

# 2024 2학년 1학기 기말고사 문제지

## 수학 영역

성명		수험 번호																	
----	--	-------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

- 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
- 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

**잘했고, 잘할 거야**

- 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 답을 정확히 표시하시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.  
배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

- 수학 | ..... 1~8쪽
- 문항 수 및 배점
  - 객관식 ..... 15문항(65점)
  - 단답형 ..... 7문항(35점)
  - 서술형 ..... 0문항(0점)

**※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.**



2024 2학년 1학기 기말고사 문제지

수학 영역

제 2 교시

출수형

5지선다형

1. 등차수열  $a_n$ 에 대하여  $\sum_{k=1}^{13} a_k = 689$ 일 때,  $a_7$ 의 값은? [3.5점]

- ① 49      ② 51      ③ 53      ④ 55      ⑤ 57

2. 자연수  $n$ 에 대하여  $a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2 & (a_n \leq 0) \\ a_n - 3 & (a_n > 0) \end{cases}$ 일 때,  $a_4 = 1$ 이 되도록 하는 모든  $a_1$ 의 값의 합은? [3.6점]

- ① 10      ② 12      ③ 14      ④ 16      ⑤ 18

3.  $\sin x = -\frac{5}{13}$ 일 때, 다음 중  $13(\sin x + \cos x)$ 으로 가능한 것은? [3.7점]

- ① -17      ② -13      ③ -9      ④ 5      ⑤ 9

4. 집합  $\{x \mid -\pi \leq x \leq \pi\}$ 에서 정의된 함수

$$f(x) = \left| \sin 2x + \frac{2}{3} \right|$$

가 있다. 양수  $k$ 에 대하여 함수  $y = f(x)$

의 그래프가  $xy$ 평면 위의 그래프  $y^2 - 4ky + 3k^2 = 0$ 와 만나는 서로 다른 점의 개수를 각각  $m, n$ 이라 할 때,  $|m - n| = 3$ 을 만족한다.  $-\pi \leq x \leq \pi$ 일 때,  $x$ 에 대한 방정식  $f(x) = k$ 의 모든 실근의 합은? [3.8점]

- ①  $\frac{3}{2}\pi$       ②  $2\pi$       ③  $\frac{5}{2}\pi$       ④  $3\pi$       ⑤  $\frac{7}{2}\pi$

5. 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가  $\theta$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ )인 부채꼴이 있다. 각의 크기  $\theta$ 를 나타내는 동경과 각의 크기  $8\theta$ 를 나타내는 동경이 일치할 때, 부채꼴의 넓이는? [3.8점]

①  $\frac{3}{7}\pi$     ②  $\frac{4}{7}\pi$     ③  $\frac{9}{14}\pi$     ④  $\frac{5}{7}\pi$     ⑤  $\frac{11}{14}\pi$

6. 직선  $2x - 3y = 7$  위의 점  $(\alpha, \beta)$ 에 대하여  $|\alpha| + |\beta|$ 의 값 중  $n$ 번째로 작은 값을  $a_n$ 이라 하자.  $a_5 + \sum_{n=1}^{16} a_n$ 의 값은? (단,  $\alpha$ 와  $\beta$ 는 정수이다.) [4.0점]

① 320    ② 322    ③ 324    ④ 326    ⑤ 328

7. 자연수  $n$ 에 대하여 1부터  $n$ 까지의 자연수의 최소공배수를  $a_n$ 이라 할 때,  $k = \sum_{n=1}^{12} a_n$ 이다.  $k$ 를 5로 나눈 나머지는? [4.0점]

① 0    ② 1    ③ 2    ④ 3    ⑤ 4

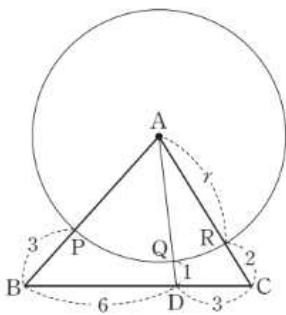
8. 자연수  $n$ 에 대하여 수열  $a_n = n^2 + bn + c$ 이다.  $x$ 에 대한 방정식  $x^n = a_n$ 의 서로 다른 실근의 개수를  $f(n)$ 이라 하자.  $f(2) + f(3) + f(4) = 3$ 이고,  $a_1 > 0$ ,  $a_3 < 0$ ,  $a_5 > 0$ 일 때, 모든  $a_{19}$ 의 값의 합은? (단,  $b$ 와  $c$ 는 정수이다.) [4.1점]

① 494    ② 510    ③ 526    ④ 765    ⑤ 843

9.  $\overline{AB}=3$ ,  $\overline{BC}=\sqrt{13}$ ,  $\overline{AD}\times\overline{CD}=9$ ,  $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$ 인 사각형 ABCD가 있다. 삼각형 ABC의 넓이를  $S_1$ , 삼각형 ACD의 넓이를  $S_2$ 라 하고, 삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이를  $R$ 이라 하자.  $5S_1 = 6S_2$ 일 때,  $\frac{R}{\sin(\angle ADC)}$ 의 값은? [4.3점]

- ①  $\frac{36}{25}$     ②  $\frac{8}{5}$     ③  $\frac{46}{25}$     ④ 2    ⑤  $\frac{54}{25}$

10. 그림과 같은 삼각형 ABC에서 선분 BC 위의 점 D에 대하여  $\overline{BD}=6$ ,  $\overline{CD}=3$ 이다. 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가  $r$ 인 원이 세 선분 AB, AD, AC와 만나는 점을 각각 P, Q, R라 할 때,  $\overline{PB}=3$ ,  $\overline{QD}=1$ ,  $\overline{RC}=2$ 이다.  $r$ 의 값은? [4.7점]



- ① 1    ② 2    ③ 3    ④ 4    ⑤ 5

11. 함수  $f(x) = \frac{k}{x-11} + 6$  ( $k \geq 36$ )에 대하여 수열  $a_k$ 를 다음과 같이 정의한다.

$|f(x)| \leq y \leq -x + 5$ 인 두 자연수  $x, y$ 의 모든 순서쌍  $(x, y)$ 의 개수를  $a_k$  ( $k \geq 36$ )라고 한다.

$2 \leq a_k \leq 4$ 를 만족하는 모든 자연수  $k$ 의 개수는? [4.9점]

- ① 15    ② 16    ③ 17    ④ 18    ⑤ 19

12. 중심이 각각  $O_1, O_2$ 이고 반지름의 길이가 각각 3, 2인 두 원  $C_1, C_2$ 가 직선  $l_1$ 과 점 A에서 동시에 접하고 있다. 원  $C_2$  위에 있고 직선  $O_1O_2$ 의 왼쪽에 있는 점 B에서 원  $C_2$ 에 접하는 직선  $l_2$ 와 원  $C_1$ 이 만나는 두 점 중 점 B에 가까운 점을 P, 다른 한 점을 Q라 하고, 두 선분 AP, AQ가 원  $C_2$ 와 만나는 점을 각각 R, S라 하자. 직선 RS가 원  $C_1$ 과 만나는 점 중 점 S에 가까운 점을 T, 직선  $l_1$ 과 만나는 점을 U라 하자. 점  $O_1$ 이 선분 RS 위의 점일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, 두 원  $C_1, C_2$ 는 한 평면 위에 있고, 원  $C_2$ 는 원  $C_1$ 의 내부에 있다.) [5.0점]

<보 기>

ㄱ.  $\overline{PQ} = \frac{3}{2}\overline{RS}$

ㄴ.  $\triangle O_1BO_2 = \frac{2}{O_1U}$

ㄷ.  $\left(\frac{\overline{O_1B}^2 - 5}{4}\right)^2 + \left(\frac{\overline{O_2T}^2 - 10}{6}\right)^2 = 1$

- ① ㄱ                      ② ㄴ                      ③ ㄱ, ㄴ  
 ④ ㄱ, ㄷ                ⑤ ㄴ, ㄷ

13. 함수  $f(x) = \left| 2a \cos \frac{b}{2}x - (a-2)(b-2) \right|$ 가 다음 조건을 만족시키도록 하는 10 이하의 자연수  $a, b$ 의 순서쌍  $(a, b)$ 의 개수는? [5.1점]

(가) 함수  $f(x)$ 는 주기가  $\pi$ 인 주기함수이다.  
 (나)  $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 함수  $y = f(x)$ 의 그래프와 직선  $y = 2a - 1$ 의 교점의 개수는 4이다.

- ① 11            ② 13            ③ 15            ④ 17            ⑤ 19

14. 수열  $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족한다.

(가) 모든 자연수  $k$ 와  $0 < |r| < 1$ 인 상수  $r$ 에 대하여

$$a_{4k} = r^k \text{이다.}$$

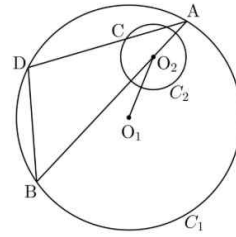
(나)  $a_1 < 0$ 이고, 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 3 & (|a_n| < 5) \\ -\frac{1}{2}a_n & (|a_n| \geq 5) \end{cases} \text{이다.}$$

$|a_m| \geq 5$ 를 만족하는 100 이하의 자연수  $m$ 의 개수를  $p$ 라 할 때,  $p + a_1$ 의 값은? [5.2점]

- ① 6      ② 8      ③ 10      ④ 12      ⑤ 14

15. 그림과 같이 중심이  $O_1$ 이고 반지름의 길이가  $r (r > 3)$ 인 원  $C_1$ 과 중심이  $O_2$ 이고 반지름의 길이가 1인 원  $C_2$ 에 대하여  $\overline{O_1O_2} = 2$ 이다. 원  $C_1$  위를 움직이는 점  $A$ 에 대하여 직선  $AO_2$ 가 원  $C_1$ 과 만나는 점 중  $A$ 가 아닌 점을  $B$ 라 하자. 원  $C_2$  위를 움직이는 점  $C$ 에 대하여 직선  $AC$ 가 원  $C_1$ 과 만나는 점 중  $A$ 가 아닌 점을  $D$ 라 하자.  $\overline{BD}$ 가 최대가 되도록 네 점  $A, B, C, D$ 를 정할 때,  $\overline{O_1C}^2$ 을  $r$ 에 대한 식으로 옳게 나타낸 것은? [5.3점]



- ①  $5 + \frac{4}{r-2}$       ②  $5 + \frac{4}{r-1}$       ③  $5 + \frac{4}{r}$   
 ④  $5 + \frac{2}{r-2}$       ⑤  $5 + \frac{2}{r}$

단답형

16. 삼각형 ABC에 대하여  $\overline{AB} = a$ ,  $\overline{AC} = b$ ,  $\overline{BC} = 4\sqrt{7}$ ,  
 $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$  일 때, 두 자연수  $a, b$ 의 순서쌍  $(a, b)$ 를 모두  
 구하시오. [4.0점]

17. 초항이 자연수이고 공차가 음의 정수인 등차수열  $\{a_n\}$ 과  
 초항이 자연수이고 공비가 음의 정수인 등비수열  $\{b_n\}$ 이 다음  
 조건을 만족시킬 때, 다음 물음에 답하시오. [4.0점]

- (가)  $\sum_{n=1}^5 (a_n + b_n) = 27$
- (나)  $\sum_{n=1}^5 (a_n + |b_n|) = 67$
- (다)  $\sum_{n=1}^5 (|a_n| + |b_n|) = 81$

1)  $\{a_n\}$ 의 일반항  $a_n$ 과  $\{b_n\}$ 의 일반항  $b_n$ 을 구하시오. [3.0점]

2)  $a_3 + b_9$ 의 값을 구하시오. [1.0점]

18.  $\sum_{k=1}^n (k \times 2^k)$ 를 구한 뒤  $\sum_{n=1}^5 (n \times 2^n)$ 의 값을 구하시오.  
 [5.0점]



19. 두 실수  $a$  ( $a \neq 0$ ),  $b$ 에 대하여 함수  $f(x)$ 를

$$f(x) = a \sin \frac{\pi}{6}(x-1) + b$$
라 하고, 양수  $t$ 에 대하여

$0 < x < t$ 에서 함수  $y = |f(x)|$ 의 그래프가 직선  $y = 4$ 와  
만나는 점의 개수를  $g(t)$ 라 하자.  $f(0) = 8$ ,  $g(18) = 5$ 일 때,  
 $g(X) = |a-b|$ 를 만족시키는 양수  $X$ 의 최댓값을 구하시오.  
[5.0점]

20. 두 정수  $l, m$ 에 대하여 두 등차수열  $\{a_n\}, \{b_n\}$ 의 일반항이

$$a_n = 12 + (n-1)l, b_n = -10 + (n-1)m$$
일 때,

$$\sum_{k=1}^{10} |a_k + b_k| = \sum_{k=1}^{10} (|a_k| - |b_k|) = 31$$
을 만족시키는 모든 순서쌍

$(l, m)$ 의 개수를 구하시오. [5.0점]

21. 수열  $\{a_n\}$ 은  $0 < a_1 < 1$ 이고, 모든 자연수  $n$ 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다. 이때 다음 물음에 답하시오. [6.0점]

- (가)  $a_{2n} = a_2 \times a_n + 1$   
 (나)  $a_{2n+1} = a_2 \times a_n - 2$

1)  $a_8 - a_{15} = 63$ 일 때,  $\frac{a_8}{a_1}$ 의 값을 구하시오. [3.0점]

2)  $a_7 = 2$ 일 때,  $a_{25}$ 의 값을 구하시오. [3.0점]

22. 두 함수  $f(x)$ 와  $g(x)$ 가  $f(x) = \begin{cases} \cos x & (\cos x \geq \sin x) \\ \sin x & (\cos x < \sin x) \end{cases}$ ,

$g(x) = \cos ax$  ( $a > 0$ )이다. 닫힌구간  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 에서 두 곡선  $y = f(x)$ 와  $y = g(x)$ 의 교점의 개수가 3이 되도록 하는  $a$ 의

최솟값을  $p$ 라 하자. 닫힌구간  $\left[0, \frac{11}{12}\pi\right]$ 에서 두 곡선

$y = f(x)$ 와  $y = \cos px$ 의 교점의 개수를  $q$ 라 할 때,  $p + q$ 의 값을 구하시오. [6.0점]

\* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.



※시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

2024 2학년 1학기 수1 기말고사 대비  
답안지

예상 1컷 83.7 2컷 68.6 3컷 59.7

1. ③

2. ①

3. ①

4. ③

5. ③

6. ②

7. ②

8. ④

9. ⑤

10. ⑤

11. ④

12. ④

13. ⑤

14. ④

15. ①

16. (4, 12), (12, 4), (8, 12), (12, 8)

17.  $a_n = -3n + 10$ ,  $b_n = 2 \times (-2)^{n-1}$ ,  $a_3 + b_9 = 513$

18.  $(n-1)2^{n+1} + 2$ , 258

19. 49

20. 7

21. 1) 92

2) 82

22. 17