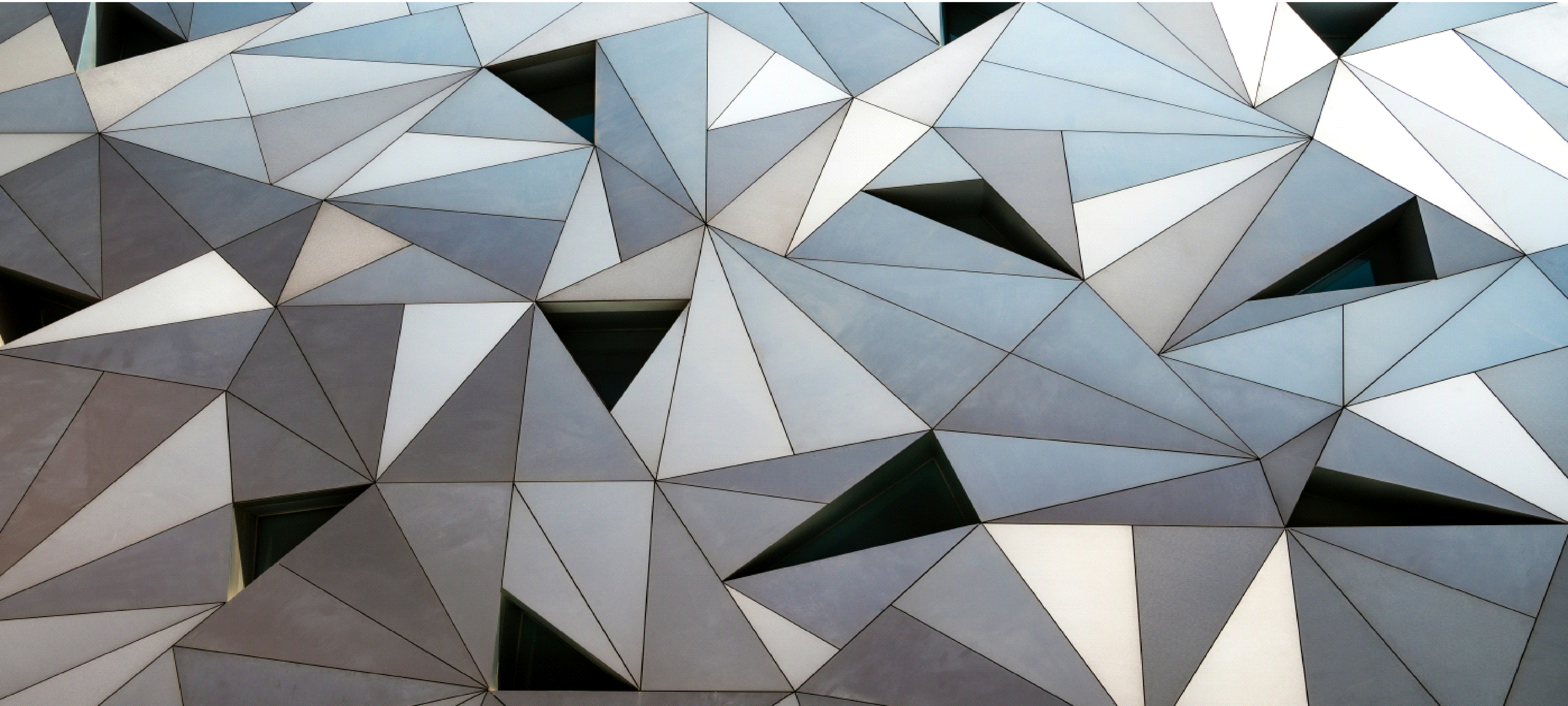
2025 수능대비 규토 N제 시리즈 보충프린트

2024년 기출 선별

ver_수1+수2



수1,수2

2024년 기출 선별

고3 24년 10월 ~ 고3 24년 3월

59문제 / 유성민선생님

이름 ____________

01 [2024년 10월 고3 8번/3점]

함수 $f(x)=x^2+1$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 점 $(1,\ f(1))$을 지나고 기울기가 $m\ (m\geq 2)$인 직선이 이등분할 때, 상수 m의 값은?

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

02 [2024년 10월 고3 9번/4점]

좌표평면 위에 두 점

$\mathrm{A}(4,\ \log_3 a)$, $\mathrm{B}\left(\log_2 2\sqrt{2},\ \log_3 \frac{3}{2}\right)$이 있다.

선분 AB를 $3:1$로 외분하는 점이 직선 $y=4x$ 위에 있을 때, 양수 a의 값은?

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{7}{16}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{9}{16}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

03 [2024년 10월 고3 10번/4점]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $(x-1)g(x)=|f(x)|$를 만족시킨다. 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이고 $g(3)=0$일 때, $f(4)$의 값은?

① 9 ② 12 ③ 15 ④ 18 ⑤ 21

04 [2024년 10월 고3 11번/4점]

모든 항이 자연수인 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $a_5-b_5=a_6-b_7=0$이다. $a_7=27$이고 $b_7\leq 24$일 때, b_1-a_1의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

05 [2024년 10월 고3 12번/4점]

시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는두 점 P, Q의 시각 $t\ (t \geq 0)$에서의 속도가 각각 $v_1(t)=-3t^2+at$, $v_2(t)=-t+1$이다.

출발한 후 두 점 P, Q가 한 번만 만나도록 하는 양수 a에 대하여 점 P가 시각 $t=0$에서 시각 $t=3$까지 움직인 거리는?

① $\dfrac{29}{2}$ ② 15 ③ $\dfrac{31}{2}$

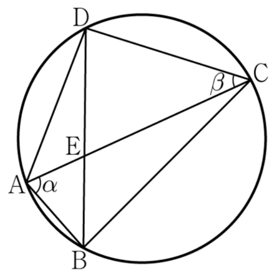
④ 16 ⑤ $\dfrac{33}{2}$

06 [2024년 10월 고3 13번/4점]

그림과 같이 한 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여 $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=2\sqrt{30}$, $\overline{CD}=8$이다.

$\angle BAC=\alpha$, $\angle ACD=\beta$라 할 때, $\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{5}{12}$이다. 두 선분 AC와 BD의 교점을 E라 할 때, 선분 AE의 길이는?

$\left(\text{단, } 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2},\ 0<\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$



① $\sqrt{6}$ ② $\dfrac{\sqrt{26}}{2}$ ③ $\sqrt{7}$

④ $\dfrac{\sqrt{30}}{2}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

07 [2024년 10월 고3 14번/4점]

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여

함수 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \le 1) \\ f(x-1)+2 & (x > 1) \end{cases}$은 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(0,\ g(0))$에서의 접선의 방정식이 $y=2x+1$이다.

$g'(t)=2$인 서로 다른 모든 실수 t의 값의 합은?

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5

④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

08 [2024년 10월 고3 15번/4점]

모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} \dfrac{a_n}{n} & (n\text{이 } a_n\text{의 약수인 경우}) \\ 3a_n+1 & (n\text{이 } a_n\text{의 약수가 아닌 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_6=2$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은?

① 254 ② 264 ③ 274

④ 284 ⑤ 294

09 [2024년 10월 고3 19번/3점]

두 상수 a, b $(a>0)$에 대하여

함수 $f(x)=|\sin a\pi x+b|$가 다음 조건을 만족시킬 때, $60(a+b)$의 값을 구하시오.

(가) $f(x)=0$이고 $\lvert x\rvert \le \frac{1}{a}$인 모든 실수 x의 값의 합은 $\frac{1}{2}$이다. (나) $f(x)=\frac{2}{5}$이고 $\lvert x\rvert \le \frac{1}{a}$인 모든 실수 x의 값의 합은 $\frac{3}{4}$이다.

10 [2024년 10월 고3 21번/4점]

두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{4}{x-3}+a & (x<2) \\ |5\log_2 x-b| & (x \ge 2) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 최솟값을 구하시오.

(가) 함수 $g(t)$의 치역은 $\{0,\ 1,\ 2\}$이다. (나) $g(t)=2$인 자연수 t의 개수는 6이다.

11 [2024년 9월 고3 10번/4점]

$\angle \mathrm{A} > \frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{2} : 1$, $\overline{\mathrm{AH}} = 2$이고, 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 50π일 때, 선분 BH의 길이는?

① 6 ② $\frac{25}{4}$ ③ $\frac{13}{2}$
④ $\frac{27}{4}$ ⑤ 7

12 [2024년 9월 고3 11번/4점]

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 위치가 각각 $x_1 = t^2 + t - 6$, $x_2 = -t^3 + 7t^2$이다. 두 점 P, Q의 위치가 같아지는 순간 두 점 P, Q의 가속도를 각각 p, q라 할 때, $p - q$의 값은?

① 24 ② 27 ③ 30
④ 33 ⑤ 36

13 [2024년 9월 고3 12번/4점]

수열 $\{a_n\}$은 등차수열이고, 수열 $\{b_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여 $b_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$를 만족시킨다. $b_2 = -2$, $b_3 + b_7 = 0$일 때, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제9항까지의 합은?

① -22 ② -20 ③ -18
④ -16 ⑤ -14

14 [2024년 9월 고3 13번/4점]

함수 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 6 & (x < 0) \\ -x^2 + 2x + 6 & (x \geq 0) \end{cases}$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 두 점을 P, Q라 하고, 상수 k $(k > 4)$에 대하여 직선 $x = k$가 x축과 만나는 점을 R이라 하자. 곡선 $y = f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y = f(x)$와 직선 $x = k$ 및 선분 QR로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $A = 2B$일 때, k의 값은? (단, 점 P의 x좌표는 음수이다.)

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$
④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

15 [2024년 9월 고3 14번/4점]

자연수 n에 대하여 곡선 $y=2^x$ 위의 두 점 A_n, B_n이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 직선 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 기울기는 3이다.
> (나) $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=\sqrt{10}\,n$

중심이 직선 $y=x$ 위에 있고 두 점 A_n, B_n을 지나는 원이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 두 점의 x좌표 중 큰 값을 x_n이라 하자. $x_1+x_2+x_3$의 값은?

① $\frac{150}{7}$ ② $\frac{155}{7}$ ③ $\frac{160}{7}$ ④ $\frac{165}{7}$ ⑤ $\frac{170}{7}$

16 [2024년 9월 고3 15번/4점]

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$는 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\displaystyle\int_1^x tf(t)dt+\int_{-1}^x tg(t)dt=3x^4+8x^3-3x^2$
> (나) $f(x)=xg'(x)$

$\displaystyle\int_0^3 g(x)dx$의 값은?

① 72 ② 76 ③ 80 ④ 84 ⑤ 88

17 [2024년 9월 고3 18번/3점]

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}ka_k=36$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{9}ka_{k+1}=7$일 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}a_k$의 값을 구하시오.

18 [2024년 9월 고3 20번/4점]

닫힌구간 $[0,\ 2\pi]$에서 정의된

함수 $f(x)=\begin{cases}\sin x-1 & (0\le x<\pi)\\ -\sqrt{2}\sin x-1 & (\pi\le x\le 2\pi)\end{cases}$가 있다.

$0\le t\le 2\pi$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=f(t)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 모든 t의 값의 합은 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

19 [2024년 9월 고3 21번/4점]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 정수 k에 대하여 $2k-8 \leq \dfrac{f(k+2)-f(k)}{2} \leq 4k^2+14k$를 만족시킬 때, $f'(3)$의 값을 구하시오.

20 [2024년 9월 고3 22번/4점]

양수 k에 대하여 $a_1=k$인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_2a_3<0$
> (나) 모든 자연수 n에 대하여
> $\left(a_{n+1}-a_n+\dfrac{2}{3}k\right)\left(a_{n+1}+ka_n\right)=0$이다.

$a_5=0$이 되도록 하는 서로 다른 모든 양수 k에 대하여 k^2의 값의 합을 구하시오.

21 [2024년 7월 고3 8번/3점]

삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여
$xf'(x)=6x^3-x+f(0)+1$을 만족시킬 때, $f(-1)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

22 [2024년 7월 고3 9번/4점]

좌표평면 위에 서로 다른 세 점 $\mathrm{A}(0,\ -\log_2 9)$, $\mathrm{B}(2a,\ \log_2 7)$, $\mathrm{C}(-\log_2 9,\ a)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(b,\ \log_8 7)$일 때, 2^{a+3b}의 값은?

① 63 ② 72 ③ 81
④ 90 ⑤ 99

23 [2024년 7월 고3 10번/4점]

양수 a에 대하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가 $v(t)=3t(a-t)$이다. 시각 $t=0$에서 점 P의 위치는 16이고, 시각 $t=2a$에서 점 P의 위치는 0이다. 시각 $t=0$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는?

① 54 ② 58 ③ 62
④ 66 ⑤ 70

24 [2024년 7월 고3 11번/4점]

공차가 d $(0<d<1)$인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) a_5는 자연수이다.
> (나) 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $S_8=\dfrac{68}{3}$이다.

a_{16}의 값은?

① $\dfrac{19}{3}$ ② $\dfrac{77}{12}$ ③ $\dfrac{13}{2}$
④ $\dfrac{79}{12}$ ⑤ $\dfrac{20}{3}$

25 [2024년 7월 고3 12번/4점]

두 상수 a, b에 대하여 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

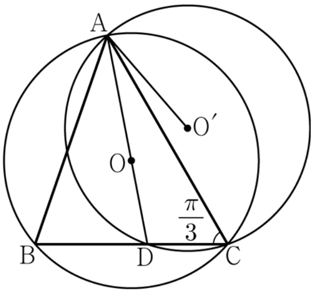
> (가) $0 \leq x < 4$일 때, $f(x)=x^3+ax^2+bx$이다.
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)+16$이다.

$\displaystyle\int_4^7 f(x)dx$의 값은?

① $\dfrac{255}{4}$ ② $\dfrac{261}{4}$ ③ $\dfrac{267}{4}$
④ $\dfrac{273}{4}$ ⑤ $\dfrac{279}{4}$

26 [2024년 7월 고3 13번/4점]

그림과 같이 $\overline{BC}=\frac{36\sqrt{7}}{7}$, $\sin(\angle BAC)=\frac{2\sqrt{7}}{7}$, $\angle ACB=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O, 직선 AO가 변 BC와 만나는 점을 D라 하자. 삼각형 ADC의 외접원의 중심을 O′이라 할 때, $\overline{AO'}=5\sqrt{3}$이다. $\overline{OO'}^2$의 값은? $\left(단, 0<\angle BAC<\frac{\pi}{2}\right)$



① 21 ② $\frac{91}{4}$ ③ $\frac{49}{2}$
④ $\frac{105}{4}$ ⑤ 28

27 [2024년 7월 고3 14번/4점]

양수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}-2(x+1)^2+4 & (x\le 0)\\ a(x-5) & (x>0)\end{cases}$$

이다.

함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여 $f(k)=g(k)$를 만족시키는 서로 다른 모든 실수 k의 값이 -2, 0, 2일 때, $g(2a)$의 값은?

① 14 ② 18 ③ 22
④ 26 ⑤ 30

28 [2024년 7월 고3 15번/4점]

첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

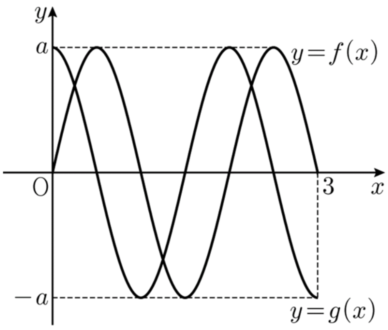
$$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}a_n & \left(\frac{1}{2}a_n\text{이 자연수인 경우}\right)\\ (a_n-1)^2 & \left(\frac{1}{2}a_n\text{이 자연수가 아닌 경우}\right)\end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_7=1$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은?

① 120 ② 125 ③ 130
④ 135 ⑤ 140

29 [2024년 7월 고3 19번/3점]

양수 a에 대하여 $0 \le x \le 3$에서 정의된 두 함수 $f(x)=a\sin\pi x$, $g(x)=a\cos\pi x$가 있다. 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 만나는 서로 다른 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이가 2일 때, a^2의 값을 구하시오.



30 [2024년 7월 고3 20번/4점]

두 함수 $f(x)=x^3-12x$,
$g(x)=a(x-2)+2$ ($a \ne 0$)에 대하여 함수 $h(x)$는

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x) \ge g(x)) \\ g(x) & (f(x) < g(x)) \end{cases}$$

이다.

함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 실수 a의 값의 범위는 $m < a < M$이다.

> 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 실수 k가 존재한다.

$10(M-m)$의 값을 구하시오.

31 [2024년 7월 고3 21번/4점]

$m \le -10$인 상수 m에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} \left|5\log_2(4-x)+m\right| & (x \le 0) \\ 5\log_2 x+m & (x > 0) \end{cases}$$

이다.

실수 t ($t>0$)에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 모든 실근의 합을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(m)$의 값을 구하시오.

> $t \ge a$인 모든 실수 t에 대하여 $g(t)=g(a)$가 되도록 하는 양수 a의 최솟값은 2이다.

32 [2024년 6월 고3 9번/4점]

함수 $f(x)=\begin{cases} x-\dfrac{1}{2} & (x<0) \\ -x^2+3 & (x \ge 0) \end{cases}$ 에 대하여

함수 $(f(x)+a)^2$이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은?

① $-\dfrac{9}{4}$ ② $-\dfrac{7}{4}$ ③ $-\dfrac{5}{4}$ ④ $-\dfrac{3}{4}$ ⑤ $-\dfrac{1}{4}$

33 [2024년 6월 고3 10번/4점]

다음 조건을 만족시키는 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 9π일 때, 삼각형 ABC의 넓이는?

(가) $3\sin A = 2\sin B$
(나) $\cos B = \cos C$

① $\frac{32}{9}\sqrt{2}$ ② $\frac{40}{9}\sqrt{2}$ ③ $\frac{16}{3}\sqrt{2}$
④ $\frac{56}{9}\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{64}{9}\sqrt{2}$

34 [2024년 6월 고3 11번/4점]

최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$가

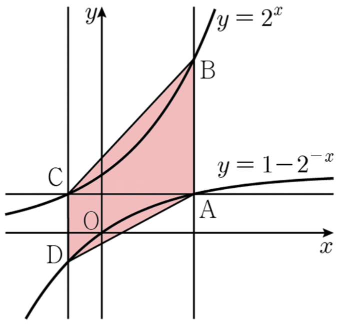
$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-1}{x-a}=3$을 만족시킨다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 y절편이 4일 때, $f(1)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① -1 ② -2 ③ -3
④ -4 ⑤ -5

35 [2024년 6월 고3 12번/4점]

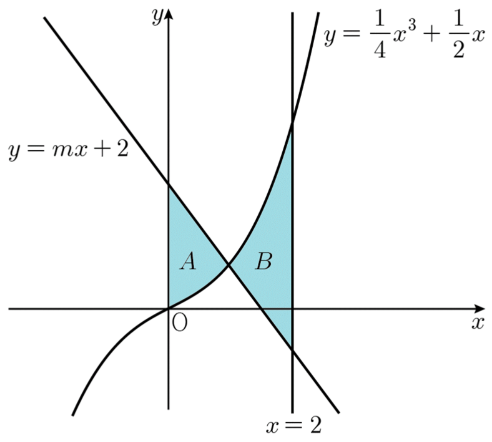
그림과 같이 곡선 $y=1-2^{-x}$ 위의 제1사분면에 있는 점 A를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 C, 점 C를 지나고 y축에 평행한 직선이 $y=1-2^{-x}$과 만나는 점을 D라 하자. $\overline{AB}=2\overline{CD}$일 때, 사각형 ABCD의 넓이는?



① $\frac{5}{2}\log_2 3-\frac{5}{4}$ ② $3\log_2 3-\frac{3}{2}$
③ $\frac{7}{2}\log_2 3-\frac{7}{4}$ ④ $4\log_2 3-2$
⑤ $\frac{9}{2}\log_2 3-\frac{9}{4}$

36 [2024년 6월 고3 13번/4점]

곡선 $y=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x$와 직선 $y=mx+2$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x$와 두 직선 $y=mx+2$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $B-A=\frac{2}{3}$일 때, 상수 m의 값은? (단, $m<-1$)



① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{17}{12}$ ③ $-\frac{4}{3}$
④ $-\frac{5}{4}$ ⑤ $-\frac{7}{6}$

37 [2024년 6월 고3 14번/4점]

다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합은?

> $\log_2\sqrt{-n^2+10n+75}-\log_4(75-kn)$의 값이 양수가 되도록 하는 자연수 n의 개수가 12이다.

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

38 [2024년 6월 고3 19번/3점]

시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t\ge 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=\begin{cases}-t^2+t+2 & (0\le t\le 3)\\ k(t-3)-4 & (t>3)\end{cases}$$

이다. 출발한 후 점 P의 운동 방향이 두 번째로 바뀌는 시각에서의 점 P의 위치가 1일 때, 양수 k의 값을 구하시오.

39 [2024년 6월 고3 20번/4점]

5 이하의 두 자연수 a, b에 대하여 열린구간 $(0,\ 2\pi)$에서 정의된 함수 $y=a\sin x+b$의 그래프가 직선 $x=\pi$와 만나는 점의 집합을 A라 하고, 두 직선 $y=1$, $y=3$과 만나는 점의 집합을 각각 B, C라 하자.
$n(A\cup B\cup C)=3$이 되도록 하는 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$에 대하여 $a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값을 구하시오.

40 [2024년 6월 고3 21번/4점]

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(a)\le 0$인 실수 a의 최댓값은 2이다. (나) 집합 $\{x\,|\,f(x)=k\}$의 원소의 개수가 3 이상이 되도록 하는 실수 k의 최솟값은 $\frac{8}{3}$이다.

$f(0)=0$, $f'(1)=0$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오.

41 [2024년 6월 고3 22번/4점]

수열 $\{a_n\}$은 $a_2=-a_1$이고, $n\ge 2$인 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-\sqrt{n}\cdot a_{\sqrt{n}} & (\sqrt{n}\text{이 자연수이고, } a_n>0\text{인 경우}) \\ a_n+1 & (\text{그 외의 경우}) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_{15}=1$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 곱을 구하시오.

42 [2024년 5월 고3 8번/3점]

두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=a\cos bx$의 주기가 6π이고 닫힌구간 $[\pi,\ 4\pi]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 1일 때, $a+b$의 값은?

① $\frac{5}{3}$ ② $\frac{11}{6}$ ③ 2 ④ $\frac{13}{6}$ ⑤ $\frac{7}{3}$

43 [2024년 5월 고3 9번/4점]

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=1-4S_n$이고 $a_4=4$일 때, $a_1 \cdot a_6$의 값은?

① 5 ② 10 ③ 15
④ 20 ⑤ 25

44 [2024년 5월 고3 10번/4점]

실수 m에 대하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도를 각각 $v_1(t)=3t^2+1$, $v_2(t)=mt-4$라 하자. 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 두 점 P, Q가 움직인 거리가 같도록 하는 모든 m의 값의 합은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

45 [2024년 5월 고3 11번/4점]

공차가 정수인 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$과 자연수 m $(m \geq 3)$이 다음 조건을 만족시킨다.

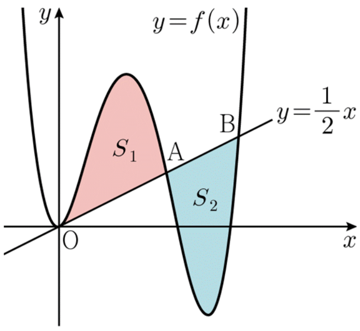
(가) $|a_1-b_1|=5$
(나) $a_m=b_m$, $a_{m+1}<b_{m+1}$

$\sum_{k=1}^{m} a_k=9$일 때, $\sum_{k=1}^{m} b_k$의 값은?

① -6 ② -5 ③ -4
④ -3 ⑤ -2

46 [2024년 5월 고3 12번/4점]

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{1}{2}x$가 원점 O에서 접하고 x좌표가 양수인 두 점 A, B $(\overline{OA}<\overline{OB})$에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$와 선분 OA로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_1, 곡선 $y=f(x)$와 선분 AB로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_2라 하자. $\overline{AB}=\sqrt{5}$이고, $S_1=S_2$일 때, $f(1)$의 값은?



① $\frac{9}{2}$ ② $\frac{11}{2}$ ③ $\frac{13}{2}$
④ $\frac{15}{2}$ ⑤ $\frac{17}{2}$

47 [2024년 5월 고3 13번/4점]

두 상수 a, b $(b>0)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} 2^{x+3}+b & (x \le a) \\ 2^{-x+5}+3b & (x>a) \end{cases}$$

라 하자. 다음 조건을 만족시키는 실수 k의 최댓값이 $4b+8$일 때, $a+b$의 값은? (단, $k>b$)

$b<t<k$인 모든 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수는 1이다.

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

48 [2024년 5월 고3 15번/4점]

첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} \dfrac{a_n}{3} & (a_n\text{이 } 3\text{의 배수인 경우}) \\ \dfrac{{a_n}^2+5}{3} & (a_n\text{이 } 3\text{의 배수가 아닌 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_4+a_5=5$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은?

① 63 ② 66 ③ 69
④ 72 ⑤ 75

49 [2024년 5월 고3 18번/3점]

최고차항의 계수가 3인 이차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $\int_0^x f(t)dt = 2x^3 + \int_0^{-x} f(t)dt$를 만족시킨다. $f(1)=5$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

50 [2024년 5월 고3 19번/3점]

집합 $U=\{x \mid -5 \le x \le 5,\ x$는 정수$\}$의 공집합이 아닌 부분집합 X에 대하여 두 집합 A, B를

$A=\{a \mid a$는 x의 실수인 네제곱근, $x \in X\}$,

$B=\{b \mid b$는 x의 실수인 세제곱근, $x \in X\}$라 하자.

$n(A)=9$, $n(B)=7$이 되도록 하는 집합 X의 모든 원소의 합의 최댓값을 구하시오.

51 [2024년 5월 고3 20번/4점]

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$xf(x)=\left(-\frac{1}{2}x+3\right)g(x)-x^3+2x^2$을 만족시킨다.

상수 k $(k \ne 0)$에 대하여

$\lim_{x\to2}\frac{g(x-1)}{f(x)-g(x)} \cdot \lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{g(x)}=k$일 때,

k의 값을 구하시오.

52 [2024년 3월 고3 9번/4점]

좌표평면 위의 두 점 $(0, 0)$, $(\log_2 9, k)$를 지나는 직선이 직선 $(\log_4 3)x+(\log_9 8)y-2=0$에 수직일 때, 3^k의 값은? (단, k는 상수이다.)

① 16　② 32　③ 64　④ 128　⑤ 256

53 [2024년 3월 고3 10번/4점]
시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도가 각각 $v_1(t)=3t^2-6t-2$, $v_2(t)=-2t+6$이다. 출발한 시각부터 두 점 P, Q가 다시 만날 때까지 점 Q가 움직인 거리는?

① 7　② 8　③ 9
④ 10　⑤ 11

54 [2024년 3월 고3 11번/4점]
공차가 음의 정수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_6=-2$,

$\sum_{k=1}^{8}|a_k|=\sum_{k=1}^{8}a_k+42$일 때, $\sum_{k=1}^{8}a_k$의 값은?

① 40　② 44　③ 48
④ 52　⑤ 56

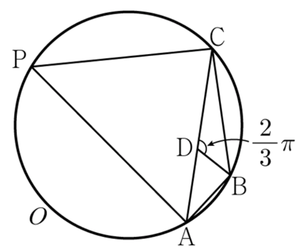
55 [2024년 3월 고3 12번/4점]
실수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$f(x)=\begin{cases} 3x^2+3x+a & (x<0) \\ 3x+a & (x \geq 0) \end{cases}$이다.

함수 $g(x)=\int_{-4}^{x} f(t)dt$가 $x=2$에서 극솟값을 가질 때, 함수 $g(x)$의 극댓값은?

① 18　② 20　③ 22
④ 24　⑤ 26

56 [2024년 3월 고3 13번/4점]
그림과 같이 $2\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$, $\cos(\angle\mathrm{ABC})=-\frac{5}{8}$인 삼각형 ABC의 외접원을 O라 하자. 원 O 위의 점 P에 대하여 삼각형 PAC의 넓이가 최대가 되도록 하는 점 P를 Q라 할 때, $\overline{\mathrm{QA}}=6\sqrt{10}$이다. 선분 AC 위의 점 D에 대하여 $\angle\mathrm{CDB}=\frac{2}{3}\pi$일 때, 삼각형 CDB의 외접원의 반지름의 길이는?

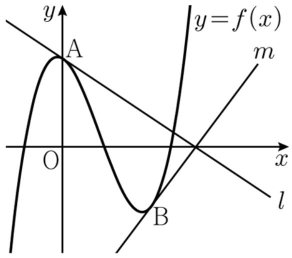


① $3\sqrt{3}$　② $4\sqrt{3}$　③ $3\sqrt{6}$
④ $5\sqrt{3}$　⑤ $4\sqrt{6}$

57 [2024년 3월 고3 19번/3점]

실수 a에 대하여 함수 $f(x)=x^3-\frac{5}{2}x^2+ax+2$이다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 2)$, $\mathrm{B}(2,\ f(2))$에서의 접선을 각각 l, m이라 하자. 두 직선 l, m이 만나는 점이 x축 위에 있을 때, $60 \cdot |f(2)|$의 값을 구하시오.



58 [2024년 3월 고3 20번/4점]

두 함수 $f(x)=2x^2+2x-1$, $g(x)=\cos\frac{\pi}{3}x$에 대하여 $0 \le x < 12$에서 방정식 $f(g(x))=g(x)$를 만족시키는 모든 실수 x의 값의 합을 구하시오.

59 [2024년 3월 고3 21번/4점]

$a>2$인 실수 a에 대하여 기울기가 -1인 직선이 두 곡선 $y=a^x+2$, $y=\log_a x+2$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 선분 AB를 지름으로 하는 원의 중심의 y좌표가 $\frac{19}{2}$이고 넓이가 $\frac{121}{2}\pi$일 때, a^2의 값을 구하시오.

수1,수2

2024년 기출 선별

고3 24년 10월 ~ 고3 24년 3월

대치명인학원

59문제 / 유성민선생님

이름 ______________

빠른정답

01 ②	02 ①	03 ①
04 ③	05 ①	06 ⑤
07 ③	08 ④	09 84
10 15	11 ①	12 ①
13 ②	14 ④	15 ⑤
16 ①	17 29	18 15
19 31	20 8	21 ①
22 ③	23 ②	24 ⑤
25 ④	26 ①	27 ④
28 ②	29 2	30 35
31 8	32 ③	33 ⑤
34 ⑤	35 ③	36 ③
37 ④	38 16	39 24
40 15	41 231	42 ⑤
43 ①	44 ⑤	45 ①
46 ⑤	47 ①	48 ④
49 16	50 11	51 25
52 ③	53 ④	54 ②
55 ⑤	56 ②	57 80
58 36	59 13	

수1,수2

2024년 기출 선별

고3 24년 10월 ~ 고3 24년 3월

대치명인학원

59문제 / 유성민선생님

이름 ____________

01 정답 ②

해설 정적분을 이해하여 도형의 넓이를 구한다.

함수 $f(x)=x^2+1$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 A라 하면

$$A=\int_0^1 (x^2+1)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1=\frac{4}{3}$$

점 $(1,\ f(1))$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y-f(1)=m(x-1)$, 즉 $y=mx-m+2$

세 점 $(1,\ f(1))$, $(1,\ 0)$, $\left(1-\frac{2}{m},\ 0\right)$을 꼭짓점으로 하는

삼각형의 넓이는 $\frac{A}{2}$이므로

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{m}\cdot 2$$

$\therefore\ m=3$

02 정답 ①

해설 로그의 성질을 이해하여 상수를 구한다.

선분 AB를 3 : 1로 외분하는 점을 Q라 하자.

점 Q의 x좌표는

$$\frac{3\log_2 2\sqrt{2}-4}{3-1}=\frac{1}{2}\cdot\left(3\cdot\frac{3}{2}-4\right)=\frac{1}{4}$$

점 Q는 직선 $y=4x$ 위에 있으므로

점 Q의 y좌표는 $4\cdot\frac{1}{4}=1$

$$\frac{3\log_3\frac{3}{2}-\log_3 a}{3-1}=1\text{에서}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{a}=3^2$$

$\therefore\ a=\frac{3}{8}$

03 정답 ①

해설 함수의 연속을 이해하여 함숫값을 구한다.

$(x-1)g(x)=|f(x)|$에

$x=1$을 대입하면 $f(1)=0$

$x=3$을 대입하면 $2g(3)=|f(3)|$

이때 $g(3)=0$이므로

$f(3)=0$

$f(x)=(x-1)(x-3)(x-a)$ (a는 상수)라 하면

$$g(x)=\frac{|(x-1)(x-3)(x-a)|}{x-1}\quad(x\neq 1)$$

이때 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 1-}g(x)=\lim_{x\to 1-}\frac{|(x-1)(x-3)(x-a)|}{x-1}$$

$$=-2|1-a|$$

$$\lim_{x\to 1+}g(x)=\lim_{x\to 1+}\frac{|(x-1)(x-3)(x-a)|}{x-1}$$

$$=2|1-a|$$

$-2|1-a|=2|1-a|$

$\therefore\ a=1$

따라서 $f(x)=(x-1)^2(x-3)$이므로

$f(4)=9$

04 정답 ③

해설 등차수열을 이해하여 두 항의 차를 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차를 각각 d, l이라 하자.

$a_6-a_5=b_7-b_5$이므로 $d=2l$

$d=0$이면 $a_7=a_6=27$이고 $b_7\le 24$에서

$a_6\ne b_7$이므로 $d\ne 0$이다.

l은 자연수이므로 d는 2의 배수이다.

$a_7=a_1+6d=27$에서

$a_1=27-6d>0$이므로 $d=2$ 또는 $d=4$

(ⅰ) $d=2$인 경우, $a_1=27-6\cdot 2=15$이고

$b_7=b_5+2l=a_5+d=a_1+5d=25$

(ⅱ) $d=4$인 경우, $a_1=27-6\cdot 4=3$이고

$b_7=b_5+2l=a_5+d=a_1+5d=23$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $b_7\le 24$이므로 $d=4$, $l=2$

$\therefore b_1-a_1=(b_5-a_5)+4(d-l)$

$=4\cdot 2=8$

05 정답 ①

해설 정적분을 이용하여 수직선 위의 점이 움직인 거리를 구하는 문제를 해결한다.

출발한 후 두 점 P, Q가 만나는 시각을 $t=k$ $(k>0)$이라 하자.

$$\int_0^k(-3t^2+at)dt-\int_0^k(-t+1)dt=0$$

$$\int_0^k\{(-3t^2+at)-(-t+1)\}dt=0$$

$$-k^3+\frac{a+1}{2}k^2-k=0,\ k\left(k^2-\frac{a+1}{2}k+1\right)=0$$

이차방정식 $k^2-\frac{a+1}{2}k+1=0$이 양수인 근을 가지고

근과 계수와의 관계에서 두 근의 곱이 1이므로

이차방정식의 판별식 D에 대하여 $D=0$이다.

$$D=\left(\frac{a+1}{2}\right)^2-4=0$$

$\therefore a=3$

따라서 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^3|v_1(t)|dt=\int_0^3|-3t^2+3t|dt$$

$$=\int_0^1(-3t^2+3t)dt+\int_0^3(3t^2-3t)dt$$

$$=\frac{29}{2}$$

06 정답 ⑤

해설 코사인법칙을 이용하여 삼각형에 관한 문제를 해결한다.

삼각형 ABE와 삼각형 DCE는 서로 닮음이고

$\overline{AB}:\overline{DC}=1:2$이므로 $\overline{BE}:\overline{CE}=1:2$이다.

삼각형 BEC에서 $\overline{BE}=k$ $(k>0)$이라 하면

$\overline{CE}=2k$

원주각의 성질에 의하여 $\angle BDC=\angle BAC=\alpha$이므로

$\angle BEC=\alpha+\beta$

삼각형 BEC에서 코사인법칙에 의하여

$$(2\sqrt{30})^2=k^2+4k^2-2\cdot k\cdot 2k\cdot\left(-\frac{5}{12}\right)$$

$k^2=18$

$k>0$이므로 $k=3\sqrt{2}$, 즉 $\overline{BE}=3\sqrt{2}$

$\overline{AE}=t$ $(t>0)$이라 하면 삼각형 ABE에서

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$이므로 $t^2+4^2>(3\sqrt{2})^2$, $t>\sqrt{2}$

$$\cos(\pi-(\alpha+\beta))=-\cos(\alpha+\beta)=\frac{5}{12}$$

삼각형 ABE에서 코사인법칙에 의하여

$$4^2=t^2+(3\sqrt{2})^2-2\cdot t\cdot 3\sqrt{2}\cdot\frac{5}{12}$$

$2t^2-5\sqrt{2}t+4=0$

$(2t-\sqrt{2})(t-2\sqrt{2})=0$

$t>\sqrt{2}$이므로 $t=2\sqrt{2}$

따라서 구하는 선분 AE의 길이는 $2\sqrt{2}$이다.

07 정답 ③

해설 미분을 활용하여 방정식 문제를 해결한다.

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(0,\ g(0))$에서의 접선의 방정식이 $y=2x+1$이므로

$g(0)=1$, $g'(0)=2$이고 $f(0)=1$, $f'(0)=2$이다.

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 연속이다.

$$\lim_{x\to1-}g(x)=\lim_{x\to1+}g(x)=g(1)$$

$$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}\{f(x-1)+2\}=f(1)$$

$f(1)=f(0)+2$ $\cdots$ ㉠

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to1-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{f(x-1)+2-f(1)}{x-1}$$

㉠에서 $2-f(1)=-f(0)$이므로

$f'(1)=f'(0)=2$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=2x+1$과 두 점 $(0,\ f(0))$, $(1,\ f(1))$에서 접한다.

$f(x)-(2x+1)=x^2(x-1)^2$

$f(x)=x^2(x-1)^2+2x+1$

$\quad =x^4-2x^3+x^2+2x+1$

$f'(x)=4x^3-6x^2+2x+2=2$

$2x(2x-1)(x-1)=0$

$g(x)=f(x)$ $(x \le 1)$이므로

$x \le 1$에서 $g'(x)=2$인 x의 값은

$x=0$ 또는 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$ ⋯ ㉢

$g(x)=f(x-1)+2$ $(x>1)$

곡선 $y=f(x-1)+2$는 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 1, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 곡선이므로 $x>1$에서 $g'(x)=2$인 x의 값은

$x=\frac{3}{2}$ 또는 $x=2$ ⋯ ㉣

㉢, ㉣에서 $g'(t)=2$인 모든 실수 t의 값의 합은

$0+\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+2=5$

08 정답 ④

해설 수열의 귀납적 정의를 이용하여 항의 값을 추론한다.

자연수 k에 대하여

$a_{n+1}=3k$ 또는 $a_{n+1}=3k-1$ (k는 자연수)이면

$a_{n+1} \ne 3a_n+1$이므로

$a_{n+1}=\frac{a_n}{n}$, 즉 $a_n=na_{n+1}$

$a_6=2=3\cdot 1-1$이므로 $a_5=5\cdot 2=10$

$10=3\cdot 3+1$이므로

$a_4=3$ 또는 $a_4=4\cdot 10=40$

(ⅰ) $a_4=3$인 경우, $3=3\cdot 1$이므로

$a_3=3\cdot 3=9$, $a_2=2\cdot 9=18$, $a_1=18$

(ⅱ) $a_4=40$인 경우, $40=3\cdot 13+1$이므로

$a_3=13$ 또는 $a_3=3\cdot 40=120$

(a) $a_3=13$인 경우, $13=3\cdot 4+1$이므로

$a_2=4$ 또는 $a_2=2\cdot 13=26$

$a_2=4$인 경우, 2는 4의 약수이므로

$a_3=\frac{4}{2}=2$가 되어 $a_3 \ne 13$이다.

$a_2=26$인 경우, $a_1=26$

(b) $a_3=120$인 경우, $120=3\cdot 40$이므로

$a_2=2\cdot 120=240$, $a_1=240$

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 a_1의 값의 합은

$18+26+240=284$

09 정답 84

해설 삼각함수의 그래프를 이해하여 상수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

조건 (가)에서 $f(x)=0$이고 $-\frac{1}{a}\le x\le\frac{1}{a}$인

모든 실수 x의 값의 합이 $\frac{1}{2}$이 되기 위해서는

$\frac{1}{2a}=\frac{1}{2}$ 또는 $\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$

$\therefore\ a=1$ 또는 $a=2$

(ⅰ) $a=1$인 경우

$b=-1$이고 $-\frac{1}{a}\le x\le\frac{1}{a}$에서

$f(x)=\frac{2}{5}$인 모든 실수 x의 값의 합이 1이 되어

조건 (나)를 만족하지 않는다.

(ⅱ) $a=2$인 경우

조건 (나)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와

직선 $y=\frac{2}{5}$가 세 점에서 만나야 하므로

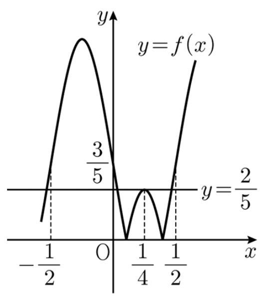
$$f\left(\frac{1}{4}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{2}+b\right|$$
$$=|1+b|=\frac{2}{5}$$

$b=-\frac{7}{5}$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이

만나지 않으므로 $b=-\frac{3}{5}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a=2$, $b=-\frac{3}{5}$이므로

$$60(a+b)=60\left(2-\frac{3}{5}\right)$$
$$=60\cdot\frac{7}{5}=84$$



10 정답 15

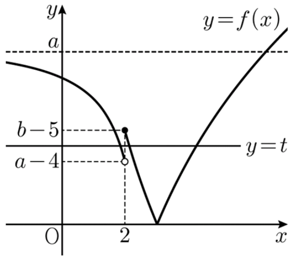
해설 로그함수의 성질을 활용하여 상수를 추론한다.

$x<2$에서 함수 $y=\frac{4}{x-3}+a$는 감소한다.

함수 $y=5\log_2 x-b$는 증가하고 $f(2)=|5-b|$이다.

(ⅰ) $5-b<0$, 즉 $b>5$인 경우

$a-4<b-5$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

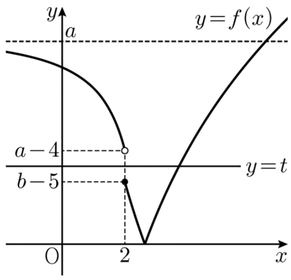


조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와

직선 $y=t$는 서로 다른 세 점에서 만나지 않아야

하므로 아래 그림과 같이 $a-4\ge b-5$, 즉

$b-a\le 1$을 만족시켜야 한다.



조건 (나)에서 $g(t)=2$가 되도록 하는 자연수 t는

$a-1$, $a-2$, $a-3$과 $b-5$ 이하의 자연수이므로

t의 개수가 6이면 $b-5=3$, 즉 $b=8$이다.

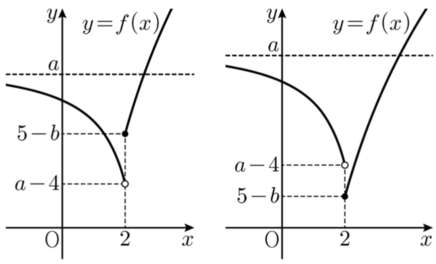
$b-a\le 1$이므로 $8-a\le 1$에서

$a\ge 7$

$\therefore\ a\ge 7$, $b=8$

(ⅱ) $5-b\ge 0$, 즉 $b\le 5$인 경우

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$g(t)=2$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프와

직선 $y=t$는 $x<2$에서 한 점에서 만나고,

$x\ge 2$에서 한 점에서 만난다.

이때 $x<2$에서 $a-4<f(x)<a$이고, $a-4$보다

크고 a보다 작은 정수는 $a-3$, $a-2$, $a-1$로

3개뿐이므로 자연수 t의 최대 개수는 3이고

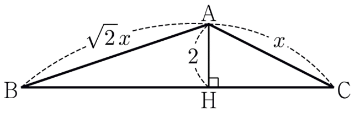
조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a \geq 7$, $b=8$이므로
$a+b \geq 15$
따라서 $a+b$의 최솟값은 15이다.

11 정답 ①

해설 사인법칙을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

$\overline{AB}:\overline{AC}=\sqrt{2}:1$이므로 $\overline{AC}=x$라 하면
$\overline{AB}=\sqrt{2}x$



삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면
이 외접원의 넓이가 50π이므로
$\pi R^2=50\pi$에서 $R=5\sqrt{2}$
직각삼각형 AHC에서
$\sin(\angle ACH)=\dfrac{2}{x}$, 즉 $\sin C=\dfrac{2}{x}$
삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여
$\dfrac{\overline{AB}}{\sin C}=2R$, 즉 $\overline{AB}=2R\sin C$
$\sqrt{2}x=2\cdot 5\sqrt{2}\cdot\dfrac{2}{x}$, $x^2=20$
$\therefore\ x=2\sqrt{5}$
따라서 $\overline{AB}=\sqrt{2}x=2\sqrt{10}$ 이므로
직각삼각형 ABH에서

$$\begin{aligned}\overline{BH}&=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AH}^2}\\&=\sqrt{(2\sqrt{10})^2-2^2}\\&=6\end{aligned}$$

12 정답 ①

해설 위치, 속도, 가속도 사이의 관계 및 미분을 이용하여 가속도를 구할 수 있는 가?

$x_1=t^2+t-6$, $x_2=-t^3+7t^2$이므로
$x_1=x_2$에서
$t^2+t-6=-t^3+7t^2$
$t^3-6t^2+t-6=0$
$t^2(t-6)+t-6=0$
$(t-6)(t^2+1)=0$
이때 $t \geq 0$이므로
$t=6$
즉, 두 점 P, Q의 위치가 같아지는 순간의 시각은
$t=6$이다.
또, 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 v_1, v_2라 하면
$v_1=\dfrac{dx_1}{dt}=2t+1$, $v_2=\dfrac{dx_2}{dt}=-3t^2+14t$
두 점 P, Q의 시각 t에서의 가속도를 각각 a_1, a_2라 하면
$a_1=\dfrac{dv_1}{dt}=2$, $a_2=\dfrac{dv_2}{dt}=-6t+14$
시각 $t=6$에서의 두 점 P, Q의 가속도가 각각 p, q이므로
$p=2$, $q=-6\cdot 6+14=-22$
$\therefore\ p-q=2-(-22)=24$

13 정답 ②

해설 등차수열의 일반항을 이용하여 새롭게 정의된 수열의 합을 구할 수 있는가?

$b_1=\sum_{k=1}^{1}(-1)^{k+1}a_k=a_1$
$b_2=\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}a_k=a_1-a_2$
이때 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면
$b_2=-2$이므로
$a_1-a_2=-d=-2$
$\therefore\ d=2$
또,

$$\begin{aligned}b_3&=\sum_{k=1}^{3}(-1)^{k+1}a_k\\&=a_1-a_2+a_3\\&=-d+a_3\\&=a_3-2\end{aligned}$$

$b_7 = \sum_{k=1}^{7} (-1)^{k+1} a_k$

$= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7$

$= -3d + a_7$

$= a_7 - 6$

이므로 $b_3 + b_7 = 0$에서

$(a_3 - 2) + (a_7 - 6) = a_3 + a_7 - 8$

$= (a_1 + 2 \cdot 2) + (a_1 + 6 \cdot 2) - 8$

$= (a_1 + 4) + (a_1 + 12) - 8$

$= 2a_1 + 8$

$= 0$

$\therefore\ a_1 = -4$

즉, $a_n = -4 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 6$이므로

$b_1 = a_1 = -4$

$b_2 = a_1 - a_2 = -2$

$b_3 = a_1 - a_2 + a_3 = -2$

$b_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = -4$

$b_5 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 = 0$

$b_6 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 = -6$

$b_7 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 = 2$

$b_8 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - a_8 = -8$

$b_9 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - a_8 + a_9 = 4$

$\therefore\ b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_9$

$= -4 + (-2) + (-2) + (-4) + 0 + (-6)$
$+ 2 + (-8) + 4$

$= -20$

14 정답 ④

해설 정적분을 이용하여 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

함수 $y = f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 곡선 $y = f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이는 y축에 의하여 이등분된다.

이때 $A = 2B$이므로

$$\int_0^k (-x^2 + 2x + 6)\,dx = 0$$

이어야 한다.

즉, $\left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 6x\right]_0^k = 0$이므로

$-\frac{1}{3}k^3 + k^2 + 6k = 0$

$-\frac{1}{3}k(k+3)(k-6) = 0$

이때 $k > 4$이므로

$k = 6$

15 정답 ⑤

해설 지수함수와 로그함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

두 점 A_n, B_n의 좌표를

각각 $\mathrm{A}_n\left(a_n,\ 2^{a_n}\right)$, $\mathrm{B}_n\left(b_n,\ 2^{b_n}\right)$ $(a_n < b_n)$이라 하면

조건 (가)에 의하여

$$\frac{2^{b_n}-2^{a_n}}{b_n-a_n}=3 \qquad \cdots ㉠$$

조건 (나)에 의하여

$$(b_n-a_n)^2+\left(2^{b_n}-2^{a_n}\right)^2=10n^2 \qquad \cdots ㉡$$

㉠에서 $2^{b_n}-2^{a_n}=3(b_n-a_n)$이므로

이것을 ㉡에 대입하여 정리하면

$(b_n-a_n)^2=n^2$

$a_n<b_n$이므로

$b_n-a_n=n$, 즉 $a_n=b_n-n$

이것을 ㉠에 대입하여 정리하면

$2^{b_n}-2^{b_n-n}=3n$이므로

$$2^{b_n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=3n$$

$$2^{b_n}=3n\cdot\frac{2^n}{2^n-1}$$

또, 곡선 $y=2^x$과 곡선 $y=\log_2 x$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 x_n은 점 B_n의 y좌표와 같다.

따라서 $x_n=2^{b_n}=3n\cdot\dfrac{2^n}{2^n-1}$이므로

$$x_1+x_2+x_3=6+8+\frac{72}{7}=\frac{170}{7}$$

16 정답 ①

해설 주어진 조건을 만족시키는 다항함수를 구하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

조건 (가)의 양변을 x에 대하여 미분하면

$xf(x)+xg(x)=12x^3+24x^2-6x$

$f(x)+g(x)=12x^2+24x-6 \qquad \cdots ㉠$

이때 조건 (나)에서 $f(x)=xg'(x)$이므로

㉠에 대입하면

$xg'(x)+g(x)=12x^2+24x-6$

$\{xg(x)\}'=12x^2+24x-6$

$$xg(x)=\int(12x^2+24x-6)dx$$

$=4x^3+12x^2-6x+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $g(x)$는 다항함수이므로

$C=0$

즉, $xg(x)=4x^3+12x^2-6x$이므로

$g(x)=4x^2+12x-6$

$$\therefore \int_0^3 g(x)dx=\int_0^3(4x^2+12x-6)dx$$

$$=\left[\frac{4}{3}x^3+6x^2-6x\right]_0^3$$

$=36+54-18$

$=72$

17 정답 29

해설 $\sum$의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}ka_k=36$에서

$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+10a_{10}=36 \qquad \cdots ㉠$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{9}ka_{k+1}=7$에서

$a_2+2a_3+3a_4+\cdots+9a_{10}=7 \qquad \cdots ㉡$

㉠$-$㉡을 하면

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=\sum_{k=1}^{10}a_k$$

$=36-7=29$

18 정답 15

해설 삼각함수의 그래프를 이용하여 방정식을 만족시키는 실수의 값의 합을 구할 수 있는가?

$0 \le x < \pi$에서 함수 $y = \sin x - 1$의 그래프는 이 구간에서 함수 $y = \sin x$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동시킨 것이다.

이때 이 구간에서 함수 $y = \sin x - 1$의 최댓값은 0이고, 최솟값은 -1이다.

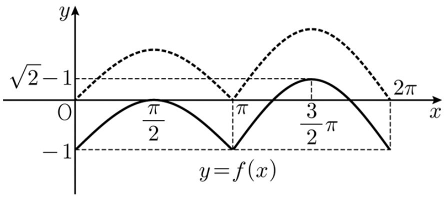
$\pi \le x \le 2\pi$에서 함수 $y = -\sqrt{2}\sin x - 1$의 그래프는 이 구간에서 함수 $y = -\sqrt{2}\sin x$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동시킨 것이다.

이때 이 구간에서 함수 $y = -\sqrt{2}\sin x - 1$의 최댓값은 $\sqrt{2} - 1$이고, 최솟값은 -1이다.

따라서 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된

함수 $f(x) = \begin{cases} \sin x - 1 & (0 \le x < \pi) \\ -\sqrt{2}\sin x - 1 & (\pi \le x \le 2\pi) \end{cases}$의

그래프는 다음과 같다.



방정식 $f(x) = f(t)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이므로 함수 $y = f(x)$의 그래프와 직선 $y = f(t)$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 3이다.

따라서 $f(t) = -1$ 또는 $f(t) = 0$이다.

(i) $f(t) = -1$일 때

$t = 0$ 또는 $t = \pi$ 또는 $t = 2\pi$

(ii) $f(t) = 0$일 때

$t = \frac{\pi}{2}$ 또는 $-\sqrt{2}\sin t = 1 = 0$ $(\pi \le t \le 2\pi)$

$-\sqrt{2}\sin t - 1 = 0$에서 $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\pi \le x \le 2\pi$이므로

$t = \frac{5}{4}\pi$ 또는 $t = \frac{7}{4}\pi$

(i), (ii)에서 모든 t의 값의 합은

$0 + \pi + 2\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{5}{4}\pi + \frac{7}{4}\pi = \frac{13}{2}\pi$

따라서 $p = 2$, $q = 13$이므로

$p + q = 15$

19 정답 31

해설 부등식을 만족시키는 함수의 도함수를 추론할 수 있는가?

$2k - 8 \le \frac{f(k+2) - f(k)}{2} \le 4k^2 + 14k$ $\cdots$ ㉠

에서

$2k - 8 = 4k^2 + 14k$

$k^2 + 3k + 2 = 0$, $(k+1)(k+2) = 0$

$\therefore$ $k = -1$ 또는 $k = -2$

즉, ㉠에 $k = -1$을 대입하면

$-10 \le \frac{f(1) - f(-1)}{2} \le -10$이므로

$f(1) - f(-1) = -20$ $\cdots$ ㉡

또, ㉠에 $k = -2$를 대입하면

$-12 \le \frac{f(0) - f(-2)}{2} \le -12$이므로

$f(0) - f(-2) = -24$ $\cdots$ ㉢

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

상수 a, b, c에 대하여

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$로 놓으면 ㉡에서

$$f(1) - f(-1) = (1 + a + b + c) - (-1 + a - b + c)$$
$$= 2 + 2b = -20$$

$\therefore$ $b = -11$

$$f(0) - f(-2) = c - (-8 + 4a - 2b + c)$$
$$= 8 - 4a + 2 \cdot (-11)\ (\because b = -11)$$
$$= -4a - 14$$
$$= -24$$

$\therefore$ $a = \frac{5}{2}$

따라서 $f(x) = x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 11x + c$에서

$f'(x) = 3x^2 + 5x - 11$이므로

$f'(3) = 3 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 - 11 = 31$

20 정답 8

해설 귀납적으로 정의된 수열의 특정한 항의 값을 구할 수 있는가?

조건 (나)에서

$\left(a_{n+1} - a_n + \frac{2}{3}k\right)\left(a_{n+1} + ka_n\right) = 0$이므로

$a_{n+1} - a_n + \frac{2}{3}k = 0$ 또는 $a_{n+1} + ka_n = 0$

즉, $a_{n+1} = a_n - \frac{2}{3}k$ 또는 $a_{n+1} = -ka_n$

$a_1 = k$이므로

$a_2=a_1-\frac{2}{3}k=k-\frac{2}{3}k=\frac{k}{3}$ 또는

$a_2=-ka_1=-k\cdot k=-k^2$

(ⅰ) $a_2=\frac{k}{3}$일 때

$a_3=a_2-\frac{2}{3}k=\frac{k}{3}-\frac{2}{3}k=-\frac{k}{3}$ 또는

$a_3=-ka_2=-k\cdot\frac{k}{3}=-\frac{k^2}{3}$

(a) $a_3=-\frac{k}{3}$일 때

$a_2a_3=\frac{k}{3}\cdot\left(-\frac{k}{3}\right)=-\frac{k^2}{9}<0$이므로

조건 (가)를 만족시킨다.

$a_4=a_3-\frac{2}{3}k=-\frac{k}{3}-\frac{2}{3}k=-k$ 또는

$a_4=-ka_3=-k\cdot\left(-\frac{k}{3}\right)=\frac{k^2}{3}$

(①) $a_4=-k$일 때

$a_5=a_4-\frac{2}{3}k=-k-\frac{2}{3}k=-\frac{5}{3}k$ 또는

$a_5=-ka_4=-k\cdot(-k)=k^2$

$a_5=-\frac{5}{3}k$일 때, $a_5<0$이고

$a_5=k^2$일 때, $a_5>0$이므로

$a_5=0$을 만족시키는 양수 k의 값은

존재하지 않는다.

(②) $a_4=\frac{k^2}{3}$일 때

$a_5=a_4-\frac{2}{3}k=\frac{k^2}{3}-\frac{2}{3}k$ 또는

$a_5=-ka_4=-k\cdot\frac{k^2}{3}=-\frac{k^3}{3}$

$a_5=\frac{k^2}{3}-\frac{2}{3}k$일 때,

$a_5=0$에서

$\frac{k^2}{3}-\frac{2}{3}k=0,\ \frac{k(k-2)}{3}=0$

$k>0$이므로 $k=2$

$a_5=-\frac{k^3}{3}$일 때, $a_5<0$이므로 $a_5=0$을

만족시키는 양수 k의 값은 존재하지 않는다.

(b) $a_3=-\frac{k^2}{3}$일 때

$a_2a_3=\frac{k}{3}\cdot\left(-\frac{k^2}{3}\right)=-\frac{k^3}{9}<0$이므로

조건 (가)를 만족시킨다.

$a_4=a_3-\frac{2}{3}k=-\frac{k^2}{3}-\frac{2}{3}k$ 또는

$a_4=-ka_3=-k\cdot\left(-\frac{k^2}{3}\right)=\frac{k^3}{3}$

(①) $a_4=-\frac{k^2}{3}-\frac{2}{3}k$일 때

$a_5=a_4-\frac{2}{3}k=\left(-\frac{k^2}{3}-\frac{2}{3}k\right)-\frac{2}{3}k$

$=-\frac{k^2}{3}-\frac{4}{3}k$ 또는

$a_5=-ka_4=-k\cdot\left(-\frac{k^2}{3}-\frac{2}{3}k\right)$

$=\frac{k^3}{3}+\frac{2}{3}k^2$

$a_5=-\frac{k^2}{3}-\frac{4}{3}k$일 때,

$a_5=-\frac{k(k+4)}{3}<0$이고

$a_5=\frac{k^3}{3}+\frac{2}{3}k^2$일 때,

$a_5=\frac{k^2(k+2)}{3}>0$이므로

$a_5=0$을 만족시키는 양수 k의 값은

존재하지 않는다.

(②) $a_4=\frac{k^3}{3}$일 때

$a_5=a_4-\frac{2}{3}k=\frac{k^3}{3}-\frac{2}{3}k$ 또는

$a_5=-ka_4=-k\cdot\frac{k^3}{3}=-\frac{k^4}{3}$

$a_5=\frac{k^3}{3}-\frac{2}{3}k$일 때,

$a_5=0$에서 $\frac{k^3}{3}-\frac{2}{3}k=0$

$\frac{k(k^2-2)}{3}=0$

$k>0$이므로 $k=\sqrt{2}$

$a_5=-\frac{k^4}{3}$일 때, $a_5=-\frac{k^4}{3}<0$이므로

$a_5=0$을 만족시키는 양수 k의 값은

존재하지 않는다.

(ⅱ) $a_2=-k^2$일 때

$a_3=a_2-\frac{2}{3}k=-k^2-\frac{2}{3}k$ 또는

$a_3=-ka_2=-k\cdot(-k^2)=k^3$

(a) $a_3=-k^2-\frac{2}{3}k$일 때

$a_2a_3=-k^2\cdot\left(-k^2-\frac{2}{3}k\right)$

$=k^2\left(k^2+\frac{2}{3}k\right)>0$이므로

조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(ⅱ) $a_3=k^3$일 때

$a_2a_3=-k^2\cdot k^3=-k^5<0$이므로

조건 (가)를 만족시킨다.

$a_3=k^3$이므로

$a_4=a_3-\frac{2}{3}k=k^3-\frac{2}{3}k$ 또는

$a_4=-ka_3=-k\cdot k^3=-k^4$

(①) $a_4=k^3-\frac{2}{3}k$일 때

$a_5=a_4-\frac{2}{3}k$

$=\left(k^3-\frac{2}{3}k\right)-\frac{2}{3}k=k^3-\frac{4}{3}k$ 또는

$a_5=-ka_4$

$=-k\cdot\left(k^3-\frac{2}{3}k\right)=-k^4+\frac{2}{3}k^2$

$a_5=k^3-\frac{4}{3}k$일 때, $a_5=0$에서

$k^3-\frac{4}{3}k=0$

$k\left(k^2-\frac{4}{3}\right)=0$

$k>0$이므로 $k=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$

$a_5=-k^4+\frac{2}{3}k^2$일 때, $a_5=0$에서

$-k^4+\frac{2}{3}k^2=0,\ -k^2\left(k^2-\frac{2}{3}\right)=0$

$k>0$이므로 $k=\sqrt{\frac{2}{3}}$

(②) $a_4=-k^4$일 때

$a_5=a_4-\frac{2}{3}k=-k^4-\frac{2}{3}k$ 또는

$a_5=-ka_4=-k\cdot(-k^4)=k^5$

$a_5=-k^4-\frac{2}{3}k$일 때,

$a_5=-k\left(k^3+\frac{2}{3}\right)<0$이고,

$a_5=k^5$일 때, $a_5>0$이므로 만족시키는

양수 k의 값은 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 k의 값은 $2,\ \sqrt{2},\ \frac{2}{\sqrt{3}},\ \sqrt{\frac{2}{3}}$ 이므로

k^2의 값의 합은

$2^2+(\sqrt{2})^2+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2=8$

21 정답 ①

해설 부정적분의 성질 이해하기

모든 실수 x에 대하여

$xf'(x)=6x^3-x+f(0)+1$이므로

$x=0$일 때, $0=f(0)+1$

$\therefore f(0)-1$

$xf'(x)=6x^3-x+(-1)+1$

$=x(6x^2-1)$

따라서 $f'(x)=6x^2-1$이므로

$f(x)=2x^3-x+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(0)=C=-1$이므로

$f(x)=2x^3-x-1$

$\therefore f(-1)=-2+1-1$

$=-2$

22 정답 ③

해설 지수와 로그의 성질 이해하기

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{0+2a+(-\log_2 9)}{3}, \frac{(-\log_2 9)+\log_2 7+a}{3}\right)$$

$$\frac{0+2a+(-\log_2 9)}{3}=b,\ 2a-\log_2 9=3b$$

$$\therefore\ b=\frac{2}{3}a-\frac{1}{3}\log_2 9 \qquad \cdots ㉠$$

$$\frac{(-\log_2 9)+\log_2 7+a}{3}=\log_8 7$$

$$\frac{(-\log_2 9)+\log_2 7+a}{3}=\frac{1}{3}\log_2 7$$

$$-\log_2 9+\log_2 7+a=\log_2 7$$

$$\therefore\ a=\log_2 9 \qquad \cdots ㉡$$

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면

$$b=\frac{2}{3}\log_2 9-\frac{1}{3}\log_2 9=\frac{1}{3}\log_2 9$$

따라서 $a+3b=\log_2 9+\log_2 9=\log_2 81$에서

$$2^{a+3b}=2^{\log_2 81}$$

이때 $2^{\log_2 81}=k$라 하면

$$\log_2 k=\log_2 81$$

$$\therefore\ k=2^{a+3b}=81$$

23 정답 ②

해설 정적분을 활용하여 문제 해결하기

시각 t $(t\geq 0)$에서의 점 P의 위치를 $x(t)$라 하자.

$$x(t)=x(0)+\int_0^t v(t)dt$$

$$=16+\int_0^t 3t(a-t)dt$$

$$=16+\int_0^t(-3t^2+3at)dt$$

$$=16+\left[-t^3+\frac{3}{2}at^2\right]_0^t$$

$$=-t^3+\frac{3}{2}at^2+16$$

시각 $t=2a$에서 점 P의 위치가 0이므로

$$x(2a)=-(2a)^3+\frac{3}{2}a\cdot(2a)^2+16$$

$$=16-2a^3=0$$

$$a^3=8$$

따라서 $a=2$이므로

$$v(t)=3t(2-t)=-3t^2+6t$$

이때 시각 $t=0$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^5|v(t)|dt$$

$$=\int_0^5|-3t^2+6t|dt$$

$$=\int_0^2(-3t^2+6t)dt+\int_2^5(3t^2-6t)dt$$

$$=\left[-t^3+3t^2\right]_0^2+\left[t^3-3t^2\right]_2^5$$

$$=\{(-8+12)-0\}+\{(125-75)-(8-12)\}$$

$$=58$$

24 정답 ⑤

해설 등차수열을 활용하여 문제 해결하기

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하자.

$a_n=a+(n-1)d$ (단, n은 자연수)

$a_5=a+4d$는 자연수이다.

$$S_8=\frac{8(2a+7d)}{2}$$
$$=4(2a+7d)=\frac{68}{3}$$
$$\therefore 2a+7d=\frac{17}{3}$$

이때 $2(a+4d)-d=2a_5-d=\frac{17}{3}$에서

$$a_5=\frac{1}{2}d+\frac{17}{6}$$

$0<d<1$이므로

$$\frac{17}{6}<a_5<\frac{10}{3}$$
$$\therefore a_5=3,\ d=\frac{1}{3}$$

이때 $a_5=a+4\cdot\frac{1}{3}=3$에서 $a=\frac{5}{3}$이므로

$$a_n=\frac{5}{3}+(n-1)\cdot\frac{1}{3}$$
$$\therefore a_{16}=\frac{5}{3}+15\cdot\frac{1}{3}=\frac{20}{3}$$

25 정답 ④

해설 정적분을 활용하여 문제 해결하기

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이다

함수 $f(x)$가 $x=4$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to4+}f(x)=\lim_{x\to4-}f(x)=f(4)$$

$4\le x<8$에서의 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $0\le x<4$에서의 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 16만큼 평행이동한 그래프와 일치한다.

모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)+16$이므로

$$\lim_{x\to4+}f(x)=\lim_{x\to0+}f(x+4)$$
$$=\lim_{x\to0+}\{f(x)+16\}$$
$$=0+16=16$$

$$\lim_{x\to4-}f(x)=\lim_{x\to4-}(x^3+ax^2+bx)$$
$$=64+16a+4b$$

$f(4)=f(0)+16=16$

$16=64+16a+4b$

$\therefore b=-4a-12$

함수 $f(x)$가 $x=4$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to4+}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to4-}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}$$

$$\lim_{x\to4+}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to0+}\frac{f(x+4)-f(4)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0+}\frac{\{f(x)+16\}-16}{x}$$
$$=\lim_{x\to0+}\frac{x^3+ax^2+bx}{x}$$
$$=\lim_{x\to0+}(x^2+ax+b)$$
$$=b=-4a-12$$

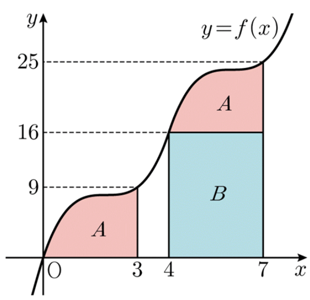
$$\lim_{x\to4-}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}$$
$$=\lim_{x\to4-}\frac{(x^3+ax^2+bx)-16}{x-4}$$
$$=\lim_{x\to4-}\frac{x^3+ax^2+(-4a-12)x-16}{x-4}$$
$$=\lim_{x\to4-}\frac{ax(x-4)+(x-4)(x^2+4x+4)}{x-4}$$
$$=\lim_{x\to4-}\{x^2+(a+4)x+4\}$$
$$=4a+36$$

$-4a-12=4a+36$

따라서 $a=-6$, $b=12$이므로

$f(x)=x^3-6x^2+12x$ $(0\le x<4)$

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 직선 $y=16$과 $x=4$, $x=7$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하면

$$A=\int_0^3 f(x)dx$$
$$=\int_0^3(x^3-6x^2+12x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^3+6x^2\right]_0^3=\frac{81}{4}$$

$B=3\cdot16=48$

$$\therefore \int_4^7 f(x)dx=A+B$$

$$=\frac{81}{4}+48=\frac{273}{4}$$

26 정답 ①

해설 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제 해결하기

삼각형 ABC의 외접원을 C_1, 삼각형 ADC의 외접원을 C_2라 하자.

원 C_1의 반지름의 길이를 R라 하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin(\angle\mathrm{BAC})}=\frac{\frac{36\sqrt{7}}{7}}{\frac{2\sqrt{7}}{7}}=18=2R$$

$\therefore R=9$

원 C_2에서 $\angle\mathrm{AO'D}$는 호 AD의 중심각, $\angle\mathrm{ACD}$는 호 AD의 원주각이므로

$$\angle\mathrm{AO'D}=2\angle\mathrm{ACD}=\frac{2}{3}\pi$$

이등변삼각형 O′AD에서 $\angle\mathrm{AO'D}=\frac{2}{3}\pi$이므로

$$\angle\mathrm{DAO'}=\frac{\pi}{6}$$

$\overline{\mathrm{OA}}=R=9$, $\overline{\mathrm{AO'}}=5\sqrt{3}$

$\angle\mathrm{OAO'}=\frac{\pi}{6}$이므로 삼각형 AOO′에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{OO'}}^2=9^2+(5\sqrt{3})^2-2\cdot9\cdot5\sqrt{3}\cdot\cos\frac{\pi}{6}$$

$$=81+75-135=21$$

$\therefore \overline{\mathrm{OO'}}^2=21$

27 정답 ④

해설 함수의 그래프의 개형을 활용하여 문제 해결하기

$f(-2)=g(-2)=2$, $f(0)=g(0)=2$이므로

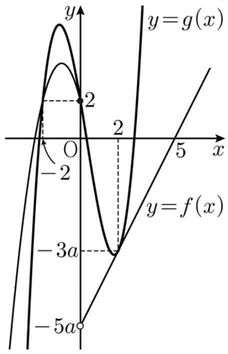
삼차방정식 $g(x)=2$의 서로 다른 세 실근을 -2, 0, t라 하면

$g(x)-2=x(x+2)(x-t)$

$g(x)=x(x+2)(x-t)+2$

$\quad=x^3+(2-t)x^2-2tx+2$

$f(k)=g(k)$를 만족시키는 양수 k의 값은 2뿐이므로 이를 만족시키는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$x>0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ g(2))$에서의 접선과 일치한다.

따라서 $f(2)=g(2)$이고

$f'(2)=g'(2)$

$f(2)=a(2-5)=-3a$

$g(2)=8+4(2-t)-4t+2=18-8t$

$\therefore\ -3a=18-8t \qquad \cdots ㉠$

$f'(2)=g'(2)$이므로 $f'(x)=a\ (x>0)$에서

$f'(2)=a$

$g'(x)=3x^2+2(2-t)x-2t$에서

$g'(2)=20-6t$

$\therefore\ a=20-6t \qquad \cdots ㉡$

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면

$a=2$, $t=3$

따라서 $g(x)=x^3-x^2-6x+2$이므로

$g(2a)=g(4)=26$

28 정답 ②

해설 수열의 귀납적 정의를 활용하여 추론하기

a_1이 자연수이고 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$ 또는 $a_{n+1}=(a_n-1)^2$이므로

수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 음이 아닌 정수이다.

a_{n+1}의 값에 따라 가능한 a_n의 값은 다음과 같다.

(Ⅰ) $a_{n+1}=(2k)^2$인 자연수 k가 존재하는 경우

$a_n=\sqrt{a_{n+1}}+1$ 또는 $a_n=2a_{n+1}$

(Ⅱ) $a_{n+1}=1$인 경우

$a_n=0$ 또는 $a_n=2$

(Ⅲ) $a_{n+1}=0$인 경우

$a_n=1$

(Ⅳ) 그 외의 경우

$a_n=2a_{n+1}$

(Ⅰ)~(Ⅳ)에 의하여

$a_7=1$이므로 $a_6=0$ 또는 $a_6=2$

(ⅰ) $a_6=0$인 경우

$a_5=1$이고 순서쌍 $(a_4,\ a_3,\ a_2,\ a_1)$은

$(0,\ 1,\ 0,\ 1)$ 또는 $(0,\ 1,\ 2,\ 4)$ 또는

$(2,\ 4,\ 3,\ 6)$ 또는 $(2,\ 4,\ 8,\ 16)$이므로

$a_1=1$ 또는 $a_1=4$ 또는 $a_1=6$ 또는 $a_1=16$

(ⅱ) $a_6=2$인 경우

$a_5=4$이고 순서쌍 $(a_4,\ a_3,\ a_2,\ a_1)$은

$(3,\ 6,\ 12,\ 24)$ 또는 $(8,\ 16,\ 5,\ 10)$ 또는

$(8,\ 16,\ 32,\ 64)$이므로

$a_1=24$ 또는 $a_1=10$ 또는 $a_1=64$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 a_1의 값의 합은

$1+4+16+6+24+10+64=125$

29 정답 2

해설 삼각함수의 그래프 이해하기

삼각함수 $y=a\sin\pi x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$, 최댓값은 a,

최솟값은 $-a$이다.

삼각함수 $y=a\cos\pi x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$, 최댓값은 a,

최솟값은 $-a$이다.

곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 점의 x좌표는

방정식 $f(x)=g(x)$의 실근이므로

$a\sin\pi x=a\cos\pi x$, $\tan\pi x=1$

$\pi x=\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{9}{4}\pi\ (0\le\pi x\le3\pi)$

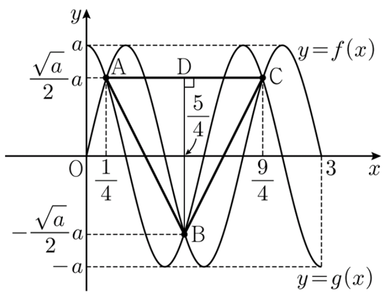
$\therefore\ x=\frac{1}{4},\ \frac{5}{4},\ \frac{9}{4}$

곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 서로 다른

세 점을 $\mathrm{A}\left(\frac{1}{4},\ \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{5}{4},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$,

$\mathrm{C}\left(\frac{9}{4},\ \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$라 하고, 점 B에서 선분 AC에 내린

수선의 발을 D라 하자.



$\overline{\mathrm{AC}}=\frac{9}{4}-\frac{1}{4}=2$

$\overline{\mathrm{BD}}=\frac{\sqrt{2}}{2}a-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)=\sqrt{2}a$

삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AC}}\cdot\overline{\mathrm{BD}}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot\sqrt{2}a=2$

따라서 $a=\sqrt{2}$이므로

$a^2=2$

30 정답 35

해설 도함수를 활용하여 문제 해결하기

직선 $y=k$가 곡선 $y=f(x)$, 직선 $y=g(x)$와 만나는 서로 다른 점의 개수의 최댓값은 각각 3, 1이므로

함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 네 점에서 만나는 경우는 직선 $y=k$와 곡선 $y=f(x)$는 서로 다른 세 점에서 만나고 직선 $y=k$와 직선 $y=g(x)$는 한 점에서 만나며 이 네 점이 모두 서로 다른 경우이다.

함수 $h(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq g(x)) \\ g(x) & (f(x)<g(x)) \end{cases}$이므로

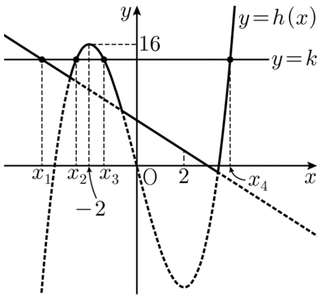
직선 $y=k$와 직선 $y=g(x)$가 만나는 점의 x좌표를 x_1이라 하면

$f(x_1)<g(x_1)$

직선 $y=k$와 곡선 $y=f(x)$가 만나는 서로 다른 세 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 x_2, x_3, x_4라 하면

$f(x_2)>g(x_2)$, $f(x_3)>g(x_3)$, $f(x_4)>g(x_4)$

이를 만족시키는 함수 $y=h(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



직선 $y=g(x)$가 점 $(2, 2)$를 지나고

$x_1<x_2$, $f(x_1)<g(x_1)=k$인 실수 x_1이 존재하므로

직선 $y=g(x)$의 기울기는 음수이다.

$y=g(x)=a(x-2)+2$에서

$a<0$ $\cdots$ ㉠

$f'(x)=3x^2-12=3(x-2)(x+2)$

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값을 갖고 $x=-2$에서 함수 $f(x)$의 함숫값은 함수 $g(x)$의 함숫값보다 크다.

$f(-2)>g(-2)$

$16>-4a+2$

$\therefore a>-\dfrac{7}{2}$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $-\dfrac{7}{2}<a<0$

따라서 $m=-\dfrac{7}{2}$, $M=0$이므로

$$10(M-m)=10\cdot\left\{0-\left(-\frac{7}{2}\right)\right\}$$
$$=35$$

31 정답 8

해설 로그함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기

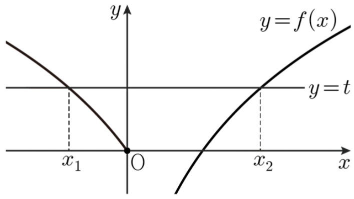
(i) $m=-10$인 경우

$f(0)=|10-10|=0$

$t>0$일 때,

방정식 $5\log_2(4-x)-10=t$의 실근을 x_1,

방정식 $5\log_2 x-10=t$의 실근을 x_2라 하자.



$5\log_2(4-x_1)-10=5\log_2 x_2-10$

$\log_2(4-x_1)=\log_2 x_2$

$4-x_1=x_2$, $x_1+x_2=4$

이때 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여

$g(t)=4$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $m<-10$인 경우

$x<0$에서 곡선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 점의 x좌표를 α라 하면

$$f(x)=\begin{cases} 5\log_2(4-x)+m & (x\leq\alpha) \\ -5\log_2(4-x)-m & (\alpha<x\leq 0) \\ 5\log_2 x+m & (x>0) \end{cases}$$

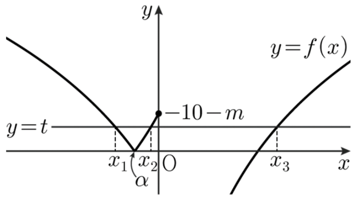
$f(0)=|10+m|=-10-m$

(a) $0<t<-10-m$일 때,

방정식 $5\log_2(4-x)+m=t$의 실근을 x_1,

방정식 $-5\log_2(4-x)-m=t$의 실근을 x_2,

방정식 $5\log_2 x+m=t$의 실근을 x_3이라 하자.



$5\log_2(4-x_1)+m=5\log_2 x_3+m$

$\log_2(4-x_1)=\log_2 x_3$

$4-x_1=x_3$, $x_1+x_3=4$

$g(t)=x_1+x_2+x_3=x_2+4<4$이고

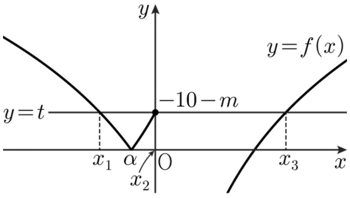
$g(t)$의 값은 일정하지 않다.

(b) $t=-10-m$일 때,

방정식 $5\log_2(4-x)+m=t$의 실근을 x_1,

방정식 $-5\log_2(4-x)-m=t$의 실근을 x_2,

방정식 $5\log_2 x+m=t$의 실근을 x_3이라 하자.



$5\log_2(4-x_1)+m=5\log_2 x_3+m$

$\log_2(4-x_1)=\log_2 x_3$, $4-x_1=x_3$

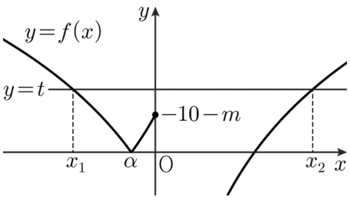
$x_1+x_3=4$, $x_2=0$이므로

$g(t)=x_1+x_2+x_3=4$

(c) $t>-10-m$일 때,

방정식 $5\log_2(4-x)+m=t$의 실근을 x_1,

방정식 $5\log_2 x+m=t$의 실근을 x_2라 하자.



$5\log_2(4-x_1)+m=5\log_2 x_2+m$

$\log_2(4-x_1)=\log_2 x_2$

$4-x_1=x_2$, $x_1+x_2=4$

$g(t)=x_1+x_2=4$

(a), (b), (c)에 의하여

$t\ge -10-m$인 모든 실수 t에 대하여

$g(t)=4$

(i), (ii)에 의하여 $t\ge a$인 모든 실수 t에 대하여

$g(t)=g(a)$가 되도록 하는 a의 최솟값은

$-10-m$이다.

따라서 $-10-m=2$이므로

$m=-12$

$\therefore f(m)=f(-12)$

$=|5\log_2(4+12)-12|$

$=8$

32 정답 ③

해설 함수가 연속일 조건을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

함수 $f(x)$는 $x=0$에서만 불연속이므로

함수 $(f(x)+a)^2$이 $x=0$에서 연속이 되도록 a의 값을 정한다.

$$\lim_{x\to 0-}(f(x)+a)^2=(f(0)+a)^2$$

$$\lim_{x\to 0-}\left(x-\frac{1}{2}+a\right)^2=(3+a)^2$$

$$\left(-\frac{1}{2}+a\right)^2=(3+a)^2$$

$$a^2-a+\frac{1}{4}=a^2+6a+9,\ 7a=-\frac{35}{4}$$

$$\therefore\ a=-\frac{5}{4}$$

33 정답 ⑤

해설 사인법칙, 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$라 하고,
삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하자.
삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 9π이므로
$\pi R^2=9\pi$, 즉 $R=3$
삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$
조건 (가)에서 $3\sin A=2\sin B$이므로
$$3\cdot\frac{a}{2R}=2\cdot\frac{b}{2R}$$
$$b=\frac{3}{2}a \quad \cdots ㉠$$
조건 (나)에서 $\cos B=\cos C$이므로
$$b=c \quad \cdots ㉡$$
㉠, ㉡에서 양수 k에 대하여 $a=2k$라 하면
$b=c=3k$
삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여
$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$
$$=\frac{(3k)^2+(3k)^2-(2k)^2}{2\cdot 3k\cdot 3k}=\frac{7}{9}$$
$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$$
$$=\sqrt{1-\left(\frac{7}{9}\right)^2}=\frac{4}{9}\sqrt{2}$$
$\frac{a}{\sin A}=2R=2\cdot 3=6$에서
$$a=6\sin A=6\cdot\frac{4}{9}\sqrt{2}=\frac{8}{3}\sqrt{2},$$
$$b=c=\frac{3}{2}a=\frac{3}{2}\cdot\frac{8}{3}\sqrt{2}=4\sqrt{2}$$
따라서 구하는 삼각형 ABC의 넓이는
$$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot\frac{4}{9}\sqrt{2}$$
$$=\frac{64}{9}\sqrt{2}$$

34 정답 ⑤

해설 미분계수의 정의를 이용하여 삼차함수의 그래프의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고
$f(0)=0$이므로 $f(x)=x^3+px^2+qx$ (p, q는 상수)로 놓을 수 있다.
이때 $f'(x)=3x^2+2px+q$이고 삼차함수 $f(x)$는
실수 전체의 집합에서 연속이고 미분가능하므로
$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-1}{x-a}=3$에서 $f(a)=1$이고 $f'(a)=3$이다.
한편, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의
방정식은 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$이므로
$y=3(x-a)+1$, 즉 $y=3x-3a+1$이다.
이 접선의 y절편이 4이므로
$-3a+1=4$
$\therefore a=-1$
따라서 $f(-1)=1$, $f'(-1)=3$이므로
$f(-1)=-1+p-q=1$에서
$$p-q=2 \quad \cdots ㉠$$
$f'(-1)=3-2p+q=3$에서
$$2p-q=0 \quad \cdots ㉡$$
㉠, ㉡을 연립하면
$p=-2$, $q=-4$
$\therefore f(x)=x^3-2x^2-4x$
$\therefore f(1)=1-2-4=-5$

35 정답 ③

해설 지수함수의 그래프를 이용하여 조건을 만족시키는 사각형의 넓이를 구할 수 있는가?

두 점 A, B의 x좌표를 a라 하면

$\mathrm{A}(a,\ 1-2^{-a})$, $\mathrm{B}(a,\ 2^{a})$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=2^{a}-(1-2^{-a})=2^{a}+2^{-a}-1$

또, 두 점 C, D의 x좌표를 c라 하면

$\mathrm{C}(c,\ 2^{c})$, $\mathrm{D}(c,\ 1-2^{-c})$이므로

$\overline{\mathrm{CD}}=2^{c}-(1-2^{-c})=2^{c}+2^{-c}-1$

이때 두 점 A, C의 y좌표가 같으므로

$2^{c}=1-2^{-a}$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{CD}}=(1-2^{-a})+\frac{1}{1-2^{-a}}-1$$

$$=-2^{-a}+\frac{2^{a}}{2^{a}-1}$$

주어진 조건에 의하여 $\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{CD}}$이므로

$$2^{a}+2^{-a}-1=-2^{-a+1}+\frac{2^{a+1}}{2^{a}-1}$$

이때 $2^{a}=t$라 하면

$$t+\frac{1}{t}-1=-\frac{2}{t}+\frac{2t}{t-1}$$

양변에 $t(t-1)$을 곱하여 정리하면

$t^{3}-4t^{2}+4t-3=0$, $(t-3)(t^{2}-t+1)=0$

이때 t는 실수이므로

$t=3$

즉, $2^{a}=3$이므로

$a=\log_{2}3$

이때 $2^{c}=1-2^{-a}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$이므로

$$c=\log_{2}\frac{2}{3}=1-\log_{2}3$$

따라서 조건을 만족시키는 사각형 ABCD의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot(a-c)\cdot(2^{a}-1+2^{-c})$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(2\log_{2}3-1)\cdot\left(3-1+\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{7}{4}(2\log_{2}3-1)$$

$$=\frac{7}{2}\log_{2}3-\frac{7}{4}$$

36 정답 ③

해설 정적분을 이용하여 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

$f(x)=\frac{1}{4}x^{3}+\frac{1}{2}x$, $g(x)=mx+2$라 하고

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표를 α라 하면

$$A=\int_{0}^{\alpha}\{g(x)-f(x)\}dx$$

$$B=\int_{\alpha}^{2}\{f(x)-g(x)\}dx$$

$\therefore\ B-A$

$$=\int_{\alpha}^{2}\{f(x)-g(x)\}dx-\int_{0}^{\alpha}\{g(x)-f(x)\}dx$$

$$=\int_{\alpha}^{2}\{f(x)-g(x)\}dx+\int_{0}^{\alpha}\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$=\int_{0}^{2}\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$=\int_{0}^{2}\left\{\left(\frac{1}{4}x^{3}+\frac{1}{2}x\right)-(mx+2)\right\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{16}x^{4}+\frac{1}{4}x^{2}-\frac{m}{2}x^{2}-2x\right]_{0}^{2}$$

$$=1+1-2m-4$$

$$=-2m-2=\frac{2}{3}$$

$$\therefore\ m=-\frac{4}{3}$$

37 정답 ④

해설 로그의 성질 및 로그부등식을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합을 구할 수 있는가?

$\log_{2}\sqrt{-n^{2}+10n+75}$ 에서

진수 조건에 의하여

$\sqrt{-n^{2}+10n+75}>0$, 즉 $-n^{2}+10n+75>0$에서

$n^{2}-10n-75<0$, $(n+5)(n-15)<0$

$\therefore\ -5<n<15$

이때 n이 자연수이므로

$1\le n<15$ $\cdots$ ㉠

또, $\log_{4}(75-kn)$에서 진수 조건에 의하여

$75-kn>0$, 즉 $n<\frac{75}{k}$ $\cdots$ ㉡

한편, $\log_{2}\sqrt{-n^{2}+10n+75}-\log_{4}(75-kn)$의 값이 양수이므로

$\log_2\sqrt{-n^2+10n+75}-\log_4(75-kn)>0$

$\log_4(-n^2+10n+75)-\log_4(75-kn)>0$

$\log_4(-n^2+10n+75)>\log_4(75-kn)$

이때 밑 4가 1보다 크므로

$-n^2+10n+75>75-kn$

$n(n-10-k)<0$

k가 자연수이므로

$0<n<10+k$ $\cdots$ ㉢

주어진 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수가 12이므로

㉠, ㉢에서 $10+k>12$이어야 한다.

즉, $k>2$이어야 하므로

(ⅰ) $k=3$일 때,

㉠, ㉡, ㉢에서 $1\le n<13$

따라서 자연수 n의 개수가 12이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(ⅱ) $k=4$일 때,

㉠, ㉡, ㉢에서 $1\le n<14$

따라서 자연수 n의 개수가 13이므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

(ⅲ) $k=5$일 때,

㉠, ㉡, ㉢에서 $1\le n<15$

따라서 자연수 n의 개수가 14이므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

(ⅳ) $k=6$일 때,

㉠, ㉡, ㉢에서 $1\le n<\frac{25}{2}$

따라서 자연수 n의 개수가 12이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(ⅴ) $k\ge 7$일 때,

$\frac{75}{k}<11$이므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

(ⅰ)~(ⅴ)에서

$k=3$ 또는 $k=6$

따라서 모든 자연수 k의 값의 합은

$3+6=9$

38 정답 16

해설 속도와 거리의 관계와 정적분을 이용하여 점 P의 위치를 구할 수 있는가?

점 P의 운동 방향이 바뀌는 시각에서 $v(t)=0$이다.

$0\le t\le 3$일 때, $-t^2+t+2=0$에서

$(t-2)(t+1)=0$

이때 $t>0$이므로

$t=2$

$t>3$일 때, $k(t-3)-4=0$에서

$kt=3k+4$

$t=3+\frac{4}{k}$

따라서 출발 후 점 P의 운동 방향이 두 번째로 바뀌는 시각은

$t=3+\frac{4}{k}$

이때 원점을 출발한 점 P의 시각 $t=3+\frac{4}{k}$에서의 위치가 1이므로

$\int_0^{3+\frac{4}{k}}v(t)dt=1$에서

$$\int_0^3 v(t)dt+\int_3^{3+\frac{4}{k}}v(t)dt$$

$$=\int_0^3(-t^2+t+2)dt+\int_3^{3+\frac{4}{k}}(kt-3k-4)dt$$

이때 두 식을 각각 풀어서 정리하면

$$\int_0^3(-t^2+t+2)dt=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2+2t\right]_0^3$$

$$=-9+\frac{9}{2}+6=\frac{3}{2} \quad \cdots ㉠$$

$$\int_3^{3+\frac{4}{k}}(kt-3k-4)dt=\left[\frac{1}{2}kt^2-(3k+4)t\right]_3^{3+\frac{4}{k}}$$

$$=-\frac{8}{k} \quad \cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$\int_0^3 v(t)dt+\int_3^{3+\frac{4}{k}}v(t)dt=\frac{3}{2}+\left(-\frac{8}{k}\right)=1$$

따라서 $\frac{8}{k}=\frac{1}{2}$에서

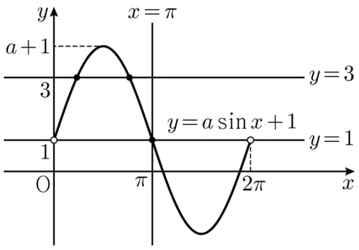
$k=16$

39 정답 24

해설 삼각함수의 그래프를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는

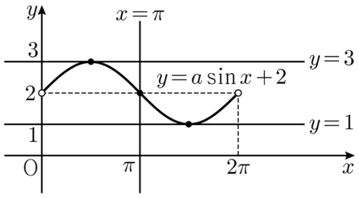
두 자연수의 합의 최댓값과 최솟값의 곱을 구할 수 있는가?

(ⅰ) $b=1$인 경우



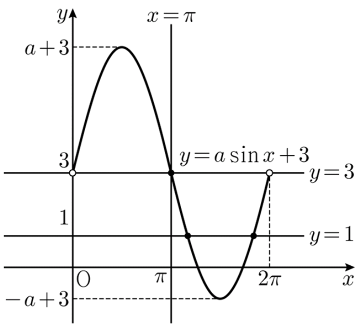
$n(A\cup B\cup C)=3$을 만족시키려면
$a+1>3$, 즉 $a>2$이어야 하므로
5 이하의 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(3,\ 1)$, $(4,\ 1)$, $(5,\ 1)$이다.

(ⅱ) $b=2$인 경우



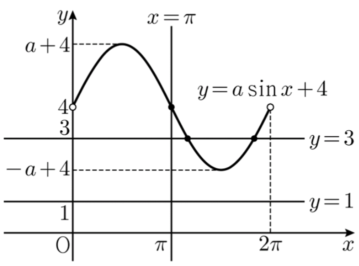
$n(A\cup B\cup C)=3$을 만족시키려면 $a=1$이어야 하므로 5 이하의 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(1,\ 2)$이다.

(ⅲ) $b=3$인 경우



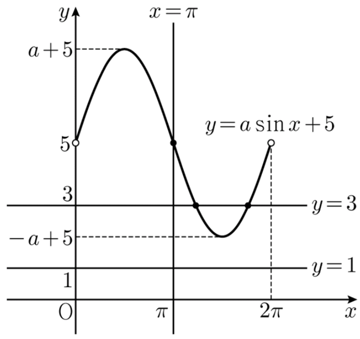
$n(A\cup B\cup C)=3$을 만족시키려면
$-a+3<1$, 즉 $a>2$이어야 하므로
5 이하의 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(3,\ 3)$, $(4,\ 3)$, $(5,\ 3)$이다.

(ⅳ) $b=4$인 경우



$n(A\cup B\cup C)=3$을 만족시키려면
$1<-a+4<3$, 즉 $1<a<3$이어야 하므로
5 이하의 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(2,\ 4)$이다.

(ⅴ) $b=5$인 경우



$n(A\cup B\cup C)=3$을 만족시키려면
$1<-a+5<3$, 즉 $2<a<4$이어야 하므로
5 이하의 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(3,\ 5)$이다.

따라서 $a+b$의 최댓값과 최솟값은 각각
$M=8$, $m=3$이므로
$Mm=24$

40 정답 15

해설 다항함수의 미분을 활용하여 함수의 그래프에 대한 문제를 해결할 수 있는가?

조건 (나)에서 방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수가 3 이상인 실수 k의 값이 존재하므로
삼차방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.
삼차방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 세 실근을 각각
α, β, γ $(\alpha<\beta<\gamma)$라 하면 부등식 $f'(x)\le 0$의 해가
$x\le\alpha$ 또는 $\beta\le x\le\gamma$이므로 조건 (가)에 의하여
$\gamma=2$

이때 $f'(1)=0$, $f'(2)=0$에서 $b\ne 1$, $b<2$인 상수 b에 대하여

$$f'(x)=4(x-1)(x-2)(x-b)$$
$$=4x^3-4(b+3)x^2+4(3b+2)x-8b$$

라 하면

$$f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=x^4-\frac{4}{3}(b+3)x^3+2(3b+2)x^2-8bx+C$$

(단, C는 상수)

이때 $f(0)=0$에서 $C=0$이므로

$$f(x)=x^4-\frac{4}{3}(b+3)x^3+2(3b+2)x^2-8bx \cdots ㉠$$

이때 조건 (나)를 만족시키는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) $b<1$이고 $f(b)<f(2)$인 경우

조건 (나)에 의하여 $f(2)=\frac{8}{3}$ 이어야 하므로 ㉠에서

$$f(2)=16-\frac{32}{3}(b+3)+8(3b+2)-16b$$

$$=-\frac{8}{3}b=\frac{8}{3}$$

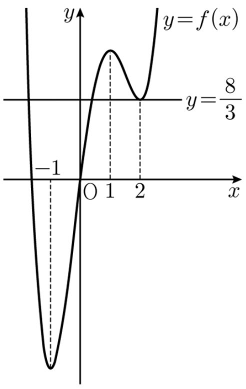
$\therefore\ b=-1$

$f(x)=x^4-\frac{8}{3}x^3-2x^2+8x$에서

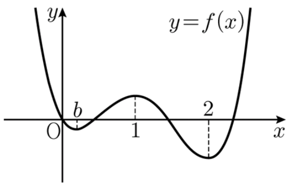
$f(-1)=1+\frac{8}{3}-2-8=-\frac{19}{3}<\frac{8}{3}$ 이므로

조건을 만족시킨다.

$\therefore\ f(3)=81-72-18+24=15$

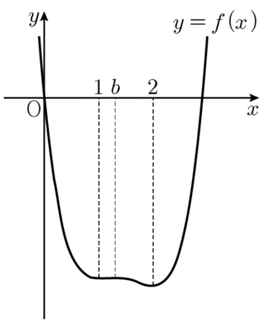


(ii) $b<1$이고 $f(2)<f(b)$인 경우



함수 $f(x)$는 $x=b$에서 극소이고 $f(0)=0$이므로
$f(b)\leq 0$이다.
따라서 방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수가
3 이상이 되도록 하는 실수 k의 최솟값은
0 또는 음수이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(iii) $1<b<2$인 경우



함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이고 $f(0)=0$이므로
$f(1)<0$이다.
따라서 방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수가
3 이상이 되도록 하는 실수 k의 최솟값은 음수이므로
조건 (나)를 만족시키지 않는다.

즉, (i), (ii), (iii)에서
$f(3)=15$

41 정답 231

해설 수열의 귀납적 정의를 이용하여 수열의 첫째항의 값을 구할 수 있는가?

15 이하의 자연수 n에 대하여 $n\neq 4$, $n\neq 9$이면
$a_{n+1}=a_n+1$이므로
$a_n=a_{n+1}-1$
따라서 $a_{15}=1$에서 $a_{14}=a_{15}-1=0$,
$a_{13}=a_{14}-1=-1$, $a_{12}=a_{13}-1=-2$,
$a_{11}=a_{12}-1=-3$, $a_{10}=a_{11}-1=-4$

(i) $a_9>0$일 때

$a_9-\sqrt{9}\cdot a_{\sqrt{9}}=a_{10}=-4$
따라서 $a_9=3a_3-4$에서
$a_5=3a_3-8$

(i−a) $a_4>0$일 때

$a_5=a_4-\sqrt{4}\cdot a_{\sqrt{4}}$이므로
$a_4-2a_2=3a_3-8$, 즉
$a_4=3a_3+2a_2-8$
따라서 $a_4=a_3+1$에서 $a_3=a_4-1$이므로
$a_3=3a_3+2a_2-9$

$\therefore\ a_3+a_2=\frac{9}{2}$

$a_3=a_2+1$이므로

$a_2=\frac{7}{4}$, $a_3=\frac{11}{4}$

$a_9=\frac{33}{4}-4>0$,

$a_4=\frac{33}{4}+\frac{14}{4}-8>0$

$\therefore\ a_1=-a_2=-\frac{7}{4}$

(i−b) $a_4\leq 0$일 때

$a_4+1=a_5=3a_3-8$
따라서 $a_4=3a_3-9$에서
$a_3=a_4-1=3a_3-9-1$
$a_3=3a_3-10$
$\therefore\ a_3=5$
이때 $a_3=5$이면 $a_4=6>0$이므로

모순이다.

(ii) $a_9 \le 0$일 때

$a_9 = a_{10} - 1 = -5$에서 $a_5 = -9$

(ii$-a$) $a_4 > 0$일 때

$a_5 = a_4 - \sqrt{4} \cdot a_{\sqrt{4}} = a_4 - 2a_2$

즉, $a_4 = a_5 + 2a_2$이므로 $a_4 = 2a_2 - 9$

또, $a_3 = a_4 - 1 = 2a_2 - 9 - 1 = 2a_2 - 10$

그런데 $a_3 = a_2 + 1$이므로

$a_2 + 1 = 2a_2 - 10$

$a_2 = 11$

$a_4 = 2 \cdot 11 - 9 > 0$

$\therefore a_1 = -a_2 = -11$

(ii$-b$) $a_4 \le 0$일 때

$a_5 = a_4 + 1 = -9$

따라서 $a_4 = -10$에서

$a_3 = -11,\ a_2 = -12$

$\therefore a_1 = -a_2 = 12$

(i), (ii)에서 모든 a_1의 곱은

$-\frac{7}{4} \cdot (-11) \cdot 12 = 231$

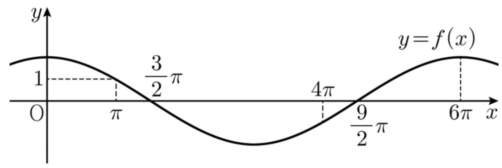
42 정답 ⑤

해설 삼각함수의 뜻과 그래프 이해하기

함수 $f(x) = a\cos bx$의 주기는 $\frac{2\pi}{|b|} = 6\pi$이므로

$b = \frac{1}{3}$, 즉 $f(x) = a\cos\frac{x}{3}$

함수 $y = f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



닫힌구간 $[\pi, 4\pi]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$f(\pi) = a\cos\frac{\pi}{3} = \frac{a}{2} = 1$이므로

$a = 2$

$\therefore a + b = \frac{7}{3}$

43 정답 ①

해설 등비수열을 활용하여 문제해결하기

$a_{n+1} = 1 - 4S_n$에서 $S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}a_{n+1}$

$n = 1$일 때, $a_1 = S_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}a_2$ $\cdots$ ㉠

$n \ge 2$일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}a_{n+1}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}a_n\right) \\ &= -\frac{1}{4}a_{n+1} + \frac{1}{4}a_n \end{aligned}$$

$\therefore a_{n+1} = -3a_n\ (n \ge 2)$

즉, 수열 $\{a_{n+1}\}$은 첫째항이 a_2이고 공비가 -3인 등비수열이다.

$a_4 = a_2 \cdot (-3)^2 = 4$에서 $a_2 = \frac{4}{9}$ $\cdots$ ㉡

$$\begin{aligned} a_6 &= a_4 \cdot (-3)^2 \\ &= 4 \cdot 9 = 36 \end{aligned}$$

㉠, ㉡에서 $a_1 = \frac{5}{36}$

$\therefore a_1 \cdot a_6 = \frac{5}{36} \cdot 36 = 5$

44 정답 ⑤

해설 정적분을 활용하여 문제해결하기

시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^2 |v_1(t)|dt=\int_0^2 |3t^2+1|dt$$
$$=\left[t^3+t\right]_0^2=10$$

시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 Q가 움직인 거리는

$$\int_0^2 |v_2(t)|dt=\int_0^2 |mt-4|dt$$

(ⅰ) $m\le 2$일 때,

$$\int_0^2 |mt-4|dt=\int_0^2 (-mt+4)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{2}mt^2+4t\right]_0^2$$
$$=-2m+8$$

따라서 $-2m+8=10$이므로

$m=-1$

(ⅱ) $m>2$일 때,

$$\int_0^2 |mt-4|dt$$
$$=\int_0^{\frac{4}{m}} |mt-4|dt+\int_{\frac{4}{m}}^2 |mt-4|dt$$
$$=\int_0^{\frac{4}{m}} (-mt+4)dt+\int_{\frac{4}{m}}^2 (mt-4)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{2}mt^2+4t\right]_0^{\frac{4}{m}}+\left[\frac{1}{2}mt^2-4t\right]_{\frac{4}{m}}^2$$
$$=2m-8+\frac{16}{m}$$

따라서 $2m-8+\dfrac{16}{m}=10$에서

$m^2-9m+8=0$, $(m-1)(m-8)=0$

이때 $m>2$이므로

$m=8$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 모든 m의 값의 합은

$-1+8=7$

45 정답 ①

해설 등비수열을 이용하여 추론하기

두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차를 각각 d, d'이라 하자.

조건 (나)에 의하여

$$a_{m+1}-b_{m+1}=(a_m+d)-(b_m+d')$$
$$=d-d'<0$$
$$a_m-b_m=\{a_1+(m-1)d\}-\{b_1+(m-1)d'\}$$
$$=(a_1-b_1)+(m-1)(d-d')=0$$

이때 $a_1-b_1=(m-1)(d'-d)$이고,

$m-1>0$, $d'-d>0$이므로

$a_1-b_1>0$

따라서 조건 (가)에서 $a_1-b_1=5$

$(m-1)(d'-d)=5$

$m-1$, $d'-d$가 모두 자연수이고 $m\ge 3$이므로

$m=6$

$$\therefore \sum_{k=1}^{m} b_k=\sum_{k=1}^{6} b_k$$
$$=\frac{6(b_1+b_6)}{2}$$
$$=\frac{6\{(a_1-5)+a_6\}}{2}$$
$$=\frac{6(a_1+a_6)}{2}-15$$
$$=\sum_{k=1}^{6} a_k-15$$
$$=9-15=-6$$

46 정답 ⑤

해설 정적분을 활용하여 문제해결하기

두 점 A, B의 좌표를 각각

$\left(a,\ \frac{a}{2}\right)$, $\left(b,\ \frac{b}{2}\right)$ $(0<a<b)$라 하자.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{1}{2}x$가 원점 O에서 접하고 두 점 A, B에서 만나므로

$$f(x)-\frac{1}{2}x=x^2(x-a)(x-b)$$
$$=x^4-(a+b)x^3+abx^2$$

S_1-S_2

$$=\int_0^a\left|f(x)-\frac{1}{2}x\right|dx-\int_a^b\left|f(x)-\frac{1}{2}x\right|dx$$
$$=\int_0^a\left\{f(x)-\frac{1}{2}x\right\}dx+\int_a^b\left\{f(x)-\frac{1}{2}x\right\}dx$$
$$=\int_0^b\left\{f(x)-\frac{1}{2}x\right\}dx$$
$$=\int_0^b\{x^4-(a+b)x^3+abx^2\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{a+b}{4}x^4+\frac{ab}{3}x^3\right]_0^b$$
$$=-\frac{b^5}{20}+\frac{ab^4}{12}=0$$

$\therefore\ 5a-3b=0$

$$\overline{AB}=\sqrt{(b-a)^2+\left(\frac{b}{2}-\frac{a}{2}\right)^2}$$
$$=\frac{\sqrt{5}}{2}(b-a)=\sqrt{5}$$

따라서 $b-a=2$이므로 $5a-3b=0$과 연립하여 풀면

$a=3,\ b=5$

즉, $f(x)=x^4-8x^3+15x^2+\frac{1}{2}x$이므로

$$f(1)=\frac{17}{2}$$

47 정답 ①

해설 지수함수의 그래프를 이용하여 추론하기

두 함수 $f_1(x)$, $f_2(x)$를

$f_1(x)=2^{x+3}+b$, $f_2(x)=2^{-x+5}+3b$라 하자.

함수 $y=f_1(x)$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하고,

함수 $y=f_2(x)$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

또한, 두 함수 $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$의 점근선이 각각

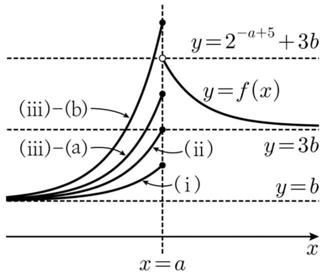
$y=b$, $y=3b$이므로

$\{f_1(x)\mid x\le a\}=\{y\mid b<y\le 2^{a+3}+b\}$,

$\{f_2(x)\mid x>a\}=\{y\mid 3b<y<2^{-a+5}+3b\}$

$2^{a+3}+b$와 $3b$, $2^{-a+5}+3b$의 대소 관계에 따라

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



(i) $2^{a+3}+b<3b$일 때,

$2^{a+3}+b<t<3b$인 모든 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$는 만나지 않으므로 조건을 만족시키는 실수 k의 최댓값은 $4b+8$이 아니다.

(ii) $2^{a+3}+b=3b$일 때,

$b<t<2^{-a+5}+3b$인 모든 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수는 1이다.

또한, $t\ge 2^{-a+5}+3b$인 모든 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$는 만나지 않는다.

(iii) $2^{a+3}+b>3b$일 때,

(a) $2^{a+3}+b\le 2^{-a+5}+3b$일 때

$3b<t<2^{a+3}+b$인 모든 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수는 2이므로 조건을 만족시키는 실수 k의 최댓값은 $4b+8$이 아니다.

(b) $2^{a+3}+b>2^{-a+5}+3b$일 때

$3b<t<2^{-a+5}+3b$인 모든 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수는 2이므로 조건을 만족시키는 실수 k의 최댓값은 $4b+8$이 아니다.

조건을 만족시키는 실수 k의 최댓값은 $4b+8$이므로

(i), (ii), (iii)에 의하여

$2^{a+3}+b=3b$, $2^{-a+5}+3b=4b+8$이다.

두 식을 연립하여 계산하면

$2^a-2^{-a+3}+2=0$

$(2^a)^2+2\cdot 2^a-8=0$

$(2^a+4)(2^a-2)=0$

$2^a>0$이므로

$2^a=2$

따라서 $a=1$, $b=8$이므로
$a+b=9$

48 정답 ④

해설 수열의 귀납적 정의를 이용하여 추론하기

a_n이 자연수라 하자.

자연수 k에 대하여

$a_n=3k-2$이면

$$a_{n+1}=\frac{(3k-2)^2+5}{3}=\frac{9k^2-12k+9}{3}=3k^2-4k+3$$

$a_n=3k-1$이면

$$a_{n+1}=\frac{(3k-1)^2+5}{3}=\frac{9k^2-6k+6}{3}=3k^2-2k+2$$

$a_n=3k$이면

$$a_{n+1}=\frac{3k}{3}=k$$

따라서 a_n이 자연수이면 a_{n+1}도 자연수이다.

a_1이 자연수이므로 모든 자연수 n에 대하여 a_n은 자연수이다. $\cdots$ ㉠

a_4가 3의 배수이면 $a_5=\dfrac{a_4}{3}$이므로

$a_4+a_5=5$에서 $a_4+\dfrac{a_4}{3}=5$, $a_4=\dfrac{15}{4}$가 되어 ㉠을 만족시키지 않는다.

따라서 a_4는 3의 배수가 아니다.

$a_5=\dfrac{{a_4}^2+5}{3}$이므로 $a_4+a_5=5$에서

$$a_4+\frac{{a_4}^2+5}{3}=5$$

${a_4}^2+3a_4-10=0$, $(a_4+5)(a_4-2)=0$

㉠에 의하여 $a_4=2$

(i) a_3이 3의 배수인 경우

$a_4=\dfrac{a_3}{3}=2$이므로 $a_3=6$

a_2의 값을 구하면

(a) a_2가 3의 배수인 경우

$a_3=\dfrac{a_2}{3}=6$이므로 $a_2=18$

(b) a_2가 3의 배수가 아닌 경우

$a_3=\dfrac{{a_2}^2+5}{3}=6$이므로 ${a_2}^2=13$이 되어 ㉠을 만족시키지 않는다.

$\therefore a_2=18$

a_1의 값을 구하면

(a) a_1이 3의 배수인 경우

$a_2=\dfrac{a_1}{3}=18$이므로 $a_1=54$

(b) a_1이 3의 배수가 아닌 경우

$a_2=\dfrac{{a_1}^2+5}{3}=18$이므로 ${a_1}^2=49$

㉠에 의하여 $a_1=7$

(ii) a_3이 3의 배수가 아닌 경우

$a_4=\dfrac{{a_3}^2+5}{3}=2$이므로 ${a_3}^2=1$

㉠에 의하여 $a_3=1$

a_2의 값을 구하면

(a) a_2가 3의 배수인 경우

$a_3=\dfrac{a_2}{3}=1$이므로 $a_2=3$

(b) a_2가 3의 배수가 아닌 경우

$a_3=\dfrac{{a_2}^2+5}{3}=1$이므로 ${a_2}^2=-2$가 되어 ㉠을 만족시키지 않는다.

$\therefore a_2=3$

a_1의 값을 구하면

(a) a_1이 3의 배수인 경우

$a_2=\dfrac{a_1}{3}=3$이므로 $a_1=9$

(b) a_1이 3의 배수가 아닌 경우

$a_2=\dfrac{{a_1}^2+5}{3}=3$이므로 ${a_1}^2=4$

㉠에 의하여 $a_1=2$

(i), (ii)에 의하여 모든 a_1의 값의 합은

$54+7+9+2=72$

49 정답 16

해설 정적분의 성질 이해하기

$f(x)=3x^2+ax+b$라 하자.

$\int_0^x f(t)dt=2x^3+\int_0^{-x}f(t)dt$에서

$$2x^3=-\int_0^{-x}f(t)dt+\int_0^x f(t)dt$$
$$=\int_{-x}^0 f(t)dt+\int_0^x f(t)dt$$
$$=\int_{-x}^x f(t)dt$$
$$=\left[t^3+\frac{a}{2}t^2+bt\right]_{-x}^x$$
$$=2x^3+2bx$$

모든 실수 x에 대하여 $2x^3=2x^3+2bx$이므로

$b=0$

또, $f(1)=3+a+b=5$에서

$a=2$

따라서 $f(2)=12+2a+b$에서

$f(2)=16$

50 정답 11

해설 거듭제곱근의 정의 이해하기

집합 X의 원소 중 양수의 개수를 p, 음수의 개수를 q라 하자.

$0\not\in X$이면 $n(A)=2p$이므로 $n(A)=9$를 만족시키지 않는다.

$\therefore\ 0\in X$

$n(A)=2p+1=9$에서 $p=4$

$n(B)=p+q+1=7$에서 $q=2$

따라서 집합 X의 모든 원소의 합은

$X=\{-2,\ -1,\ 0,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$일 때 최대이고, 그 값은

$-2+(-1)+0+2+3+4+5=11$

51 정답 25

해설 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

$$xf(x)=\left(-\frac{1}{2}x+3\right)g(x)-x^3+2x^2 \quad \cdots ㉠$$

㉠에 $x=0$을 대입하면 $g(0)=0$

㉠에 $x=2$를 대입하면 $f(2)=g(2)$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x-1)}{f(x)-g(x)}$의 값이 0이 아닌 실수이고

$\lim\limits_{x\to 2}\{f(x)-g(x)\}=f(2)-g(2)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to 2}g(x-1)=g(1)=0$

$g(0)=g(1)=0$이므로 함수 $g(x)$는 상수함수이거나 차수가 2 이상이다.

함수 $g(x)$가 상수함수이면 $g(x)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\{f(x)\}^2}{g(x)}$의 값이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $g(x)$의 차수는 2 이상이다.

또한, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\{f(x)\}^2}{g(x)}$의 값이 0이 아닌 실수이므로

함수 $\{f(x)\}^2$의 차수는 함수 $g(x)$의 차수와 같다.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 차수를 각각 n, $2n$이라 하자.

(ⅰ) $n=1$일 때

함수 $g(x)$의 차수가 2이고 $g(0)=g(1)=0$이므로

$g(x)=ax(x-1)$ $(a\neq 0)$

㉠에서 양변의 x^3의 계수가 같아야 하므로

$$0=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot a-1,\ a=-2$$

$\therefore\ g(x)=-2x^2+2x$

또한, ㉠에서

$$xf(x)=\left(-\frac{1}{2}x+3\right)\cdot(-2x^2+2x)-x^3+2x^2$$
$$=-5x^2+6x$$

$\therefore\ f(x)=-5x+6$

이때

$$\lim_{x\to 2}\frac{g(x-1)}{f(x)-g(x)}=\lim_{x\to 2}\frac{-2(x-1)(x-2)}{(2x-3)(x-2)}$$
$$=-2$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{(-5x+6)^2}{-2x^2+2x}=-\frac{25}{2}$$

$$\therefore\ k=(-2)\cdot\left(-\frac{25}{2}\right)=25$$

(ⅱ) $n\geq 2$일 때

㉠의 좌변과 우변의 차수가 각각 $n+1$, $2n+1$이고,

$n+1\neq 2n+1$이므로 ㉠이 성립하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 k의 값은 25이다.

52 정답 ③

해설 로그의 성질을 이해하여 상수의 값을 구한다.

두 점 $(0,\ 0)$, $(\log_2 9,\ k)$를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{k-0}{\log_2 9-0}=\frac{k}{2\log_2 3}$$

직선 $(\log_4 3)x+(\log_9 8)y-2=0$의 기울기는

$$-\frac{\log_4 3}{\log_9 8}=-\frac{\frac{1}{2}\log_2 3}{\frac{3}{2}\log_3 2}=-\frac{\log_2 3}{3\log_3 2}$$

두 직선이 서로 수직이므로

$$\frac{k}{2\log_2 3}\cdot\left(-\frac{\log_2 3}{3\log_3 2}\right)=-1$$

$k=6\log_3 2$

$$\therefore\ 3^k=3^{6\log_3 2}=3^{\log_3 2^6}=2^6=64$$

53 정답 ④

해설 속도와 위치의 관계를 이해하여 점이 움직인 거리를 구한다.

시각 $t\ (t\geq 0)$에서 두 점 P, Q의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$라 하면

$x_1(t)=t^3-3t^2-2t$, $x_2(t)=-t^2+6t$

$$x_1(t)-x_2(t)=t^3-2t^2-8t=t(t+2)(t-4)=0$$

에서 두 점 P, Q가 다시 만날 때의 시각은 $t=4$이다.

점 Q가 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 움직인 거리는

$$\int_0^4|v_2(t)|dt=\int_0^4|-2t+6|dt$$
$$=\int_0^3|-2t+6|dt+\int_3^4|-2t+6|dt$$
$$=\int_0^3(-2t+6)dt+\int_3^4(2t-6)dt$$
$$=\Big[-t^2+6t\Big]_0^3+\Big[t^2-6t\Big]_3^4$$
$$=9+1$$
$$=10$$

54 정답 ②

해설 등차수열을 이해하여 등차수열의 합을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d\ (d<0)$이라 하자.

a_6, d가 모두 정수이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 정수이다.

(ⅰ) $a_5=-1$일 때

$d=-2-a_5=-1$이므로 $a_n=-n+4$

$\sum_{k=1}^{8}a_k=-4$, $\sum_{k=1}^{8}|a_k|=16$이므로

$$\sum_{k=1}^{8}|a_k|=\sum_{k=1}^{8}a_k+42 \qquad \cdots ㉠$$

이 성립하지 않는다.

(ⅱ) a_5는 음이 아닌 정수일 때

$n\leq 5$일 때 $a_n\geq 0$이고 $|a_n|=a_n$

$n\geq 6$일 때 $a_n<0$이고 $|a_n|=-a_n$

㉠에서 $-a_6-a_7-a_8=a_6+a_7+a_8+42$

$a_6+a_7+a_8=-21$

$a_6+(a_6+d)+(a_6+2d)=-21$

$a_6+d=-7$

$a_6=-2$이므로 $d=-5$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $d=-5$이고

$a_1=a_6-5d=-2+25=23$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{8}a_k=\frac{8\cdot\{2\cdot 23+7\cdot(-5)\}}{2}=44$$

55 정답 ⑤

해설 정적분의 성질을 이용하여 극댓값을 구하는 문제를 해결한다.

$g(x)=\int_{-4}^{x} f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x)$이므로

$$g'(x)=\begin{cases} 3x^2+3x+a & (x<0) \\ 3x+a & (x\geq 0) \end{cases}$$

함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 가지므로

$g'(2)=6+a=0$에서 $a=-6$

$$g'(x)=\begin{cases} 3(x+2)(x-1) & (x<0) \\ 3(x-2) & (x\geq 0) \end{cases}$$

$g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $g(x)$의 극댓값은

$$g(-2)=\int_{-4}^{-2}(3t^2+3t-6)dt$$

$$=\left[t^3+\frac{3}{2}t^2-6t\right]_{-4}^{-2}$$

$$=26$$

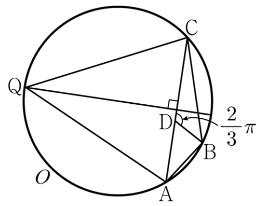
56 정답 ②

해설 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 외접원에 관한 문제를 해결한다.

점 B를 포함하지 않는 호 AC와 선분 AC의 수직이등분선의 교점을 R이라 하자.

P=R일 때, 삼각형 PAC의 넓이가 최대가 되므로

Q=R



$\cos(\angle ABC)=-\frac{5}{8}$이므로

$$\cos(\angle CQA)=\cos(\pi-\angle ABC)$$

$$=-\cos(\angle ABC)=\frac{5}{8}$$

$\overline{QA}=\overline{QC}=6\sqrt{10}$이므로

삼각형 QAC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2$$

$$=\overline{QA}^2+\overline{QC}^2-2\cdot\overline{QA}\cdot\overline{QC}\cdot\cos(\angle CQA)$$

$$=(6\sqrt{10})^2+(6\sqrt{10})^2-2\cdot 6\sqrt{10}\cdot 6\sqrt{10}\cdot\frac{5}{8}$$

$$=270$$

$\overline{AB}=a\ (a>0)$이라 하면

$2\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{BC}=2a$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2$$

$$=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\cos(\angle ABC)$$

$$=a^2+(2a)^2-2\cdot a\cdot 2a\cdot\left(-\frac{5}{8}\right)$$

$$=\frac{15}{2}a^2$$

이때 $\frac{15}{2}a^2=270$이므로

$a=6$

삼각형 CDB의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면

삼각형 CDB에서 사인법칙에 의하여

$$2R=\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle CDB)}$$

$$=\frac{2a}{\sin\frac{2}{3}\pi}$$

$$=\frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=8\sqrt{3}$$

$\therefore\ R=4\sqrt{3}$

57 정답 80

해설 접선의 방정식을 이용하여 함숫값을 구하는 문제를 해결한다.

$f(0)=2,\ f(2)=2a$

$f'(x)=3x^2-5x+a$에서

$f'(0)=a,\ f'(2)=a+2$

직선 l의 방정식은 $y=f'(0)x+f(0)$

즉, $y=ax+2$ $\cdots$ ㉠

직선 m의 방정식은 $y=f'(2)(x-2)+f(2)$

즉, $y=(a+2)x-4$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 두 직선 l, m이 만나는 점의 좌표는 $(3,\ 3a+2)$이고 이 점이 x축 위에 있으므로

$3a+2=0$

$a=-\dfrac{2}{3}$이므로 $f(2)=2\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{4}{3}$

$\therefore\ 60\cdot|f(2)|=60\cdot\left|-\dfrac{4}{3}\right|=80$

58 정답 36

해설 삼각함수의 그래프의 성질을 이용하여 방정식의 해를 구하는 문제를 해결한다.

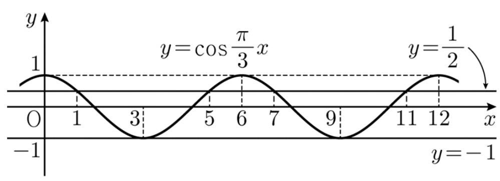
$f(g(x))=g(x)$에서 $g(x)=t\ (-1\le t\le 1)$이라 하면

$f(t)=t$에서 $2t^2+2t-1=t,\ (2t-1)(t+1)=0$

$\therefore\ t=\dfrac{1}{2}$ 또는 $t=-1$, 즉 $g(x)=\dfrac{1}{2}$ 또는 $g(x)=-1$

함수 $g(x)=\cos\dfrac{\pi}{3}x$의 주기는 6이고,

$g(1)=g(5)=\dfrac{1}{2},\ g(3)=-1$



이때 $0\le x<12$에서 $g(7)=g(11)=\dfrac{1}{2},\ g(9)=-1$

따라서 구하는 모든 실수 x의 값의 합은

$1+3+5+7+9+11=36$

59 정답 13

해설 지수함수와 로그함수의 그래프를 이용하여 상수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

선분 AB를 지름으로 하는 원의 중심을 점 $\mathrm{C}\left(k,\ \dfrac{19}{2}\right)$라 할 때, 점 C는 선분 AB의 중점이다.

두 곡선 $y=a^x+2,\ y=\log_a x+2$를 y축의 방향으로 각각 -2만큼 평행이동한 두 곡선 $y=a^x,\ y=\log_a x$가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 점 A, B를 y축의 방향으로 각각 -2만큼 평행이동한 두 점 A$'$, B$'$도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

점 C를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점 $\mathrm{C}'\left(k,\ \dfrac{15}{2}\right)$가 선분 A$'B'$의 중점이므로

점 C$'$은 직선 $y=x$ 위에 있다.

$\therefore\ k=\dfrac{15}{2}$

넓이가 $\dfrac{121}{2}\pi$인 원의 반지름의 길이는

$\overline{\mathrm{A'C'}}=\dfrac{11\sqrt{2}}{2}$이고

직선 A$'$B$'$의 기울기가 -1이므로

점 A$'$의 좌표는 $\left(\dfrac{15}{2}-\dfrac{11}{2},\ \dfrac{15}{2}+\dfrac{11}{2}\right)=(2,\ 13)$

점 $\mathrm{A}'(2,\ 13)$이 곡선 $y=a^x$ 위의 점이므로

$a^2=13$