 17

a, b, x, y가 실수일 때, 다음 부등식이 성립함을 증명하여라.

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$$

문제 18

두 실수 x, y에 대하여 $x^2+y^2=1$일 때, $2x+y$의 최댓값을 구하여라.

02 명제

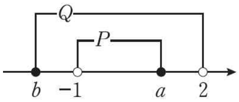
수학Ⅱ 교과서 Review

〈정답 및 해설〉 수학Ⅱ - 2단원. 명제

1) $(A\cup B)\cap(C\cup D)^c$

2) ㄱ, ㄷ

3) 두 조건 p, q의 진리집합을 P, Q라고 하면
$p \Rightarrow q$에서 $P \subset Q$이다.
그러므로 주어진 조건의 범위를 수직선 위에 나타내면 오른쪽의 그림과 같다.
따라서 $a<2$, $b\le -1$이므로 a의 최댓값은 1, b의 최댓값은 -1이다.



4) 주어진 네 명제가 참이므로
$p\Rightarrow q$, $\sim r\Rightarrow \sim q$, $\sim s\Rightarrow\sim r$, $s\Rightarrow r$
대우를 이용하면
$p\Rightarrow q\Rightarrow r$, $r\Leftrightarrow s$
(2) q는 s이기 위한 충분조건이다.
따라서 (1), (3)이다.

5) (1), (3) $p\Leftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
따라서 (2)이다.

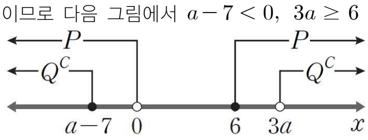
6) ㄴ. $A\subset(B\cap C)$는 $A\subset B$이고 $A\subset C$이기 위한 필요충분조건이다.
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

7) p가 q이기 위한 필요조건이므로 $q\to p$가 참이다.
또한 $q\to p$의 대우 $\sim p\to\ \sim q$도 참이다.
따라서 $\sim p: x=2$, $\sim q: x^2+ax+8=0$에 대하여
$\sim p\to\ \sim q$가 참이려면
$2^2+2a+8=0$에서 $a=-6$이다.

8) $A\triangle B=(A\cup B)-(A\cap B)=B$
$\Leftrightarrow A\cup B=B,\ A\cap B=\varnothing$
$A=\varnothing$
따라서 $A\triangle B=B$인 것은 $A-B=\varnothing$이기 위한 $\boxed{\text{충분}}$조건이고,
$A=\varnothing$이기 위한 $\boxed{\text{필요충분}}$조건이다.

9) ③

10) 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 할 때, 명제 $\sim q\to p$가 참이 되려면 $Q^c\subset P$이어야 한다.
$P=\{x\,|\,x<0$ 또는 $x\ge 6\}$,
$Q^c=\{x\,|\,x\le a-7$ 또는 $x>3a\}$
이므로 다음 그림에서 $a-7<0$, $3a\ge 6$



따라서 $2\le a<7$이다.

11) (가): $3(3l^2\pm 2l+3m^2\pm 2m)+2$ (나): 2

12) (1) $a^2+b^2-(2a++2b-2)=a^2-2a+1+b^2-2b+1$
$=(a-1)^2+(b-1)^2\ge 0$
따라서 $a^2+b^2\ge 2a+2b-2$ (등호는 $a=b=1$일 때 성립)

(2) $(|a|+|b|)^2-|a-b|^2$
$=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a-b)^2$
$=a^2+2|ab|+b^2-(a^2-2ab+b^2)$
$=2(|ab|+ab)$

그런데 $|ab| \geq -ab$ 에서 $2(|ab|+ab) \geq 0$이므로

$(|a|+|b|)^2 \geq |a-b|^2$

이때 $|a|+|b| \geq 0$, $|a-b| \geq 0$ 이므로

$|a|+|b| \geq |a-b|$ (등호는 $ab \leq 0$일 때 성립)

13) $(a^2+1)(b^2+1)-(ab+1)^2$

$=a^2-2ab+b^2$

$=(a-b)^2 \geq 0$

따라서 $(a^2+1)(b^2+1) \geq (ab+1)^2$이다.

여기서 등호는 $a=b$일 때 성립한다.

14) $(2a+b)\left(\frac{8}{a}+\frac{1}{b}\right)=17+\frac{2a}{b}+\frac{8b}{a}$

$\geq 17+2\sqrt{\frac{2a}{b}\times\frac{8b}{a}}$

$=17+2\times 4$

$=25$

따라서 $(2a+b)\left(\frac{8}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 25$

또 등호가 성립하는 경우는 $\frac{2a}{b}=\frac{8b}{a}$, 즉 $a=2b$일 때이다.

15) 6

16) $x+\frac{1}{x-5}=\left(x-5+\frac{1}{x-5}\right)+5$

$\geq 2\sqrt{(x-5)\times\frac{1}{x-5}}+5$

$=7$

등호는 $x-5=\frac{1}{x-5}$일 때 성립하므로

$(x-5)^2=1$

그런데 $x>5$이므로 $x=6$

따라서 $m+n=7+6=13$

17) 주어진 부등식의 좌변에서 우변을 빼서 정리하면

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2$

$=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2-a^2x^2-2abxy-b^2y^2$

$=(ay-bx)^2 \geq 0$

$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$

여기서 등호는 $ay-bx=0$, $ay=bx$일 때 성립한다.

18) $(2^2+1^2)(x^2+y^2) \geq (2x+y)^2$에서

$(2x+y)^2 \leq 5$

그러므로 $-\sqrt{5} \leq 2x+y \leq \sqrt{5}$ (등호는 $x=2y$일 때 성립)

따라서 구하는 최댓값은 $\sqrt{5}$이다.