2025 규토 N제 시리즈 보충프린트 - 20일의 기적

이것만은 제발

ver. 2025 수능대비 미적분 해설지

2025 수능대비 이것만은 제발 ver.미적분 빠른 정답

1. 수열의 극한

Theme 1 $\infty-\infty$ 꼴의 극한

1. 110

Theme 2 일반항이 포함된 수열의 극한

2. ②

Theme 3 수열의 극한의 대소 관계

3. ④

Theme 4 등비수열의 극한

4. 4
5. 3
6. 18

Theme 5 등비수열의 수렴 조건

7. 8
8. 20

Theme 6 x^n을 포함한 수열의 극한

9. 7
10. ④
11. ③
12. 65

Theme 7 수열의 극한의 활용

13. 32

Theme 8 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\lim_{n\to\infty} a_n$사이의 관계

14. ⑤
15. ③
16. ③
17. ②

Theme 9 급수의 성질

18. 26
19. 14

Theme 10 분수 꼴로 된 급수

20. 5
21. ⑤
22. 57

Theme 11 등비급수의 계산

23. ②
24. ①
25. ①

Theme 12 등비급수의 수렴조건

26. 10

2. 미분법

Theme 13 무리수 e의 정의

27. ③
28. ②

Theme 14 지수함수와 로그함수의 극한

29. ②
30. ①
31. 24
32. ①
33. ①

Theme 15 지수함수와 로그함수의 극한

34. ④
35. ②

Theme 16 삼각함수의 덧셈정리

36. ②
37. ④
38. ④
39. ⑤
40. ④
41. ④

Theme 17 함수의 몫의 미분법

42. ⑤
43. ③

Theme 18 합성함수의 미분법

44. ④
45. ①
46. ②
47. 17
48. 5

Theme 19 매개변수로 나타낸 함수의 미분법

49. ②
50. ④
51. ②
52. 126

Theme 20 음함수의 미분법

53. 4
54. ③
55. ④
56. ②
57. ③
58. 32

Theme 21 역함수의 미분법

59. 5
60. ⑤
61. ③
62. ①
63. ④

Theme 22 이계도함수

64. 10
65. 36
66. ②

Theme 23 접선의 방정식

67. ②
68. ①
69. 10

Theme 24 함수의 증가와 감소

70. ②
71. 1
72. ①

Theme 25 함수의 극대와 극소

73. ③
74. 51

Theme 26 변곡점

75. ⑤
76. 2
77. ③
78. 5
79. ㄱ, ㄴ, ㅁ, ㅇ, ㅈ

Theme 27 함수의 최대와 최소

80. ④
81. ②

Theme 28 방정식의 실근의 개수

82. ②

83. ④

84. ③

Theme 29 부등식의 활용

85. ①

Theme 30 속도와 가속도

86. 6

87. ④

3. 적분법

Theme 31 여러 가지 함수의 적분법

88. ④

89. ⑤

Theme 32 치환적분법

90. ②

91. ②

92. ①

93. ④

94. 26

Theme 33 부분적분법

95. 2

96. ④

97. ②

98. ①

99. ①

100. ③

Theme 34 정적분으로 표시된 함수의 극한

101. ⑤

Theme 35 정적분을 포함한 등식

102. ②

103. 16

104. ③

105. ④

Theme 36 정적분으로 정의된 함수 (New함수)

106. 325

107. ①

108. 75

109. 9

Theme 37 새롭게 정의된 함수의 정적분

110. ③

111. ①

Theme 38 정적분과 급수의 관계

112. ①

113. ③

114. ③

Theme 39 정적분과 급수의 관계 활용

115. ③

116. ①

117. 14

Theme 40 넓이

118. ①

119. ②

Theme 41 입체도형의 부피

120. ②

121. ④

122. ⑤

123. ③

Theme 42 속도와 거리

124. ②

125. ①

Theme 43 곡선의 길이

126. ⑤

127. 78

128. ⑤

129. ①

2025 수능대비 이것만은 제발 ver.미적분 해설지

1. 수열의 극한

Theme 1 $\infty - \infty$ 꼴의 극한

1. 110

090

$a>0$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{an^2+4n}-bn\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+4n-b^2n^2}{\sqrt{an^2+4n}+bn}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-b^2)n^2+4n}{\sqrt{an^2+4n}+bn}$$

수열 $\left\{\dfrac{(a-b^2)n^2+4n}{\sqrt{an^2+4n}+bn}\right\}$이 $\dfrac{1}{5}$으로 수렴하기 위해서는

분자의 최고차항이 n이어야 한다.

$\Rightarrow\ a-b^2=0\ \Rightarrow\ a=b^2$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{an^2+4n}+bn}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{b^2n^2+4n}+bn}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{bn+bn}=\frac{2}{b}=\frac{1}{5}$$

$\Rightarrow\ a=100,\ b=10$

따라서 $a+b=110$이다.

답 110

Theme 2 일반항이 포함된 수열의 극한

2. ②

023

첫째항과 공차가 모두 $k\ (k\neq0)$인 등차수열 $\{a_n\}$

첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n

$a_n=kn,\ S_n=\dfrac{kn(n+1)}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_na_{n+1}}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{kn\times k(n+1)}{\frac{kn(n+1)}{2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2k^2n^2}{kn^2}=2k=k^2$$

$\Rightarrow k=2\ (\because\ k\neq0)$

$a_n=2n$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{2n+2}-\sqrt{2n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{2n+2}+\sqrt{2n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{2\sqrt{2}\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

이다.

답 ②

Theme 3 수열의 극한의 대소 관계

3. ④

075

$\sqrt{9n^2+4}<\sqrt{na_n}<3n+2$

모두 양수이므로 양변에 제곱을 해도 부등호 방향은

변하지 않는다.

$9n^2+4<na_n<(3n+2)^2$

양변에 $\dfrac{1}{n^2}$를 곱하면

$$\frac{9n^2+4}{n^2}<\frac{a_n}{n}<\frac{(3n+2)^2}{n^2}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{9n^2+4}{n^2}=9,\ \lim_{n\to\infty}\frac{9n^2+12n+4}{n^2}=9$이므로

수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=9$이다.

답 ④

Theme 4 등비수열의 극한

4. 4

074

$a_n=r^{n-1},\ S_n=\dfrac{r^n-1}{r-1}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n-1}}{\frac{r^n-1}{r-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(r-1)r^{n-1}}{r^n-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{r-1}{r}\right)r^n}{r^n-1}$$

$$=\frac{r-1}{r}=\frac{3}{4}\quad\Rightarrow 4r-4=3r\ \Rightarrow\ r=4$$

답 4

5. 3

035

$a_n=2\times r^{n-1}=\frac{2}{r}\times r^n,\quad a_{n+1}=2\times r^n$

$S_n=\frac{2(r^n-1)}{r-1}=\frac{2}{r-1}\times r^n-\frac{2}{r-1}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+a_{n+1}}{S_n}=\frac{\left(\frac{2}{r}+2\right)\times r^n}{\frac{2}{r-1}\times r^n-\frac{2}{r-1}}$$

$$=\frac{\frac{2+2r}{r}}{\frac{2}{r-1}}=\frac{(2+2r)(r-1)}{2r}$$

$$=\frac{r^2-1}{r}=\frac{8}{3}\quad\Rightarrow r=3$$

따라서 $r=3$이다.

답 3

6. 18

29. 출제의도 : 등비수열의 극한을 이용하여 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(ⅰ) $1<a<3$인 경우

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{3}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+a\left(\frac{a}{3}\right)^n}{3+\left(\frac{a}{3}\right)^n}$$

$$=\frac{1+a\times 0}{3+0}=\frac{1}{3}=a$$

$a=\frac{1}{3}<1$이므로 모순이다.

(ⅱ) $a=3$인 경우

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+3^{n+1}}{3^{n+1}+3^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}1=1=a$$

이므로 모순이다.

(ⅲ) $a>3$인 경우

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{a}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{a}\right)^n+a}{3\left(\frac{3}{a}\right)^n+1}$$

$$=\frac{0+a}{3\times 0+1}=a$$

이므로 등식을 만족시킨다.

(1) $3<a<b$일 때

같은 방법으로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}$$

$$=b>3=\frac{9}{3}>\frac{9}{a}$$

이므로 등식을 만족시키지 않는다.

(2) $3<b<a$일 때

같은 방법으로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}$$

$$=\frac{1}{a}\neq\frac{9}{a}$$

이므로 등식을 만족시키지 않는다.

(3) $3<a=b$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+a^{n+1}}{a^{n+1}+a^n}=1=\frac{9}{a}$$

에서

$a=9,\ b=9$

이상에서 $a=9,\ b=9$이므로

$a+b=18$

정답 18

Theme 5 등비수열의 수렴 조건

7. 8

037

등비수열 $\{r^n\}$이 수렴하기 위한 필요충분조건은
$-1 < r \le 1$이다.

등비수열 $\left\{\left(\frac{|x-1|-3}{2}\right)^n\right\}$의 공비는 $\frac{|x-1|-3}{2}$이므로

$-1 < \frac{|x-1|-3}{2} \le 1 \Rightarrow -2 < |x-1|-3 \le 2$

$\Rightarrow 1 < |x-1| \le 5$

$1 < |x-1| \Rightarrow x-1 > 1$ or $x-1 < -1 \Rightarrow x > 2$ or $x < 0$
$|x-1| \le 5 \Rightarrow -5 \le x-1 \le 5 \Rightarrow -4 \le x \le 6$

$[x > 2$ or $x < 0] \cap -4 \le x \le 6$

$\Rightarrow -4 \le x < 0$ or $2 < x \le 6$
범위를 만족하는 정수 x는 다음과 같다.
$x = -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$

따라서 모든 정수 x의 개수는 8이다.

답 8

8. 20

038

$\frac{4^n + 2^{-n} \times x^n}{2^{2n+1} + (-5)^n}$

분모, 분자를 $(-5)^n$으로 나누면

$$\frac{\left(-\frac{4}{5}\right)^n + \left(\frac{x}{-10}\right)^n}{2 \times \left(-\frac{4}{5}\right)^n + 1}$$

수열이 수렴하기 위해서는 (참고로 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{4}{5}\right)^n = 0$이다.)

$-1 < \frac{x}{-10} \le 1 \Rightarrow -10 \le x < 10$

범위를 만족하는 정수 x는 다음과 같다.
$-10,\ -9,\ \cdots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \cdots,\ 9$

따라서 모든 정수 x의 개수는 20이다.

답 20

Theme 6 x^n을 포함한 수열의 극한

9. 7

039

[개념 확인문제 12] 해설에서 배웠듯이
바로 공비를 찾아 case분류해보자.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{k}{3}\right)^{n+1}+4}{\left(\frac{k}{3}\right)^{n-1}+1} = 4$$

공비 $\frac{k}{3}$의 범위에 따라 case분류하면 다음과 같다.

① $\left|\frac{k}{3}\right| < 1 \Rightarrow -3 < k < 3$일 때

극한값은 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{k}{3}\right)^{n+1}+4}{\left(\frac{k}{3}\right)^{n-1}+1} = \frac{0+4}{0+1} = 4$이므로

조건을 만족시킨다.

② $\left|\frac{k}{3}\right| > 1 \Rightarrow k < -3$ or $k > 3$일 때

극한값은 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{k}{3}\right)^{n+1}+4}{\left(\frac{k}{3}\right)^{n-1}+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{k}{3}\times\left(\frac{k}{3}\right)^n+4}{\frac{3}{k}\times\left(\frac{k}{3}\right)^n+1} = \frac{\frac{k}{3}}{\frac{3}{k}} = \frac{k^2}{9}$

이므로 극한값이 4가 되려면 $k = 6$ or $k = -6$이다.
이는 전제조건인 $k < -3$ or $k > 3$에 포함되므로
조건을 만족시킨다.

③ $\left|\frac{k}{3}\right|=1 \Rightarrow k=3$ or $k=-3$일 때

i) $k=3$일 때

극한값은 $\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{k}{3}\right)^{n+1}+4}{\left(\frac{k}{3}\right)^{n-1}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1^{n+1}+4}{1^{n-1}+1}=\frac{5}{2}$이므로

조건을 만족시키지 않는다.

ii) $k=-3$일 때

$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{k}{3}\right)^{n+1}+4}{\left(\frac{k}{3}\right)^{n-1}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}+4}{(-1)^{n-1}+1}$은 진동하므로

조건을 만족시키지 않는다.

①, ②, ③에서 조건을 만족시키는 정수 k를 구하면 다음과 같다.

$-6,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 6$

따라서 모든 정수 k의 개수는 7이다.

답 7

10. ④

26. [출제의도] 수열의 극한을 활용하여 문제해결하기

(i) $0<x<\frac{4}{x}$일 때,

$0<x<2$이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^2}{4}\right)^n=0$

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x\times\left(\frac{x^2}{4}\right)^n+1}{\left(\frac{x^2}{4}\right)^n+\frac{4}{x}}=\frac{x}{4}$

$f(x)=2x-3$에서 $x=\frac{12}{7}$

(ii) $x=\frac{4}{x}$일 때,

$x=2$이므로 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+2^n}{2^n+2^{n+1}}=1$

그러므로 $x=2$는 방정식 $f(x)=2x-3$의 실근이다.

(iii) $0<\frac{4}{x}<x$일 때,

$x>2$이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{x^2}\right)^n=0$

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x+\left(\frac{4}{x^2}\right)^n}{1+\frac{4}{x}\times\left(\frac{4}{x^2}\right)^n}=x$

$f(x)=2x-3$에서 $x=3$

(i), (ii), (iii)에 의하여 모든 실근의 합은

$\frac{12}{7}+2+3=\frac{47}{7}$

11. ③

102

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)x^{2n+1}+2x}{3x^{2n}+1}$

$(f\circ f)(1)=\frac{5}{4}$

$f(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)\times 1^{2n+1}+2}{3\times 1^{2n}+1}=\frac{a}{4}$

즉, $f\left(\frac{a}{4}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)\times\left(\frac{a}{4}\right)^{2n+1}+\frac{a}{2}}{3\times\left(\frac{a}{4}\right)^{2n}+1}=\frac{5}{4}$를 만족시키는

a의 값을 구하면 된다.

공비가 $\left(\frac{a}{4}\right)^2$이므로 이전 문제들에서 학습했듯이

공비가 $\frac{a}{4}$라고 생각하고 분류해보자.

Tip 공비가 r^2일 때도 공비가 r일 때와 마찬가지로
① $|r|<1$ ② $|r|>1$ ③ $|r|=1$ 로
분류할 수 있다고 이전 문제들에서 정말 많이
학습하였다. 이제는 자연스럽게 분류할 수
있어야 한다. 혹시나 매끄럽지 못했다면
[개념확인 문제 12] 해설을 참고하도록 하자.

① $\left|\frac{a}{4}\right|<1 \Rightarrow -1<\frac{a}{4}<1 \Rightarrow -4<a<4$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)\times\left(\frac{a}{4}\right)^{2n+1}+\frac{a}{2}}{3\times\left(\frac{a}{4}\right)^{2n}+1}=\frac{0+\frac{a}{2}}{0+1}=\frac{a}{2}=\frac{5}{4}$$

$\Rightarrow a=\frac{5}{2}$

$a=\frac{5}{2}$는 $-4<a<4$에 속하므로 조건을 만족한다.

② $\left|\frac{a}{4}\right|>1 \Rightarrow \frac{a}{4}<-1$ or $\frac{a}{4}>1 \Rightarrow a<-4$ or $a>4$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)\times\left(\frac{a}{4}\right)^{2n+1}+\frac{a}{2}}{3\times\left(\frac{a}{4}\right)^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a(a-2)}{4}\times\left(\frac{a}{4}\right)^{2n}+\frac{a}{2}}{3\times\left(\frac{a}{4}\right)^{2n}+1}$$

$$=\frac{a(a-2)}{12}=\frac{5}{4}$$

$\Rightarrow a(a-2)=15 \Rightarrow a^2-2a-15=0 \Rightarrow (a-5)(a+3)=0$

$\Rightarrow a=5$ or $a=-3$

$a<-4$ or $a>4$에 속하는 a의 값은 5이다.

③ $\left|\frac{a}{4}\right|=1 \Rightarrow a=-4$ or $a=4$

i) $a=-4$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)\times\left(\frac{a}{4}\right)^{2n+1}+\frac{a}{2}}{3\times\left(\frac{a}{4}\right)^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-6)\times(-1)^{2n+1}-2}{3\times(-1)^{2n}+1}$$

$$=\frac{6-2}{3+1}=\frac{4}{4}=1$$

이므로 조건을 만족하지 않는다.

ii) $a=4$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)\times\left(\frac{a}{4}\right)^{2n+1}+\frac{a}{2}}{3\times\left(\frac{a}{4}\right)^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times 1^{2n+1}+2}{3\times 1^{2n}+1}$$

$$=\frac{2+2}{3+1}=\frac{4}{4}=1$$

이므로 조건을 만족하지 않는다.

①,②,③에 의하여 조건을 만족하는 모든 a의 값을 구하면

$\frac{5}{2}$, 5이다.

따라서 모든 a의 값의 합은 $\frac{5}{2}+5=\frac{15}{2}$이다.

답 ③

12. 65

103

자연수 a에 대하여 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3|x-a|^n+1}{|x-a|^n+1}$

공비가 $|x-a|$이므로 공비에 따라 case분류해보자.

① $-1<|x-a|<1 \Rightarrow |x-a|<1 \Rightarrow a-1<x<a+1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3|x-a|^n+1}{|x-a|^n+1}=\frac{0+1}{0+1}=1$$

② $|x-a|>1$ or $|x-a|<-1 \Rightarrow |x-a|>1$

$\Rightarrow x<a-1$ or $x>a+1$

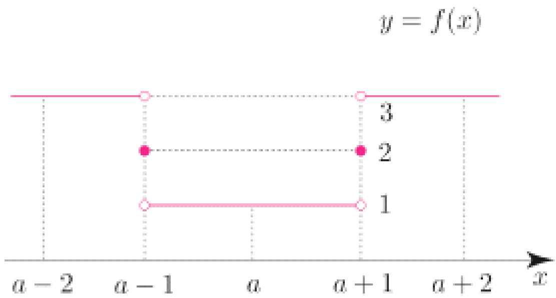
$$\lim_{n\to\infty}\frac{3|x-a|^n+1}{|x-a|^n+1}=\frac{3}{1}=3$$

③ $|x-a|=1$ or $|x-a|=-1 \Rightarrow |x-a|=1$

$\Rightarrow x=a-1$ or $x=a+1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3|x-a|^n+1}{|x-a|^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times 1^n+1}{1^n+1}=\frac{4}{2}=2$$

①, ②, ③를 바탕으로 $f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



$\sum_{k=11}^{15} f(k)=f(11)+f(12)+f(13)+f(14)+f(15)\le 12$

가 되도록 하는 a의 값을 구해보자.

(x값이 연속하는 5개의 자연수라는 것에 유의하자.)

$\sum_{k=11}^{15} f(k)$이 최솟값이 되도록 하려면

함숫값 1을 한 번 가지고 함숫값 2를 두 번 가져야 한다.

함숫값 1을 한 번 가지고 함숫값 2를 두 번 가지는 경우를 구하면 다음과 같다.

$(f(11),\ f(12),\ f(13),\ f(14),\ f(15))$

$=(3,\ 2,\ 1,\ 2,\ 3)$ or $(3,\ 3,\ 2,\ 1,\ 2)$ or $(2,\ 1,\ 2,\ 3,\ 3)$

i) $(3,\ 2,\ 1,\ 2,\ 3) \Rightarrow a=13$

$\sum_{k=11}^{15} f(k)=11$이므로 조건을 만족한다.

ii) $(3,\ 3,\ 2,\ 1,\ 2) \Rightarrow a=14$

$\sum_{k=11}^{15} f(k)=11$이므로 조건을 만족한다.

iii) $(2,\ 1,\ 2,\ 3,\ 3) \Rightarrow a=12$

$\sum_{k=11}^{15} f(k)=11$이므로 조건을 만족한다.

$\sum_{k=11}^{15} f(k)=12$가 되도록 하는 경우를 구하면 다음과 같다.

$(f(11),\ f(12),\ f(13),\ f(14),\ f(15))$

$=(1,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3)$ or $(3,\ 3,\ 3,\ 2,\ 1)$

iv) $(1,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3) \Rightarrow a=11$

$\sum_{k=11}^{15} f(k)=12$이므로 조건을 만족한다.

v) $(3,\ 3,\ 3,\ 2,\ 1) \Rightarrow a=15$

$\sum_{k=11}^{15} f(k)=12$이므로 조건을 만족한다.

i), ii), iii), iv), v) 에 의하여 조건을 만족하는 모든 a의 값을 구하면 11, 12, 13, 14, 15이다.

따라서 모든 a의 값의 합은 $11+12+13+14+15=65$이다.

답 65

Theme 7 수열의 극한의 활용

13. 32

048

$n=\sqrt{|x|} \Rightarrow x=n^2$ or $x=-n^2$이므로

$P_n(n^2, n)$, $Q_n(-n^2, n)$이고

$\sqrt{\frac{n^2}{2}}=\frac{n}{\sqrt{2}}$이므로 $R_n\left(\frac{n^2}{2}, \frac{n}{\sqrt{2}}\right)$이다.

① 삼각형 $P_nQ_nR_n$의 넓이 S_n

$\overline{P_nQ_n}=n^2-(-n^2)=2n^2$

선분 P_nQ_n의 길이를 밑변으로 잡으면

높이는 n에서 R_n의 y좌표를 뺀 것이므로

높이$=n-\frac{n}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}n=\frac{2-\sqrt{2}}{2}n$

$\therefore\ S_n=\frac{1}{2}\times 2n^2\times\frac{2-\sqrt{2}}{2}n=\frac{2-\sqrt{2}}{2}n^3$

② 삼각형 OP_nQ_n의 둘레 l_n

$\overline{OP_n}=\overline{OQ_n}=\sqrt{n^4+n^2}$ 이고 $\overline{P_nQ_n}=2n^2$이므로

$\therefore\ l_n=2n^2+2\sqrt{n^4+n^2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\times l_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+2n\sqrt{n^4+n^2}}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+2n^3}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}n^3}$$

$$=\frac{4}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}=\frac{8}{2-\sqrt{2}}=\frac{8(2+\sqrt{2})}{2}$$

$$=8+4\sqrt{2}=a+b\sqrt{2}$$

따라서 $ab=8\times4=32$이다.

답 32

Theme 8 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$과 $\lim_{n\to\infty}a_n$사이의 관계

14. ⑤

056

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(na_n-\frac{n^2+1}{2n+1}\right)=3$$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(na_n-\frac{n^2+1}{2n+1}\right)$는 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(na_n-\frac{n^2+1}{2n+1}\right)=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}n\left(a_n-\frac{n^2+1}{n(2n+1)}\right)=0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{n^2+1}{2n^2+n}\right)=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}$$

따라서

$\lim_{n\to\infty}(a_n^2+2a_n+2)=\frac{1}{4}+1+2=\frac{1}{4}+\frac{12}{4}=\frac{13}{4}$이다.

답 ⑤

15. ③

062

$a_n=4+(n-1)d$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$은 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=3$$

$\Rightarrow d=3$

$a_n=4+(n-1)3=3n+1$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

따라서 $S=\frac{3}{2}$이다.

답 ③

16. ③

007

$$S_n = 2n + \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(a_k+2)$$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+2)$는 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+2)=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = -2$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6n-5}{\sqrt{16n^2+n+na_n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{6-\frac{5}{n}}{\sqrt{16+\frac{1}{n}+a_n}} = \frac{6}{4-2}=3$$

이다.

답 ③

17. ②

006

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(3-\frac{a_n}{2^{2n-1}}\right)=5$$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(3-\frac{a_n}{2^{2n-1}}\right)$은 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{a_n}{2^{2n-1}}\right)=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{2a_n}{4^n}=3$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+2}}{a_n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{4^n}\times 4^{n+2}}{\frac{2a_n}{4^n}+\frac{4}{4^n}} = \frac{32}{3+0} = \frac{32}{3}$$ 이다.

답 ②

Theme 9 급수의 성질

18. 26

010

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-3)=5,\ S_n = \frac{2n}{n+1}+\sum_{k=1}^{n}(a_k-3)$$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-3)$은 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-3)=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=3$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-3)=5 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}S_n = 2+5=7$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}(3S_n+2a_n-1)=3\times7+2\times3-1=21+6-1=26$$

이다.

답 26

19. 14

011

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=5,\ \sum_{k=1}^{n}\left(b_k-\frac{k^2}{n^3}\right)=\frac{n^2-1}{n^2+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(b_k-\frac{k^2}{n^3}\right)=\sum_{k=1}^{n}b_k-\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2=\sum_{k=1}^{n}b_k-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{n}b_k=\frac{n^2-1}{n^2+1}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\right)=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+3b_n)=2\sum_{n=1}^{\infty}a_n+3\sum_{n=1}^{\infty}b_n=10+4=14$이다.

답 14

Theme 10 분수 꼴로 된 급수

20. 5

017

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} = n^2 + 3n$이라 하면

$S_n - S_{n-1} = \frac{a_n}{n}$ $(n \geq 2)$이므로

$n^2 + 3n - \{(n-1)^2 + 3(n-1)\} = 2n + 2 = \frac{a_n}{n}$ $(n \geq 2)$

$S_1 = 4 = \frac{a_1}{1}$이므로 $a_n = (2n+2)n = 2n(n+1)$ $(n \geq 1)$

(물론 라이트 N제 수1에서 배운 테크닉을 이용하여

$\frac{a_n}{n} = 2n + 3 - 1 = 2n + 2$라고 구해도 된다.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{2n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n(n+1)}$$

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 T_n이라고 하면

$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{5}{k(k+1)} = 5\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$은

한끝차이므로 초말유형이다.

$T_n = 5\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$이므로

$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} 5\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 5$이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{2n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n(n+1)} = 5$이다.

답 5

21. ⑤

26. 출제의도 : 급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d $(d>0)$이라 하면

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{a_{n+1} - a_n}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$
$$= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)$$
$$= \frac{1}{d}\left\{\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right) \quad \cdots ㉠$$

이때

$a_n = a_1 + (n-1)d = dn + 1 - d$

이므로

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(dn + 1 - d) = \infty$

$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_{n+1}} = 0$

㉠에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$
$$= \frac{1}{d}\left(\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$
$$= \frac{1}{d}(1-0)$$
$$= \frac{1}{d}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n a_{n+1}} + b_n\right) = 2$에서

$\frac{1}{a_n a_{n+1}} + b_n = c_n$이라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = 2$

$b_n = c_n - \frac{1}{a_n a_{n+1}}$ 이므로 급수의 성질에 의하여

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n - \frac{1}{a_n a_{n+1}}\right)$

$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}}$

$= 2 - \frac{1}{d}$ ⋯ ㉡

따라서 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하므로 등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r라 하면

$-1 < r < 1$이고 $a_2 b_2 = (1+d)r = 1$에서

$r = \frac{1}{1+d}$

이때 $d > 0$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{b_1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{1+d}} = \frac{1+d}{d}$ ⋯ ㉢

이므로 ㉡, ㉢에서

$2 - \frac{1}{d} = \frac{1+d}{d}$,

$\frac{2d-1}{d} = \frac{1+d}{d}$

$d = 2$

㉡ 또는 ㉢에서

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{3}{2}$

정답 ⑤

22. 57

29. 출제의도 : 급수의 합을 이용하여 일반항을 구할 수 있는가?

풀이 :

S_m

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m+1}{n(n+m+1)}$

$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m+1}\right)$

$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+m+1}\right)$

$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1 - \frac{1}{m+2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m+3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m+n+1}\right)\right\}$

따라서

S_1

$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)\right\}$

$= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

이므로

$a_1 = S_1 = \frac{3}{2}$

또한

S_9

$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1 - \frac{1}{11}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{13}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+10}\right)\right\}$

$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{10}$

S_{10}

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{14}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+11}\right)\right\}$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}$$

$$=S_9+\frac{1}{11}$$

이므로

$$a_{10}=S_{10}-S_9$$

$$=\left(S_9+\frac{1}{11}\right)-S_9$$

$$=\frac{1}{11}$$

따라서

$$a_1+a_{10}$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{11}$$

$$=\frac{35}{22}$$

이므로 $p=22$, $q=35$

$p+q=57$

정답 57

Theme 11 등비급수의 계산

23. ②

061

$a_1=a$라 하면 $a_n=a\times r^{n-1}$

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})=3$

$\Rightarrow a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6+\cdots=3$

$\Rightarrow \frac{a}{1-(-r)}=\frac{a}{1+r}=3$ ($\because$ 첫째항이 a, 공비가 $-r$)

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=6$

$\Rightarrow \frac{a^2}{1-r^2}=6 \Rightarrow \frac{a^2}{(1-r)(1+r)}=6$

$\Rightarrow \frac{a}{1-r}\times 3=6\left(\because \frac{a}{1+r}=3\right)$

$\Rightarrow \frac{a}{1-r}=2$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2$이다.

답 ②

24. ①

063

$7a_1+7^2a_2+\cdots+7^na_n=3^n-1$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}7^ka_k=3^n-1$

$S_n=\sum_{k=1}^{n}7^ka_k=3^n-1$이라 하면

$S_n-S_{n-1}=7^na_n\ (n\geq 2)$이므로

$S_n-S_{n-1}=3^n-1-(3^{n-1}-1)=3^n-3^{n-1}=3^{n-1}(3-1)$

$=2\times 3^{n-1}=7^na_n\ (n\geq 2)$

이때 $S_1=3^1-1=2$이고 $7^1a_1=2\times 3^{1-1}=2$이므로

$7^na_n=2\times 3^{n-1}\ (n\geq 1)$이다.

$a_n=2\times\frac{3^{n-1}}{7^n}\ (n\geq 1)$이므로 $\frac{a_n}{3^{n-1}}=2\times\left(\frac{1}{7}\right)^n$이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}2\left(\frac{1}{7}\right)^n=\frac{\frac{2}{7}}{1-\frac{1}{7}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이다.

답 ①

25. ①

066

a의 n제곱근을 x라 하면 $x^n = a$이므로
$(-3)^{n-1}$의 n제곱근을 x라 하면 $x^n = (-3)^{n-1}$이다.

$(-3)^{n-1}$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수는
두 함수 $y = x^n$, $y = (-3)^{n-1}$의 교점의 개수와 같다.

n이 홀수와 짝수일 때 $y = x^n$의 그래프 개형이
달라지므로 이를 기준으로 case분류하면

① n이 홀수일 때
n에 상관없이 $a_n = 1$이다.

② n이 짝수일 때
$x^n = (-3)^{n-1}$
$x^2 = (-3)^{2-1} = -3$
$x^4 = (-3)^{4-1} = -27$
$\vdots$

n이 짝수이므로 $n-1$은 홀수이다.
즉, $(-3)^{n-1} < 0$이므로 $a_n = 0$이다.

$$\text{따라서 } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = \frac{a_3}{2^3} + \frac{a_5}{2^5} + \frac{a_7}{2^7} + \cdots$$
$$= \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \cdots$$
$$= \frac{\frac{1}{2^3}}{1 - \frac{1}{2^2}} = \frac{1}{8-2} = \frac{1}{6}$$

이다.

답 ①

Theme 12 등비급수의 수렴조건

26. 10

029

$\sum_{n=1}^{\infty} r^n$의 수렴조건은 $-1 < r < 1$이므로

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{-2n-1}}{(2^x+1)^{-n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5}\left(\frac{25}{2^x+1}\right)^{-n} = \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^x+1}{25}\right)^n$이

수렴하려면 $-1 < \frac{2^x+1}{25} < 1 \Rightarrow -26 < 2^x < 24$

$-26 < 2^x < 24$를 만족시키는 자연수는 다음과 같다.
$x = 1,\ 2,\ 3,\ 4$

따라서 모든 자연수 x의 값의 합은 $1+2+3+4 = 10$이다.

답 10

2. 미분법

Theme 13 무리수 e의 정의

27. ③

069

$$\lim_{x\to0}(1+3x)^{\frac{1}{6x}}=\lim_{x\to0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}\times\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

답 ③

28. ②

080

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)^{\sec x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+(-\cos x))^{\frac{1}{-\cos x}\times(-1)}$$

$$=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

답 ②

Theme 14 지수함수와 로그함수의 극한

29. ②

009

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{4x}-1}{2xe^{x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{4x}-1}{4x}\times\frac{2}{e^{x}}\right)$$

$$=1\times2=2$$

답 ②

30. ①

010

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\{1+f(x)\}}{2x}=12$$

분모가 0으로 가는데 극한값이 존재하므로

분자는 0으로 가야 한다.

$$\lim_{x\to0}\ln\{1+f(x)\}=0\Rightarrow\lim_{x\to0}f(x)=0$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln\{1+f(x)\}}{f(x)}\times\frac{f(x)}{2x}\right)=1\times\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{2x}=12$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=24$$

따라서 $\lim_{x\to0}\frac{e^{4x}-1}{f(x)}=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{4x}-1}{4x}\times\frac{x}{f(x)}\times4\right)$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{4x}-1}{4x}\times\frac{1}{\frac{f(x)}{x}}\times4\right)$$

$$=1\times\frac{1}{24}\times4=\frac{1}{6}$$

이다.

답 ①

31. 24

013

$$\lim_{x\to0}\frac{a^{x}+b}{\ln(2x+1)}=\ln5\quad(a>0,\ a\neq1)$$

분모가 0으로 가는데 극한값이 존재하므로

분자는 0으로 가야 한다.

$$\lim_{x\to0}(a^{x}+b)=0\Rightarrow b=-1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{a^{x}-1}{\ln(2x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{a^{x}-1}{x}}{\frac{\ln(2x+1)}{2x}\times2}$$

$$=\frac{\ln a}{2}=\ln5$$

$$\Rightarrow\ln a=2\ln5=\ln25\Rightarrow a=25$$

따라서 $a+b=25-1=24$이다.

답 24

32. ①

25. 출제의도 : 지수함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{x\to0}\frac{2^{ax+b}-8}{2^{bx}-1}=16$에서

$x\to0$일 때, (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

이때 함수 $2^{ax+b}-8$은 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim_{x\to0}(2^{ax+b}-8)=2^b-8=0$

$2^b=8$

$b=3$

$\lim_{x\to0}\frac{2^{ax+3}-8}{2^{3x}-1}$

$=\lim_{x\to0}\frac{8(2^{ax}-1)}{2^{3x}-1}$

$=\frac{8a}{3}\times\lim_{x\to0}\frac{\frac{2^{ax}-1}{ax}}{\frac{2^{3x}-1}{3x}}$

$=\frac{8a}{3}\times\frac{\ln2}{\ln2}$

$=\frac{8a}{3}$

이므로

$\frac{8a}{3}=16$에서

$a=6$

따라서

$a+b=6+3=9$

정답 ①

33. ①

112

$a>0,\ b>0,\ c>0$

$\lim_{x\to\infty}x^a\ln\left(b+\frac{c}{x^2}\right)=2$

$\lim_{x\to\infty}x^a=\infty$인데 극한값이 존재하므로

$\lim_{x\to\infty}\ln\left(b+\frac{c}{x^2}\right)=0\ \Rightarrow\ b=1$

$$\lim_{x\to\infty}x^a\ln\left(1+\frac{c}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln\left(1+\frac{c}{x^2}\right)}{\frac{c}{x^2}}\times\frac{cx^a}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln\left(1+\frac{c}{x^2}\right)}{\frac{c}{x^2}}\times\frac{2x^2}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln\left(1+\frac{c}{x^2}\right)}{\frac{c}{x^2}}\times2\right)$$

$$=1\times2=2$$

이므로 $c=2,\ a=2$이다.

따라서 $a+b+c=2+1+2=5$이다.

답 ①

Theme 15 지수함수와 로그함수의 극한

34. ④

25. [출제의도] 지수함수의 극한 이해하기

두 점 P, Q의 좌표는 각각 $P(t, e^{2t}-1)$, $Q(f(t), 0)$

$\overline{PQ}^2 = \overline{OQ}^2$이므로

$\{f(t)-t\}^2 + (e^{2t}-1)^2 = \{f(t)\}^2$에서

$$f(t) = \frac{t}{2} + \frac{(e^{2t}-1)^2}{2t}$$

$$\lim_{t\to 0+}\frac{f(t)}{t} = \lim_{t\to 0+}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2t}-1}{t}\right)^2\right\}$$

$$= \lim_{t\to 0+}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2t}-1}{2t}\times 2\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times(1\times 2)^2 = \frac{5}{2}$$

35. ②

26. 출제의도 : 지수함수의 그래프를 이용하여 삼각형의 넓이를 로그로 나타내고, 로그함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 A의 x좌표를 a라 하면

$e^{a^2}-1=t$

이므로

$a^2 = \ln(1+t)$

$a>0$이므로 $a=\sqrt{\ln(1+t)}$

또, 점 B의 x좌표를 b라 하면

$e^{b^2}-1=5t$

이므로

$b^2=\ln(1+5t)$

$b>0$이므로 $b=\sqrt{\ln(1+5t)}$

그러므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$S(t)=\frac{1}{2}\times 5t\times\left(\sqrt{\ln(1+5t)}-\sqrt{\ln(1+t)}\right)$$

따라서

$$\lim_{t\to 0+}\frac{S(t)}{t\sqrt{t}}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{5t\left(\sqrt{\ln(1+5t)}-\sqrt{\ln(1+t)}\right)}{2t\sqrt{t}}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{5}{2}\left(\sqrt{\frac{\ln(1+5t)}{t}}-\sqrt{\frac{\ln(1+t)}{t}}\right)$$

$$=\frac{5}{2}(\sqrt{5}-1)$$

정답 ②

Theme 16 삼각함수의 덧셈정리

36. ②

098

$2\cos\alpha = 3\sin\alpha \Rightarrow \tan\alpha = \frac{2}{3}$

$\tan(\alpha+\beta)=1 \Rightarrow \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1$

$\Rightarrow \frac{\frac{2}{3}+\tan\beta}{1-\frac{2}{3}\tan\beta}=1 \Rightarrow \frac{2}{3}+\tan\beta = 1-\frac{2}{3}\tan\beta$

$\Rightarrow \frac{5}{3}\tan\beta = \frac{1}{3} \Rightarrow \tan\beta=\frac{1}{5}$

따라서 $\tan\beta=\frac{1}{5}$이다.

답 ②

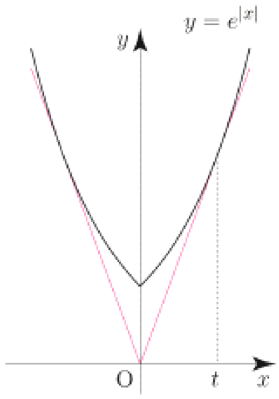
37. ④

105

$x>0$에서 $y=e^{|x|}=e^x$, $y'=e^x$

원점에서 곡선 $y=e^x$에 접선을 그을 때,

접점의 x좌표를 t라 하자.



접선의 방정식을 구하면 $y=e^t(x-t)+e^t$이고,

원점을 지나므로 $0=e^t(-t)+e^t \Rightarrow 0=e^t(-t+1) \Rightarrow t=1$

곡선 $y=e^{|x|}$는 y축에 대하여 대칭이므로

정의역이 음수일 때 접점의 x좌표는 -1이다.

$x=t$에서 접선의 기울기는 e^t이므로

두 접선의 기울기는 e, $-e$이다.

따라서 두 접선이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때,

$\tan\theta = \left|\frac{e-(-e)}{1-e^2}\right| = \left|\frac{2e}{1-e^2}\right| = \frac{2e}{e^2-1}$이다.

답 ④

38. ④

101

$x-y-1=0,\ ax-y+1=0$

$\Rightarrow y=x-1,\ y=ax+1$

$\tan\theta=\frac{1}{6}$

$\Rightarrow \left|\frac{1-a}{1+a}\right|=\frac{1}{6}$

$\Rightarrow \frac{a-1}{a+1}=\frac{1}{6}\ (\because\ a>1)$

$\Rightarrow 6a-6=a+1 \Rightarrow 5a=7 \Rightarrow a=\frac{7}{5}$

따라서 상수 $a=\frac{7}{5}$이다.

답 ④

39. ⑤

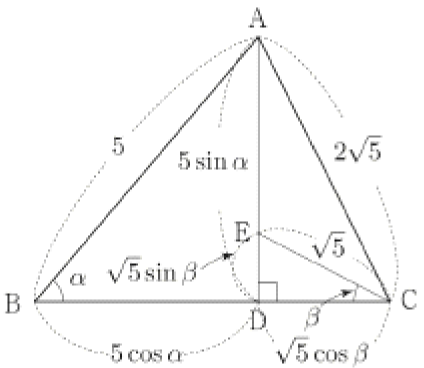
120

$\overline{BD}=\overline{AB}\times\cos\alpha=5\cos\alpha$

$\overline{AD}=\overline{AB}\times\sin\alpha=5\sin\alpha$

$\overline{CD}=\overline{CE}\times\cos\beta=\sqrt{5}\cos\beta$

$\overline{ED}=\overline{CE}\times\sin\beta=\sqrt{5}\sin\beta$



선분 AD를 $3:1$로 내분하는 점이 E이므로

$\overline{AD}=4\overline{ED} \Rightarrow 5\sin\alpha=4\sqrt{5}\sin\beta$

$\Rightarrow \sin\beta=\frac{\sqrt{5}}{4}\sin\alpha$

삼각형 ADC에서 피타고라스의 정리를 사용하면

$(\overline{AD})^2=(\overline{AC})^2-(\overline{CD})^2$

$\Rightarrow 25\sin^2\alpha=20-5\cos^2\beta$

$\Rightarrow 5\sin^2\alpha=4-(1-\sin^2\beta)$

$\Rightarrow 5\sin^2\alpha=4-\left(1-\frac{5}{16}\sin^2\alpha\right)$

$\Rightarrow \sin^2\alpha=\frac{16}{25} \Rightarrow \sin\alpha=\frac{4}{5}$

$\sin\beta=\frac{\sqrt{5}}{4}\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\sin\alpha=\frac{4}{5} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{3}{5}$

$\sin\beta=\frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \cos\beta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

따라서 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$$=\frac{3}{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$=\frac{10\sqrt{5}}{25}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

이다.

답 ⑤

40. ④

26. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리 이해하기

$\angle EAB=\alpha,\ \angle CDB=\beta,$

$\overline{BE}=x\left(0<x<\frac{1}{2}\right)$이라 하면

$\overline{AD}=2x,\ \overline{DB}=1-2x$

$\tan\alpha=x,\ \tan\beta=\frac{1}{1-2x}$

$\tan(\angle CFE)=\tan(\beta-\alpha)$

$$=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\times\tan\alpha}$$

$$=\frac{\frac{1}{1-2x}-x}{1+\frac{1}{1-2x}\times x}$$

$$= \frac{1 - x(1-2x)}{(1-2x)+x}$$

$$= \frac{2x^2 - x + 1}{1-x} = \frac{16}{15}$$

$15(2x^2 - x + 1) = 16(1-x)$

$30x^2 + x - 1 = 0$

$(5x+1)(6x-1) = 0$

$0 < x < \frac{1}{2}$ 이므로 $x = \frac{1}{6}$

따라서 $\tan(\angle \mathrm{CDB}) = \frac{1}{1-2x} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$

41. ④

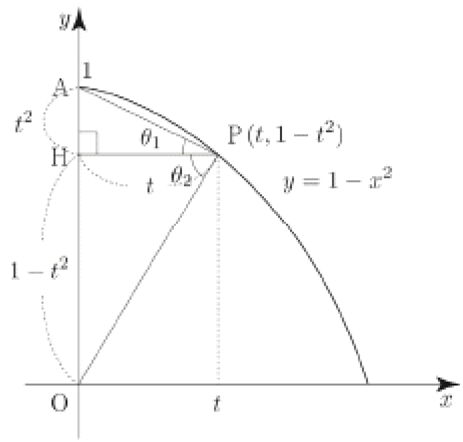
125

점 P의 x좌표를 t라 하자.

$\mathrm{P}(t,\ 1-t^2)$

$\overline{\mathrm{HP}} = t,\ \overline{\mathrm{OH}} = 1-t^2$

$\overline{\mathrm{AH}} = 1-(1-t^2) = t^2$



$\tan\theta_1 = \frac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{HP}}} = \frac{t^2}{t} = t = \frac{1}{2}$

$\tan\theta_2 = \frac{\overline{\mathrm{OH}}}{\overline{\mathrm{HP}}} = \frac{1-t^2}{t} = \frac{1-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$

따라서 $\tan(\theta_1+\theta_2) = \frac{\tan\theta_1 + \tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}}$

$$= \frac{2}{\frac{1}{4}} = 8$$

이다.

답 ④

Theme 17 함수의 몫의 미분법

42. ⑤

050

$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times x^2 - \ln x \times 2x}{x^4} = \frac{1-2\ln x}{x^3}$

따라서 $\lim_{h\to 0}\frac{f(e+h)-f(e-2h)}{h} = 3f'(e) = 3\times\frac{-1}{e^3} = -\frac{3}{e^3}$

답 ⑤

43. ③

066

$g(x) = \frac{f(x)}{(e^x+1)^2}$

$g'(x) = \frac{f'(x)(e^x+1)^2 - f(x)\times 2e^x(e^x+1)}{(e^x+1)^4}$

$$= \frac{f'(x)(e^x+1) - 2e^x f(x)}{(e^x+1)^3}$$

$f'(0) - f(0) = 2$

따라서 $g'(0) = \frac{2f'(0)-2f(0)}{8} = \frac{f'(0)-f(0)}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

이다.

답 ③

Theme 18 합성함수의 미분법

44. ④

056

$f(x^3+x)=e^x$

양변을 x에 대하여 미분

$(3x^2+1)f'(x^3+x)=e^x$

$x=1$을 대입하면

$4f'(2)=e \Rightarrow f'(2)=\frac{e}{4}$

따라서 $f'(2)=\frac{e}{4}$이다.

답 ④

45. ①

058

$t=\ln(2\{f(t)\}^2+2f(t)+1)$

$t=2\ln5$을 대입하면

$2\ln5=\ln(2\{f(2\ln5)\}^2+2f(2\ln5)+1)$

$\Rightarrow \ln25=\ln(2\{f(2\ln5)\}^2+2f(2\ln5)+1)$

$\Rightarrow 25=2\{f(2\ln5)\}^2+2f(2\ln5)+1$

$\Rightarrow \{f(2\ln5)\}^2+f(2\ln5)-12=0$

$\Rightarrow \{f(2\ln5)-3\}\{f(2\ln5)+4\}=0$

$\Rightarrow f(2\ln5)=3 \ (\because\ f(2\ln5)>0)$

$t=\ln(2\{f(t)\}^2+2f(t)+1)$

양변을 t에 대하여 미분하면

$1=\frac{4f'(t)f(t)+2f'(t)}{2\{f(t)\}^2+2f(t)+1}$

$t=2\ln5$을 대입하면

$1=\frac{4f'(2\ln5)f(2\ln5)+2f'(2\ln5)}{2\{f(2\ln5)\}^2+2f(2\ln5)+1}$

$\Rightarrow 1=\frac{14f'(2\ln5)}{25}$

$\Rightarrow f'(2\ln5)=\frac{25}{14}$

따라서 $f'(2\ln5)=\frac{25}{14}$이다.

답 ①

46. ②

27. 출제의도 : 합성함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

풀이 :

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)+f'\left(\frac{1}{2}\sin x\right)\times\frac{1}{2}\cos x=\cos x$---㉠

㉠에 $x=\pi$를 대입하면

$f'(\pi)+f'(0)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

$f'(\pi)-\frac{1}{2}f'(0)=-1$---㉡

㉠에 $x=0$을 대입하면

$f'(0)+f'(0)\times\frac{1}{2}=1,\ \frac{3}{2}f'(0)=1$

따라서 $f'(0)=\frac{2}{3}$이므로 ㉡에 대입하면

$f'(\pi)-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=-1$

$f'(\pi)=-1+\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}$

정답 ②

47. 17

091

$f(x)=t(\ln x)^2-x^2$

$f'(x)=\dfrac{2t\ln x}{x}-2x=2\left(\dfrac{t\ln x-x^2}{x}\right)$

함수 $f(x)$이 $x=g(t)$에서 극대이므로

$f'(g(t))=0 \Rightarrow 2\left(\dfrac{t\ln\{g(t)\}-\{g(t)\}^2}{g(t)}\right)=0$

$\Rightarrow t\ln\{g(t)\}-\{g(t)\}^2=0$

$t\ln\{g(t)\}-\{g(t)\}^2=0$ ⋯ ㉠

㉠의 양변에 α를 대입하면

$\alpha\ln\{g(\alpha)\}-\{g(\alpha)\}^2=0$

$\Rightarrow 2\alpha-e^4=0$ ($\because$ $g(\alpha)=e^2$)

$\Rightarrow \alpha=\dfrac{e^4}{2}$

㉠의 양변을 t에 대해 미분하면

$\ln\{g(t)\}+\dfrac{tg'(t)}{g(t)}-2g(t)g'(t)=0$ ⋯ ㉡

㉡의 양변에 α를 대입하면

$\ln\{g(\alpha)\}+\dfrac{\alpha g'(\alpha)}{g(\alpha)}-2g(\alpha)g'(\alpha)=0$

$\Rightarrow 2+\dfrac{e^2g'(\alpha)}{2}-2e^2g'(\alpha)=0$

$\Rightarrow 2=\dfrac{3e^2}{2}g'(\alpha)$

$\Rightarrow g'(\alpha)=\dfrac{4}{3e^2}$

이므로 $\alpha\times\{g'(\alpha)\}^2=\dfrac{e^4}{2}\times\dfrac{16}{9e^4}=\dfrac{8}{9}$이다.

따라서 $p+q=17$이다.

답 17

48. 5

29. [출제의도] 합성함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구하는 문제를 해결한다.

직선 l의 기울기는 $\tan\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$이므로

직선 l의 방정식은 $y=(\tan\theta)x+1$

직선 $y=(\tan\theta)x+1$이 곡선 $y=e^{\frac{x}{a}}-1$과 만나는 점의 x좌표가 $f(\theta)$이므로

$\tan\theta\times f(\theta)+1=e^{\frac{f(\theta)}{a}}-1$ ⋯⋯ ㉠

$\theta=\dfrac{\pi}{4}$일 때, $a+1=e-1$, $a=e-2$

㉠의 양변을 θ에 대하여 미분하면

$\sec^2\theta\times f(\theta)+\tan\theta\times f'(\theta)=\dfrac{f'(\theta)}{a}e^{\frac{f(\theta)}{a}}$에서

$\theta=\dfrac{\pi}{4}$일 때, $2(e-2)+f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}{e-2}\times e$

$f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=(e-2)^2$이므로 $\sqrt{f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}=e-2$

따라서 $p=1$, $q=-2$이므로 $p^2+q^2=5$

Theme 19 매개변수로 나타낸 함수의 미분법

49. ②

24. 출제의도 : 매개변수로 나타내어진 함수의 미분을 할 수 있는가?

정답풀이 :

$\dfrac{dx}{dt}=1-2\sin 2t$, $\dfrac{dy}{dt}=2\sin t\cos t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2\sin t\cos t}{1-2\sin 2t} \cdots ㉠$$

(단, $1-2\sin 2t\neq 0$)

㉠의 우변에 $t=\dfrac{\pi}{4}$를 대입하면

$$\frac{2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}}{1-2\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-2\times 1}$$

$$=\frac{1}{1-2}=-1$$

정답 ②

50. ④

24. 출제의도 : 매개변수로 나타내어진 함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\frac{dx}{dt}=\frac{5(t^2+1)-5t\times 2t}{(t^2+1)^2}$$

$$=\frac{-5t^2+5}{(t^2+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{3}{t^2+1}\times 2t$$

$$=\frac{6t}{t^2+1}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$=\frac{\frac{6t}{t^2+1}}{\frac{-5t^2+5}{(t^2+1)^2}}$$

$$=\frac{6t(t^2+1)}{-5t^2+5}$$

따라서 $t=2$일 때 $\dfrac{dy}{dx}$의 값은

$$\frac{6\times 2\times(2^2+1)}{-5\times 2^2+5}=\frac{60}{-15}=-4$$

정답 ④

51. ②

24. 매개변수 $t\ (t>0)$로 나타내어진 곡선

$$x=t+\ln\sqrt{t},\quad y=t\sqrt{t}$$

$t^{\frac{1}{2}}$

에서 $t=1$일 때, $\dfrac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① $\dfrac{1}{2}$ ② 1 ③ $\dfrac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\dfrac{5}{2}$

$x=t+\frac{1}{2}\ln t$, $y=t^{\frac{3}{2}}$

$\dfrac{dx}{dt}=1+\dfrac{1}{2t}$ $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}$

$\dfrac{\frac{3}{2}}{1+\frac{1}{2}}=1$

52. 126

023

$x=\log_3 t$, $y=3t+\sqrt{3t}$

$1=\log_3 t \Rightarrow t=3$

$a=9+\sqrt{9}=9+3=12$

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{t\ln 3}$, $\dfrac{dy}{dt}=3+\dfrac{1}{2}(3t)^{-\frac{1}{2}}\times 3=3+\dfrac{3}{2\sqrt{3t}}$

Tip $\{\sqrt{f(x)}\}'=\dfrac{1}{2}\{f(x)\}^{\frac{1}{2}-1}\times f'(x)$

$=\dfrac{1}{2}\{f(x)\}^{-\frac{1}{2}}\times f'(x)$

$=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

잘 나오니 기억해두자.

ex $g(x)=\sqrt{5x+3} \Rightarrow g'(x)=\dfrac{5}{2\sqrt{5x+3}}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3+\frac{3}{2\sqrt{3t}}}{\frac{1}{t\ln 3}}$$

$t=3$일 때, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3+\frac{1}{2}}{\frac{1}{3\ln 3}}=\dfrac{21}{2}\ln 3=b$

따라서 $\dfrac{ab}{\ln 3}=12\times\dfrac{21}{2}\ln 3\times\dfrac{1}{\ln 3}=6\times 21=126$이다.

답 126

Theme 20 음함수의 미분법

53. 4

053

$x^3-y^3=e^{xy}$에 $(a,\ 0)$을 대입하면

$a^3=1 \Rightarrow a=1$

음함수 미분법을 이용하여 양변을 x에 대하여 미분하면

$3x^2-3y^2\times y'=(y+xy')e^{xy}$

$(1,\ 0)$을 대입하면

$3=y' \Rightarrow b=3$

따라서 $a+b=1+3=4$이다.

답 4

54. ③

24. 출제의도 : 음함수의 미분법을 이용하여 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x\sin 2y+3x=3$에서

y를 x의 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$\sin 2y+x\cos 2y\times 2\times\frac{dy}{dx}+3=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin 2y+3}{-2x\cos 2y}\quad (\text{단, } x\cos 2y\neq 0)$$

따라서 점 $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{\sin\left(2\times\frac{\pi}{2}\right)+3}{-2\times 1\times cos\left(2\times\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\sin\pi+3}{-2\cos\pi}$$

$$=\frac{3}{-(-2)}=\frac{3}{2}$$

정답 ③

55. ④

026

$y^3-3=\ln(9-x^3)+x^3y$

음함수 미분법을 이용하여 양변을 x에 대하여 미분하면

$$3y^2y'=\frac{-3x^2}{9-x^3}+3x^2y+x^3y'$$

$(2,\ 3)$을 대입하면

$$27y'=\frac{-12}{1}+36+8y' \Rightarrow 19y'=24 \Rightarrow y'=\frac{24}{19}$$

따라서 점 $(2,\ 3)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{24}{19}$이다.

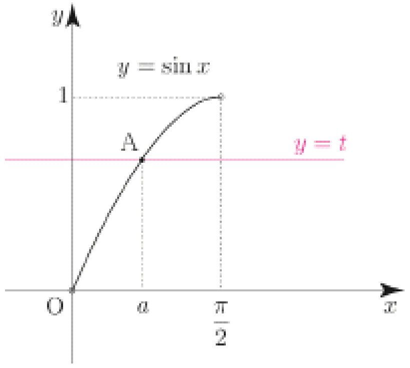
답 ④

56. ②

089

$y=t$와 $y=\sin x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$와 만나는 점의 x좌표를

a라 하면 $\sin a=t$



$f'(x)=\cos x$
$\mathrm{A}(a,\ \sin a)$에서의 접선의 방정식은
$y=\cos a(x-a)+\sin a$이므로
접선의 x절편 $g(t)=-\tan a+a$이다.
음함수 미분법을 이용하여 양변을 t에 대하여 미분하면
$g'(t)=-\sec^2 a\times\frac{da}{dt}+\frac{da}{dt}$

$t=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 일 때, $\sin a=\frac{2\sqrt{2}}{3}\Rightarrow\cos a=\frac{1}{3}$

$\sin a=t$
음함수 미분법을 이용하여 양변을 t에 대하여 미분하면
$\cos a\frac{da}{dt}=1\Rightarrow\frac{1}{3}\times\frac{da}{dt}=1\Rightarrow\frac{da}{dt}=3$

따라서
$g'\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=-\sec^2 a\times\frac{da}{dt}+\frac{da}{dt}=-9\times3+3=-24$
이다.

답 ②

57. ③

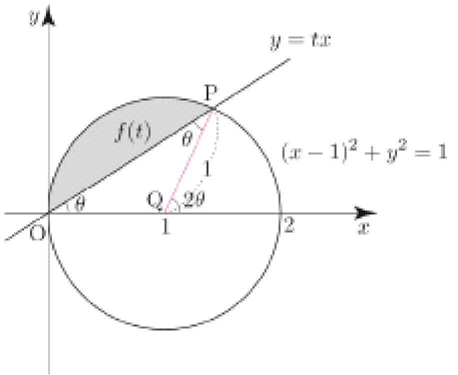
094

$f(t)$를 t로 표현하여 $f'\left(\frac{1}{2}\right)$을 구하면 간단하겠지만
$f(t)$를 t로 표현하기 쉽지 않다.

어떻게 해결해야할까?

다른 문자를 도입하여 음함수 미분법으로 해결해보자.

원의 중심을 Q라 하고
$\angle\mathrm{POQ}=\theta$라 하면 $\tan\theta=t$이다.
$\angle\mathrm{PQO}=\pi-2\theta$



$f(t)$는 부채꼴 PQO의 넓이에서 삼각형 PQO의 넓이를
빼서 구하면 된다.

$f(t)=\frac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{QP}})^2\times(\pi-2\theta)-\frac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{QP}})^2\times\sin(\pi-2\theta)$

$=\frac{\pi}{2}-\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta$

양변을 t에 대하여 미분하면

$f'(t)=-\frac{d\theta}{dt}-\cos2\theta\times\frac{d\theta}{dt}$

처음에 가정했던

$\tan\theta = t$의 관계식을 이용하면

$0 < t < 1 \Rightarrow 0 < \theta < \frac{\pi}{4}$

$\tan\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\cos 2\theta = \cos(\theta+\theta) = \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta$

$= \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\times\frac{4}{5} - 1$

$= \frac{3}{5}$

$\tan\theta = t$의 양변을 t에 대하여 미분하면

$\sec^2\theta \times \frac{d\theta}{dt} = 1 \Rightarrow \frac{5}{4}\times\frac{d\theta}{dt} = 1 \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{4}{5}$

따라서 $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{d\theta}{dt} - \cos 2\theta \times \frac{d\theta}{dt}$

$= -\frac{4}{5} - \frac{3}{5}\times\frac{4}{5} = -\frac{32}{25}$

이다.

답 ③

Tip $f(t)$를 t로 표현하여 $f'\left(\frac{1}{2}\right)$를 바로 구하기가 어려우니 마치 징검다리처럼 다른 문자의 도움을 받아서 구한다는 느낌을 가지면 된다.

58. 32

30. 출제의도 : 삼각함수의 미분법과 음함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

선분 AB의 중점을 O라 하면

$\overline{OP} = 5$

$\overline{OC} = \overline{AO} - \overline{AC} = 5 - 4 = 1$

삼각형 PCO에서 코사인법칙을 이용하면

$\overline{OP}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{OC}^2 - 2\times\overline{CP}\times\overline{OC}\times\cos\theta$

$\overline{CP} = x$라 하면

$5^2 = x^2 + 1^2 - 2\times x\times 1\times \cos\theta$

$x^2 - 2x\cos\theta - 24 = 0$ ……㉠

$\theta = \frac{\pi}{4}$를 ㉠에 대입하면

$x^2 - \sqrt{2}x - 24 = 0$

$x > 0$이므로 $x = 4\sqrt{2}$

㉠을 θ에 대하여 미분하면

$2x\frac{dx}{d\theta} - 2\cos\theta\frac{dx}{d\theta} + 2x\sin\theta = 0$

$\frac{dx}{d\theta} = \frac{x\sin\theta}{\cos\theta - x}$

$\theta = \frac{\pi}{4}$일 때, $\frac{dx}{d\theta}$의 값은

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{4\sqrt{2}\times\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4} - 4\sqrt{2}} = -\frac{4\sqrt{2}}{7}$$

선분 PQ의 중심을 M이라 하면

$S(\theta) = \frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{CM}$

$= \frac{1}{2}\times 2x\sin\theta\times x\cos\theta$

$= x^2\sin\theta\cos\theta$

이 식의 양변을 θ에 대하여 미분하면

$$\frac{dS(\theta)}{d\theta}$$
$$=2x\frac{dx}{d\theta}\sin\theta\cos\theta+x^2\cos^2\theta-x^2\sin^2\theta$$

이 식에 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 를 대입하면

$$S'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=2\times4\sqrt{2}\times\left(-\frac{4\sqrt{2}}{7}\right)\times\cos\frac{\pi}{4}\times\sin\frac{\pi}{4}$$
$$+(4\sqrt{2})^2\cos^2\frac{\pi}{4}-(4\sqrt{2})^2\sin^2\frac{\pi}{4}$$
$$=-\frac{32}{7}$$

따라서 $-7\times S'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-7\times\left(-\frac{32}{7}\right)=32$

정답 32

Theme 21 역함수의 미분법

59. 5

088

함수 $g\left(\frac{x+8}{10}\right)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로 $f\left(g\left(\frac{x+8}{10}\right)\right)=x$

양변을 x에 대하여 미분하면 $\frac{1}{10}g'\left(\frac{x+8}{10}\right)f'\left(g\left(\frac{x+8}{10}\right)\right)=1$

$g'\left(\frac{x+8}{10}\right)=\frac{10}{f'\left(g\left(\frac{x+8}{10}\right)\right)}$의 양변에 $x=2$을 대입하면

$g'(1)=\frac{10}{f'(g(1))}$

$g(1)=0$이고

$f'(x)=2xe^{-x}+(-x^2-2)e^{-x}=(-x^2+2x-2)e^{-x}$

$f'(0)=-2$

이므로

$g'(1)=\frac{10}{f'(g(1))}=\frac{10}{f'(0)}=\frac{10}{-2}=-5$

따라서 $|g'(1)|=5$이다.

답 5

60. ⑤

068

$f(x)=e^{2x}+e^x-1$

$f'(x)=2e^{2x}+e^x$

$g(5f(x))$을 x에 대해 미분하면

$\{g(5f(x))\}'=5f'(x)g'(5f(x))$

$f'(0)=3,\ f(0)=1$이므로

$5f'(0)g'(5f(0))=15g'(5)$

함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로 $f(g(x))=x$

양변을 x에 대하여 미분하면 $g'(x)f'(g(x))=1$

$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$의 양변에 $x=5$을 대입하면

$g'(5)=\frac{1}{f'(g(5))}$

$f(g(x))=x$의 양변에 $x=5$을 대입하면 $f(g(5))=5$이고,

$e^{2x}+e^x-1=5 \Rightarrow e^{2x}+e^x-6=0$

$\Rightarrow (e^x+3)(e^x-2)=0 \Rightarrow e^x=2\ (\because\ e^x>0)$

$\Rightarrow x=\ln2$

이므로 $g(5)=\ln2$

$f'(x)=2e^{2x}+e^x$

$f'(\ln2)=2e^{2\ln2}+e^{\ln2}=8+2=10$

$g'(5)=\frac{1}{f'(g(5))}=\frac{1}{f'(\ln2)}=\frac{1}{10}$

따라서 $g(5f(x))$의 $x=0$에서의 미분계수는

$15g'(5)=15\times\frac{1}{10}=\frac{3}{2}$이다.

답 ⑤

61. ③

089

$f(x)=\ln\left(\dfrac{\sec x+\tan x}{a}\right)\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{g(x)}{x+2}=b$

분모가 0으로 가는데 극한값이 존재하므로

분자는 0으로 가야 한다.

$\displaystyle\lim_{x\to -2}g(x)=0 \Rightarrow g(-2)=0 \Rightarrow f(0)=-2$

$\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{g(x)}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{g(x)-g(-2)}{x-(-2)}=g'(-2)=b$

$f(0)=\ln\left(\dfrac{1}{a}\right)=-2 \Rightarrow a=e^2$

함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로 $f(g(x))=x$

양변을 x에 대하여 미분하면 $g'(x)f'(g(x))=1$

$g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}$의 양변에 $x=-2$을 대입하면

$g'(-2)=\dfrac{1}{f'(g(-2))}$

$g(-2)=0$이고

$f'(x)=\dfrac{\sec x\tan x+\sec^2 x}{\sec x+\tan x}$

$f'(0)=1$

이므로

$g'(-2)=\dfrac{1}{f'(g(-2))}=\dfrac{1}{f'(0)}=1=b$

따라서 $ab=e^2\times 1=e^2$이다.

답 ③

62. ①

032

$f(x)=x^2e^x\ (x\geq 0)$

함수 $g(2x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로 $f(g(2x))=x$

양변을 x에 대하여 미분하면 $2g'(2x)f'(g(2x))=1$

Tip

$g(x)$가 아니라 $g(2x)$이기 때문에

헷갈릴 수 있는데 이때 $g(2x)=h(x)$라고 치환하면

손쉽게 판단할 수 있다.

① $f(h(x))=x \Rightarrow f(g(2x))=x$

양변을 x에 대하여 미분하면

$2g'(2x)f'(g(2x))=1$

② $h(f(x))=x \Rightarrow g(2f(x))=x$

양변을 x에 대하여 미분하면

$2f'(x)g'(2f(x))=1$

$g'(2x)=\dfrac{1}{2f'(g(2x))}$의 양변에 $x=e$를 대입하면

$g'(2e)=\dfrac{1}{2f'(g(2e))}$

$f(g(2x))=x$의 양변에 $x=e$를 대입하면

$f(g(2e))=e$이고 $x^2e^x=e \Rightarrow x=1\ \ (\because x\geq 0)$이므로

$g(2e)=1$

$f'(x)=2xe^x+x^2e^x=(x^2+2x)e^x \Rightarrow f'(1)=3e$

따라서

$g'(2e)=\dfrac{1}{2f'(g(2e))}=\dfrac{1}{2f'(1)}=\dfrac{1}{6e}$이다.

답 ①

이번에는 $g(2f(x))=x$를 이용하여 풀어보자.

$g(2f(x))=x$

양변을 x에 대하여 미분하면

$2f'(x)g'(2f(x))=1$

$g'(2e)$의 값을 구해야 하므로

$2f(a)=2e \Rightarrow f(a)=e \Rightarrow a^2e^a=e \Rightarrow a=1\ (\because\ a\geq 0)$

$\Rightarrow f(1)=e$

$g'(2f(x))=\dfrac{1}{2f'(x)}$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$g'(2f(1))=\dfrac{1}{2f'(1)}$

$f'(x)=2xe^x+x^2e^x=(x^2+2x)e^x \Rightarrow f'(1)=3e$

따라서 $g'(2e)=g'(2f(1))=\dfrac{1}{2f'(1)}=\dfrac{1}{6e}$이다.

63. ④

096

$h(t)=t\times\{f(t)-g(t)\}$이므로

$h'(t)=\{f(t)-g(t)\}+t\{f'(t)-g'(t)\}$

$h'(5)=\{f(5)-g(5)\}+5\{f'(5)-g'(5)\}$

곡선 $y=x^3+2x^2-15x+5$과 직선 $y=5$가 만나는 세 점 중에서 x좌표가 가장 큰 점의 좌표가 $(f(5),\ 5)$
가장 작은 점의 좌표가 $(g(5),\ 5)$이므로

$x^3+2x^2-15x+5=5 \Rightarrow x^3+2x^2-15x=0$

$\Rightarrow x(x+5)(x-3)=0 \Rightarrow f(5)=3,\ g(5)=-5$

$f(5)$와 $g(5)$의 값은 쉽게 구했는데
$f'(5),\ g'(5)$의 값은 어떻게 구할 수 있을까?

두 점 $(f(t),\ t)$, $(g(t),\ t)$는 곡선 $y=x^3+2x^2-15x+5$ 위의 점이므로 대입하면 다음이 성립한다.

$t=\{f(t)\}^3+2\{f(t)\}^2-15\{f(t)\}+5 \ \cdots$ ㉠

$t=\{g(t)\}^3+2\{g(t)\}^2-15\{g(t)\}+5 \ \cdots$ ㉡

㉠의 양변을 t에 대하여 미분하면

$1=3f'(t)\{f(t)\}^2+4f'(t)f(t)-15f'(t)$

양변에 $t=5$를 대입하면

$1=3f'(5)\{f(5)\}^2+4f'(5)f(5)-15f'(5)$

$f(5)=3$이므로

$1=27f'(5)+12f'(5)-15f'(5) \Rightarrow f'(5)=\dfrac{1}{24}$

㉡의 양변을 t에 대하여 미분하면

$1=3g'(t)\{g(t)\}^2+4g'(t)g(t)-15g'(t)$

양변에 $t=5$를 대입하면

$1=3g'(5)\{g(5)\}^2+4g'(5)g(5)-15g'(5)$

$g(5)=-5$이므로

$1=75g'(5)-20g'(5)-15g'(5) \Rightarrow g'(5)=\dfrac{1}{40}$

따라서 $h'(5)=\{f(5)-g(5)\}+5\{f'(5)-g'(5)\}$

$=\{3-(-5)\}+5\left\{\dfrac{1}{24}-\dfrac{1}{40}\right\}$

$=8+5\times\dfrac{1}{60}=8+\dfrac{1}{12}=\dfrac{97}{12}$

이다.

답 ④

다른 방법으로 풀어보자.

첫 번째 풀이와 같은 방법으로 $f(5)=3,\ g(5)=-5$를 얻을 수 있다.

$i(t)=t^3+2t^2-15t+5$라 하면

$i'(t)=3t^2+4t-15$이고

두 점 $(f(t),\ t)$, $(g(t),\ t)$는 곡선 $y=i(x)$ 위의 점이므로 다음이 성립한다.

$i(f(t))=t \ \cdots$ ㉠

$i(g(t))=t \ \cdots$ ㉡

역함수 미분법을 이용하여 $f'(5),\ g'(5)$의 값을 구해보자.

㉠의 양변을 t에 대하여 미분하면

$f'(t)i'(f(t))=1$

$f'(t)=\dfrac{1}{i'(f(t))}$의 양변에 $t=5$을 대입하면

$f'(5)=\dfrac{1}{i'(f(5))}=\dfrac{1}{i'(3)}=\dfrac{1}{27+12-15}=\dfrac{1}{24}$

㉡의 양변을 t에 대하여 미분하면

$g'(t)i'(g(t))=1$

$g'(x)=\dfrac{1}{i'(g(x))}$의 양변에 $t=5$을 대입하면

$g'(5)=\dfrac{1}{i'(g(5))}=\dfrac{1}{i'(-5)}=\dfrac{1}{75-20-15}=\dfrac{1}{40}$

Tip

〈그땐 그랬지〉

2016년 수능 B형 21번에 출제되었던 문제였고
그 당시 B형 1등급 컷이 96점이었다.
즉, 이 문항을 틀렸다면 다른 문제들을 모두 맞아야
딱 1등급 컷이었다.

사실 지금 보면 워낙 노출이 많이 되어 아무것도
아닌 문제 같지만 그 당시 이 문제를 수능장에서
처음 본 학생들이 느끼는 체감 난이도는 아주 높았다.
시험이 끝나고 난 뒤 30번보다 21번이 더
어려웠다는 학생들이 대다수였을 정도로
결코 만만치 않았던 문제였다.

문제의 접근이 막막할 때는 문제를 풀려고
노력하기보다는 '이 문제는 어떤 개념이
사용되었을까?'를 떠올려보도록 하자.

Theme 22 이계도함수

64. 10

037

$g'(1)=-e,\ g''(1)=2e$

$f(x)=x^2+ax+b$라 하면
$g(x)=(x^2+ax+b)e^x$이므로
$g'(x)=(2x+a)e^x+(x^2+ax+b)e^x$
$g''(x)=2e^x+(2x+a)e^x+(2x+a)e^x+(x^2+ax+b)e^x$

$g'(x)=(2x+a)e^x+(x^2+ax+b)e^x$
위 식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$g'(1)=(2+a)e+(1+a+b)e$

$=(2a+b+3)e=-e$

$\Rightarrow 2a+b+3=-1 \Rightarrow 2a+b=-4$

$g''(x)=2e^x+(2x+a)e^x+(2x+a)e^x+(x^2+ax+b)e^x$
위 식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$g''(1)=2e+(2+a)e+(2+a)e+(1+a+b)e$

$=(3a+b+7)e=2e$

$\Rightarrow 3a+b=-5$

$2a+b=-4,\ 3a+b=-5$를 연립하면
$a=-1,\ b=-2$이므로
$f(x)=x^2-x-2$
따라서 $f(4)=16-4-2=10$이다.

답 10

65. 36

038

(가) $\dfrac{f'(x)}{2}=1+\{f(x)\}^2$

(나) $f\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=1$

$\dfrac{f'(x)}{2}=1+\{f(x)\}^2$의 양변에 $x=\dfrac{\pi}{8}$를 대입하면

$\dfrac{1}{2}f'\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=1+\left\{f\left(\dfrac{\pi}{8}\right)\right\}^2 \Rightarrow f'\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=4$

$\dfrac{f'(x)}{2}=1+\{f(x)\}^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{f''(x)}{2}=2f'(x)f(x)$

위 식의 양변에 $x=\dfrac{\pi}{8}$을 대입하면

$$\frac{f''\left(\frac{\pi}{8}\right)}{2}=2f'\left(\frac{\pi}{8}\right)f\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{8}\right)=4f'\left(\frac{\pi}{8}\right)f\left(\frac{\pi}{8}\right)=4\times4\times1=16$$

$g(x)=e^{f'(x)f(x)}$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$g'(x)=\{f''(x)f(x)+f'(x)f'(x)\}e^{f'(x)f(x)}$

위 식의 양변에 $x=\dfrac{\pi}{8}$을 대입하면

$$g'\left(\frac{\pi}{8}\right)=\left\{f''\left(\frac{\pi}{8}\right)f\left(\frac{\pi}{8}\right)+f'\left(\frac{\pi}{8}\right)f'\left(\frac{\pi}{8}\right)\right\}e^{f'\left(\frac{\pi}{8}\right)f\left(\frac{\pi}{8}\right)}$$

$$=(16+16)e^4=32e^4=ae^b$$

따라서 $a+b=32+4=36$이다.

답 36

66. ②

039

$g(x)=f(x)\sin 2x$

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^2}=0$

$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x^2}\times\sin 2x\right)=0$

$f(x)$는 다항함수이므로 최고차항을 $ax^n\ (a\neq 0)$라 하자.
이때, $n\geq 2$이면 (가) 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $f(x)$는 일차함수 또는 상수함수이어야 하므로
$f(x)=ax+b$라고 식을 세울 수 있다.

$g(x)=(ax+b)\sin 2x$

$g'(x)=a\sin 2x+2(ax+b)\cos 2x$

(나) $\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)}{x}=8$

분모가 0으로 가는데 극한값이 존재하므로
분자는 0으로 가야 한다.
$\lim_{x\to 0}g'(x)=0 \Rightarrow g'(0)=0 \Rightarrow b=0$

$g'(x)=a\sin 2x+2ax\cos 2x$
$g''(x)=2a\cos 2x+2a\cos 2x-4ax\sin 2x$

$\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x-0}=g''(0)=8$

$\Rightarrow 4a=8 \Rightarrow a=2 \Rightarrow f(x)=2x$

$g(x)=2x\sin 2x,\ g'(x)=2\sin 2x+4x\cos 2x$

$h(x)=\ln|g(x)|$

$h'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}$

따라서 $h'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{g'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{g\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{2}{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{\pi}$이다.

답 ②

Theme 23 접선의 방정식

67. ②

012

$f(x)=3\ln(x^2+2)$라 하면 $f'(x)=\frac{6x}{x^2+2}$

접점의 좌표를 t라 하면

$f'(t)=2 \Rightarrow \frac{6t}{t^2+2}=2 \Rightarrow 3t=t^2+2 \Rightarrow t^2-3t+2=0$

$\Rightarrow (t-2)(t-1)=0 \Rightarrow t=1$ or $t=2$

① $t=1$일 때
$f(1)=3\ln 3,\ f'(1)=2$이므로
접선의 방정식은 $y=2(x-1)+3\ln 3=2x-2+3\ln 3$

② $t=2$일 때
$f(2)=3\ln 6,\ f'(2)=2$이므로
접선의 방정식은 $y=2(x-2)+3\ln 6=2x-4+3\ln 6$

따라서 $y_1+y_2=-2+3\ln 3-4+3\ln 6=3\ln 18-6$이다.

답 ②

68. ①

065

$y=ke^x+1,\ \ y=x^2-3x+4\ (k>0)$
$y'=ke^x,\ \ y'=2x-3$

점 P의 x좌표를 t라 하면
$ke^t+1=t^2-3t+4$

$ke^t\times(2t-3)=-1$
이므로 연립하면

$(t^2-3t+3)\times(2t-3)=-1 \Rightarrow 2t^3-9t^2+15t-8=0$

$\Rightarrow (t-1)(2t^2-7t+8)=0 \Rightarrow t=1$

$t=1$을 $ke^t\times(2t-3)=-1$에 대입하면
$ke\times(-1)=-1 \Rightarrow k=\frac{1}{e}$

따라서 $k=\frac{1}{e}$이다.

답 ①

69. 10

074

$g(x)=\sin x$

$h(x)=g(f(x))$라 하면

$h'(x)=f'(x)g'(f(x))$

$x=1$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(1)\cos(f(1))(x-1)+\sin(f(1))$

원점을 지나므로 $(0,\ 0)$을 대입하면

$0=-f'(1)\cos(f(1))+\sin(f(1))$

$\Rightarrow f'(1)\cos(f(1))=\sin(f(1))$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-\frac{\pi}{6}}{x-1}=k$$

분모가 0으로 가는데 극한값이 존재하므로

분자도 0으로 가야한다.

$\lim_{x\to1}\left(f(x)-\frac{\pi}{6}\right)=0 \Rightarrow f(1)=\frac{\pi}{6}$

$(\because\ f(x)$는 미분가능한 함수)

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-\frac{\pi}{6}}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=k$$

$f(1)=\frac{\pi}{6},\ f'(1)=k$을

$f'(1)\cos(f(1))=\sin(f(1))$에 대입하면

$\frac{\sqrt{3}}{2}k=\frac{1}{2} \Rightarrow k=\frac{1}{\sqrt{3}}$

따라서 $30k^2=30\times\frac{1}{3}=10$이다.

답 10

Theme 24 함수의 증가와 감소

70. ②

019

$f(x)=-\ln(\cos x)-ax^2$

$f'(x)=-\frac{-\sin x}{\cos x}-2ax=\tan x-2ax$

열린구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 증가해야 하므로

$f'(x)\geq0 \Rightarrow \tan x-2ax\geq0 \Rightarrow \tan x\geq 2ax\ \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$

$=y$를 붙여 함수의 그래프로 해석해보자.

$y=\tan x$ 의 그래프가 $y=2ax$의 그래프보다 같거나

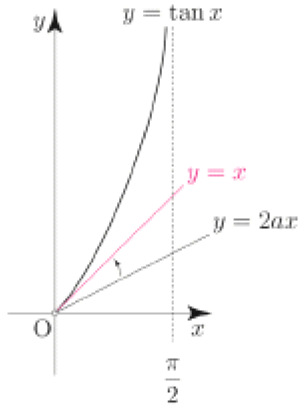
위에 존재해야 한다.

$g(x)=\tan x$라 하면 $g'(x)=\sec^2 x \Rightarrow g'(0)=1$

함수 $g(x)$는 원점에서의 접선의 기울기가 1이므로

부등식 $\tan x\geq 2ax\ \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$이 성립하려면

$1\geq 2a \Rightarrow a\leq\frac{1}{2}$



따라서 실수 a의 최댓값은 $\frac{1}{2}$이다.

답 ②

71. 1

021

$f(x)=\dfrac{(\ln x)^2+k}{x}$ $(x>0)$의 역함수가 존재하려면

$f(x)$가 증가함수 또는 감소함수이어야 한다.

즉, $f'(x)\le 0$ or $f'(x)\ge 0$

$f'(x)=\dfrac{2\ln x-(\ln x)^2-k}{x^2}=\dfrac{-(\ln x)^2+2\ln x-k}{x^2}$이므로

Semi 도함수 $f'(x)=-(\ln x)^2+2\ln x-k$

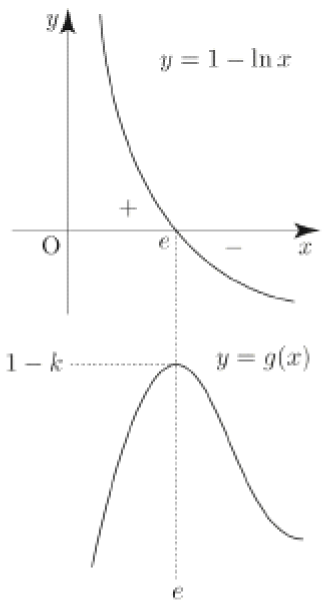
$g(x)=-(\ln x)^2+2\ln x-k$라 하면

$g'(x)=-\dfrac{2\ln x}{x}+\dfrac{2}{x}=\dfrac{2(1-\ln x)}{x}$이므로

Semi 도함수 $g'(x)=1-\ln x$

$\lim\limits_{x\to 0+}g(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=-\infty$

이를 바탕으로 $g(x)$를 그리면 다음과 같다.



즉, $g(e)=1-k\le 0 \Rightarrow g(x)\le 0 \Rightarrow f'(x)\le 0$

$f(x)$는 감소함수 $\Rightarrow$ 역함수 존재

이므로 역함수가 존재하려면 $1-k\le 0 \Rightarrow 1\le k$

따라서 k의 최솟값은 1이다.

답 1

72. ①

27. [출제의도] 미분법을 활용하여 함수를 구하는 문제를 해결한다.

$g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고 역함수를 가지려면 $g(x)$는 일대일대응이어야 한다.

$f'(x)=3e^{3x}-a$, $g'(x)=\begin{cases} f'(x) & (x>k) \\ -f'(x) & (x<k)\end{cases}$ 에서

$a\le 0$이면 모든 실수 x에 대해 $f'(x)>0$이다.

$x>k$일 때 $g'(x)>0$이고 $x<k$일 때 $g'(x)<0$이므로 $g(x)$는 역함수를 갖지 않는다.

$a>0$이면 $f'(x)=0$에서 $x=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{a}{3}$이고

$x<\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{a}{3}$이면 $f'(x)<0$,

$x>\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{a}{3}$이면 $f'(x)>0$이므로 $k=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{a}{3}$

$g(x)$가 $x=k$에서 연속이므로

$f(k)=-f(k)$, $f(k)=0$

$f(k)=f\left(\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{a}{3}\right)=\dfrac{a}{3}-\dfrac{a}{3}\ln\dfrac{a}{3}=0$, $a=3e$, $k=\dfrac{1}{3}$

따라서 $a\times k=e$

Theme 25 함수의 극대와 극소

73. ③

026

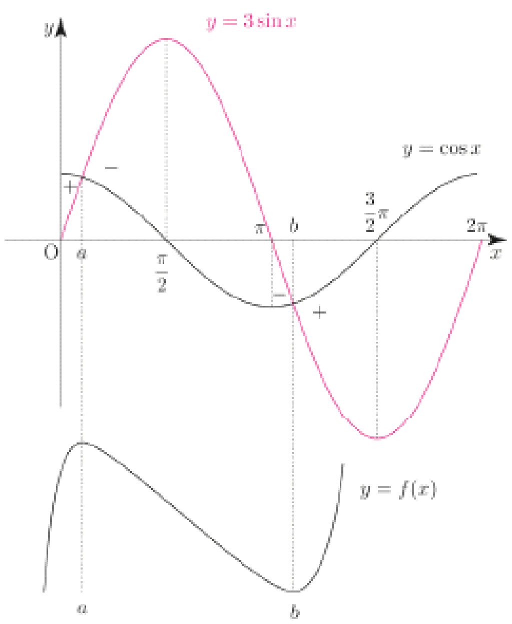
$f(x)=\dfrac{\sin x}{e^{3x}}=e^{-3x}\sin x$

$f'(x)=-3e^{-3x}\sin x+e^{-3x}\cos x=(\cos x-3\sin x)e^{-3x}$

Semi 도함수 $f'(x)=\cos x-3\sin x$

두 함수 $y=\cos x$, $y=3\sin x$의 그래프를 이용하여

빼기함수 Technique으로 도함수의 부호를 처리해 보자.



$\cos x-3\sin x=0 \Rightarrow \cos x=3\sin x \Rightarrow \tan x=\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow \tan a=\tan b=\dfrac{1}{3}$

$0<a<\dfrac{\pi}{2}$, $\pi<b<\dfrac{3}{2}\pi$이므로

$\cos a=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$, $\sin a=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

$\cos b=-\dfrac{3}{\sqrt{10}}$, $\sin b=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

따라서 $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

$$=\frac{3}{\sqrt{10}}\times\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)-\frac{1}{\sqrt{10}}\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

$$=-\frac{9}{10}+\frac{1}{10}=-\frac{8}{10}=-\frac{4}{5}$$

이다.

답 ③

74. 51

028

$f(x)=\dfrac{10}{n}x-\ln(2x^2+n)$

$f'(x)=\dfrac{10}{n}-\dfrac{4x}{2x^2+n}$

두 함수 $y=\dfrac{10}{n}$, $y=\dfrac{4x}{2x^2+n}$의 그래프를 이용하여

빼기함수 Technique으로 도함수의 부호를 처리해 보자.

$g(x)=\dfrac{4x}{2x^2+n}$, $g'(x)=\dfrac{4(n-2x^2)}{(2x^2+n)^2}$

Semi 도함수 $g'(x)=n-2x^2$

$g'\left(\sqrt{\dfrac{n}{2}}\right)=g'\left(-\sqrt{\dfrac{n}{2}}\right)=0$

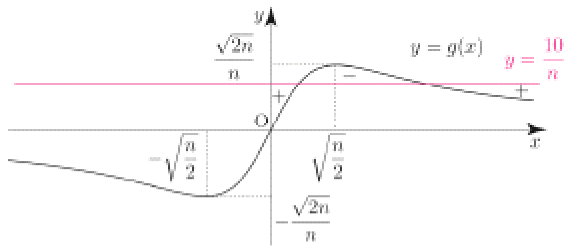
$g\left(\sqrt{\dfrac{n}{2}}\right)=\dfrac{\sqrt{2n}}{n}$, $g\left(-\sqrt{\dfrac{n}{2}}\right)=-\dfrac{\sqrt{2n}}{n}$

($x=\sqrt{\dfrac{n}{2}}$에서 극대, $x=-\sqrt{\dfrac{n}{2}}$에서 극소)

$g(-x)=-g(x)$ (기함수)

$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=0$

이를 바탕으로 $g(x)$를 그리면 다음과 같다.



$f(x)$가 극값을 갖도록 하려면 $f'(x)$의 부호변화가 있어야

하므로 $\dfrac{10}{n}<\dfrac{\sqrt{2n}}{n} \Rightarrow 10<\sqrt{2n} \Rightarrow 50<n$

따라서 자연수 n의 최솟값은 51이다.

답 51

Theme 26 변곡점

75. ⑤

066

$y=\left(\ln\frac{1}{ax}\right)^2=(-\ln ax)^2=(\ln ax)^2$

$f(x)=(\ln ax)^2$라 하면

$f'(x)=2\ln ax\times\frac{a}{ax}=\frac{2\ln ax}{x}$

$f''(x)=\frac{2\times\frac{a}{ax}\times x-2\ln ax}{x^2}=\frac{2(1-\ln ax)}{x^2}$

$x=\frac{e}{a}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 변하므로

$f(x)$는 변곡점 $\left(\frac{e}{a},\ 1\right)$을 갖는다.

변곡점이 $y=2x$ 위에 있으므로 $\left(\frac{e}{a},\ 1\right)$을 대입하면

$1=\frac{2e}{a}\ \Rightarrow\ a=2e$

따라서 $a=2e$이다.

답 ⑤

76. 2

077

$f(x)=3\sin kx+4x^3$

$f'(x)=3k\cos kx+12x^2$

$f''(x)=24x-3k^2\sin kx=3(8x-k^2\sin kx)$

Semi 이계도함수 $f''(x)=8x-k^2\sin kx$

두 함수 $y=8x$, $y=k^2\sin kx$의 그래프를 이용하여

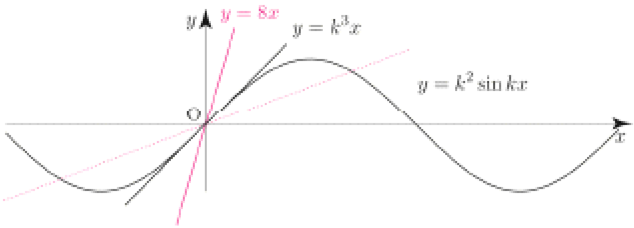
빼기함수 Technique으로 이계도함수의 부호를 처리해 보자.

실수 k의 최댓값을 구하는 것이므로 $k>0$라고 가정하고 풀어보자.

$g(x)=k^2\sin kx$라 하면

$g'(x)=k^3\cos kx$이므로 $g'(0)=k^3$

$x=0$에서의 접선의 방정식은 $y=k^3x$이다.



$k^3>8$이면 위의 접선처럼 $f''(x)$의 부호가 변하는 점이 오직 하나일 수가 없으므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $f''(x)$의 부호가 변하는 점이 오직 하나 존재하려면

$k^3\le 8\ \Rightarrow\ k\le 2$ 이어야 한다.

따라서 실수 k의 최댓값은 2이다.

(참고로 k가 음수일 때, 항상 해당 조건을 만족하는 것은 아니다. 예를 들어 $k=-4$일 때, $y=8x$의 그래프와 $y=16\sin(-4x)$의 그래프는 서로 다른 5개의 점에서 만난다.)

답 2

77. ③

091

$f(x)=ae^{3x}+be^{x}$

$f'(x)=3ae^{3x}+be^{x}$

$f''(x)=9ae^{3x}+be^{x}$

(가) $x_1<\ln\frac{2}{3}<x_2$를 만족시키는 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 $f''(x_1)f''(x_2)<0$이다.

$x=\ln\frac{2}{3}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 변하므로

$f(x)$는 변곡점 $\left(\ln\frac{2}{3},\ f\left(\ln\frac{2}{3}\right)\right)$을 갖는다.

$f''\left(\ln\frac{2}{3}\right)=0$

$9a\times\left(\frac{2}{3}\right)^3+b\times\frac{2}{3}=0 \Rightarrow \frac{8a+2b}{3}=0 \Rightarrow b=-4a$

$a>0$이므로 $b<0$

(나) 구간 $[k,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하도록 하는 실수 k의 최솟값을 m이라 할 때, $f(2m)=-\frac{80}{9}$이다.

구간 $[k,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$가 역함수가 존재하려면
구간 $[k,\ \infty)$에서 증가함수이거나 감소함수이어야 한다.

$f'(x)=3ae^{3x}+be^{x}=ae^{x}(3e^{2x}-4)$

Semi 도함수 $f'(x)=3e^{2x}-4$

$f'(x)=0 \Rightarrow e^{2x}=\frac{4}{3} \Rightarrow x=\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$

$x=\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 변하므로

$\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}\le k \Rightarrow m=\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$

$f(x)=ae^{3x}+be^{x}=ae^{3x}-4ae^{x}$

$f(2m)=-\frac{80}{9} \Rightarrow f\left(\ln\frac{4}{3}\right)=a\times\frac{64}{27}-4a\times\frac{4}{3}=-\frac{80}{9}$

$\Rightarrow -\frac{80}{27}a=-\frac{80}{9} \Rightarrow a=3$

따라서 $f(0)=a-4a=-3a=-9$이다.

답 ③

78. 5

037

$f(x)=a\ln(x^2+1)$

$f'(x)=\frac{2ax}{x^2+1}$

$f''(x)=\frac{2a(1-x^2)}{(x^2+1)^2}=\frac{2a(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$

$f''(1)=0,\ f''(-1)=0$

$x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 변하고
$x=-1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 변하므로
$f(x)$는 변곡점 $(1,\ a\ln2)$, $(-1,\ a\ln2)$를 갖는다.

(가) 곡선 $y=f(x)$의 두 변곡점에서의 접선은 서로 수직이다.
$f'(1)\times f'(-1)=-1 \Rightarrow a\times(-a)=-1 \Rightarrow a=1\ (\because a>0)$

$f(x)=\ln(x^2+1)$

$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$

(나) 자연수 n에 대하여 곡선 $y=f(x)-\frac{n}{4}x^2$은 오직 $x=b$에서만 극값을 갖는다.

$g(x)=f(x)-\frac{n}{4}x^2$라 하면

$g'(x)=f'(x)-\frac{n}{2}x=\frac{2x}{x^2+1}-\frac{n}{2}x$

두 함수 $y=\frac{2x}{x^2+1}$, $y=\frac{n}{2}x$의 그래프를 이용하여

빼기함수 Technique으로 도함수의 부호를 처리해 보자.

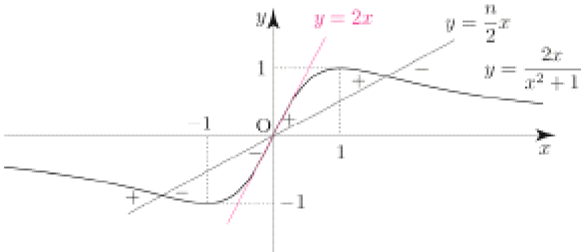
$h(x)=\frac{2x}{x^2+1}$, $h'(x)=\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$

$h''(x)=\frac{4x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$

$h'(0)=2$이고 $x=0$의 좌우에서 $h''(x)$의 부호가 변하므로
$(0,\ 0)$에서 변곡점을 갖고, 변곡접선(뚫는 접선)의 기울기는 2이다.

Tip Guide step [예제7] 해설에서도 언급했듯이
$y=\frac{kx}{x^2+1}$ 꼴의 그래프는 자주 나오는 편이니
암기하도록 하자.

만약 $\frac{n}{2} < 2$라면 아래와 같이 $f'(x) - \frac{n}{2}x$의 부호가 변하는 x의 값이 3개 존재하므로 (나) 조건을 만족시키지 않는다.



자연수 n의 값과 관계없이 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 변하므로 $x=0$에서 극값을 갖는다.
즉, (나) 조건을 만족시키려면 $x=0$에서만 극값을 가져야 하므로 $b=0$이고, $\frac{n}{2} \geq 2 \Rightarrow n \geq 4$이므로 $c=4$이다.

따라서 $a+b+c=1+0+4=5$이다.

답 5

79. ㄱ, ㄴ, ㅁ, ㅇ, ㅈ

038

$f(x)=2\ln(3-x)+\frac{1}{2}x^2 \ (x<3)$

$f'(x)=\frac{-2}{3-x}+x=\frac{-2+3x-x^2}{3-x}=\frac{-(x-1)(x-2)}{3-x}$

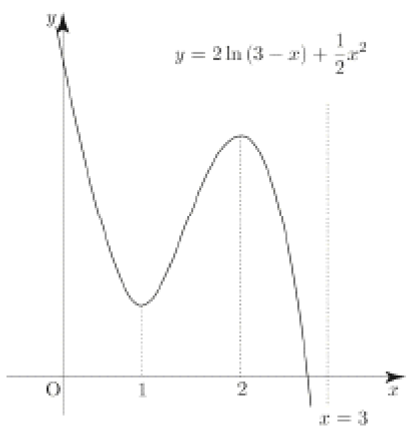
$x<3 \Rightarrow 3-x>0$이므로

Semi 도함수 $f'(x)=-(x-1)(x-2)$

$f''(x)=\frac{x^2-6x+7}{(x-3)^2}$

$\lim_{x\to 3-} f(x)=-\infty$

이를 바탕으로 $f(x)$를 그리면 다음과 같다.



ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

$f'(1)=0$이고 $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 $-+$로 변하므로 ㄱ은 참이다.

ㄴ. 곡선 $y=f(x)$는 $x=3$을 점근선으로 갖는다.

$\lim_{x\to 3-} f(x)=-\infty$이므로 ㄴ은 참이다.

ㄷ. $x_1<x_2<2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_2)<f(x_1)$이다.

ㄷ은 "열린구간 $(-\infty, 2)$에서 $f(x)$가 감소한다."와 동치이다.
열린구간 $(-\infty, 1)$에서 $f'(x)<0$이고
열린구간 $(1, 2)$에서 $f'(x)>0$이므로
ㄷ은 거짓이다.

ㄹ. 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 개수는 2이다.

$$f''(x)=\frac{x^2-6x+7}{(x-3)^2}$$
$$=\frac{\{x-(3+\sqrt{2})\}\{x-(3-\sqrt{2})\}}{(x-3)^2} \ (x<3)$$

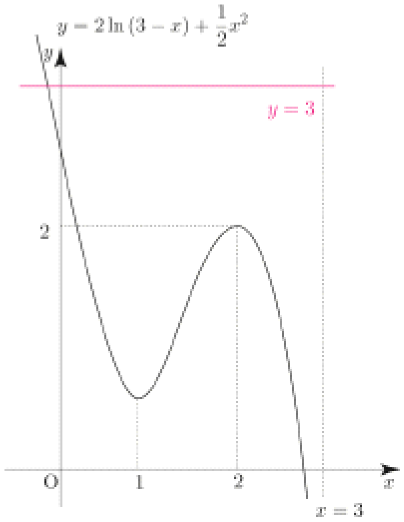
이므로 $f''(3-\sqrt{2})=0$이고, $x=3-\sqrt{2}$에서 $f''(x)$의 부호가 변하므로 변곡점 $(3-\sqrt{2}, f(3-\sqrt{2}))$를 갖는다.
곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 개수는 1이다.
따라서 ㄹ은 거짓이다.

Tip 정의역이 $x<3$이므로 점 $(3+\sqrt{2}, f(3+\sqrt{2}))$은 변곡점이 될 수 없다.

ㅁ. 곡선 $y=f(x)$가 열린구간 $(-\infty, k)$에서 아래로 볼록하도록 하는 실수 k의 최댓값은 $3-\sqrt{2}$이다.

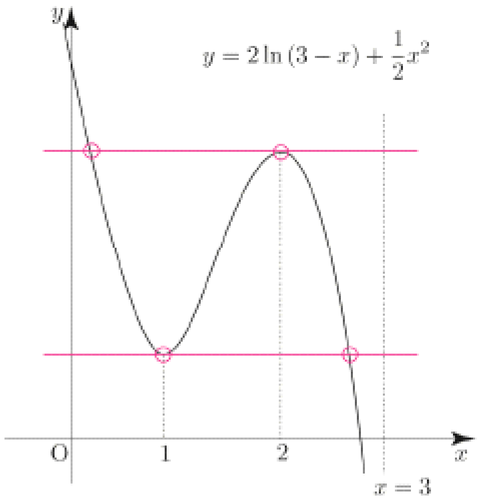
Semi 이계도함수
$f''(x)=\{x-(3+\sqrt{2})\}\{x-(3-\sqrt{2})\} \ (x<3)$
이므로 열린구간 $(-\infty, 3-\sqrt{2})$에서 $f''(x)>0$이므로
열린구간 $(-\infty, 3-\sqrt{2})$에서 아래로 볼록하다.
따라서 ㅁ은 참이다.

ㅂ. 방정식 $f(x)=3$은 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



$f(2)=2$이므로 두 그래프 $y=f(x)$, $y=3$의 교점은 오직 하나 존재한다.
따라서 ㅂ은 거짓이다.

ㅅ. 방정식 $f(x)=f(a)$가 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a의 개수는 2이다.



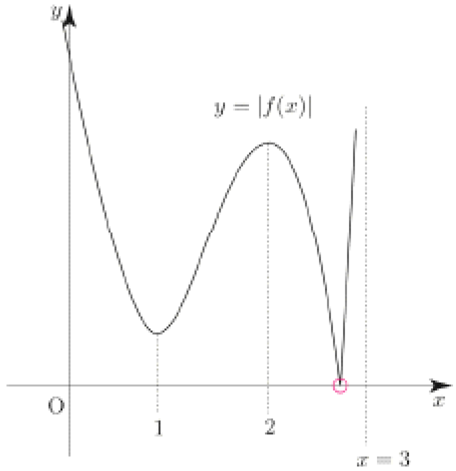
위 그림처럼 조건을 만족시키는 실수 a의 개수는 4이다.
따라서 ㅅ은 거짓이다.

ㅇ. $\lim_{x\to b+}\frac{|f(x)|-|f(b)|}{x-b}\neq\lim_{x\to b-}\frac{|f(x)|-|f(b)|}{x-b}$를 만족시키는 실수 b는 오직 하나 존재한다.

ㅇ은 "함수 $|f(x)|$는 오직 한 점에서만 미분가능하지 않다."와 동치이다.

Tip 바로 이해하기 어렵다면 치환을 활용해보자.
$g(x)=|f(x)|$라 하면
$$\lim_{x\to b+}\frac{|f(x)|-|f(b)|}{x-b}\neq\lim_{x\to b-}\frac{|f(x)|-|f(b)|}{x-b}$$
$$\Rightarrow\lim_{x\to b+}\frac{g(x)-g(b)}{x-b}\neq\lim_{x\to b-}\frac{g(x)-g(b)}{x-b}$$
즉, 함수 $g(x)$는 $x=b$에서 미분가능하지 않다.

$f(1)=2\ln2+\frac{1}{2}=\ln4+\frac{1}{2}>0$이므로
함수 $|f(x)|$는 오직 한 점에서 미분가능하지 않다.
따라서 ㅇ은 참이다.



ㅈ. $x_1<3-\sqrt{2}<x_2<3$를 만족시키는 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 $f''(x_1)f''(x_2)<0$이다.

$$f''(x)=\frac{x^2-6x+7}{(x-3)^2}$$
$$=\frac{\{x-(3+\sqrt{2})\}\{x-(3-\sqrt{2})\}}{(x-3)^2}\quad(x<3)$$
$x=3-\sqrt{2}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 변하므로
ㅈ은 참이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㅁ, ㅇ, ㅈ

Theme 27 함수의 최대와 최소

80. ④

039

닫힌구간 $[0,\ 4]$

$f(x)=(x^2-3)e^{-x+3}$

$f'(x)=-(x^2-2x-3)e^{-x+3}=-(x+1)(x-3)e^{-x+3}$

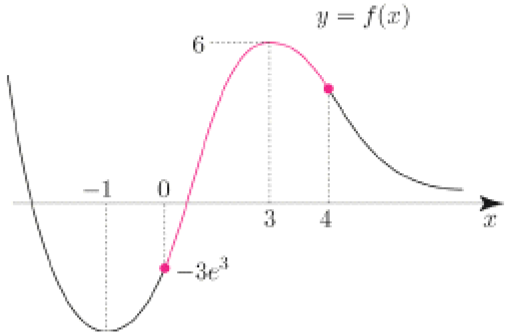
Semi 도함수 $f'(x)=-(x+1)(x-3)$

$f'(-1)=0,\ f'(3)=0 \quad \Rightarrow \ f(-1)=-2e^4,\ f(3)=6$

$\Rightarrow\ x=-1$에서 극소, $x=3$에서 극대

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$

이를 바탕으로 $f(x)$를 그리면 다음과 같다.



닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 $f(x)$는

$x=3$에서 최댓값 $f(3)=6=M$을 갖고,

$x=0$에서 최솟값 $f(0)=-3e^3=m$을 갖는다.

따라서 $M\times m=6\times(-3e^3)=-18e^3$이다.

답 ④

81. ②

27. 출제의도 : 도함수를 활용하여 접선의 방정식과 함수의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$y=a^x$에서 $y'=a^x\ln a$

이때 점 $\mathrm{A}(t,\ a^t)$에서의 접선 l의 기울기는

$a^t\ln a$

이므로 직선 l에 수직인 직선의 기울기는

$-\dfrac{1}{a^t\ln a}$

그러므로 점 A를 지나고 직선 l에 수직인 직선의 방정식은

$y-a^t=-\dfrac{1}{a^t\ln a}(x-t)$

이 식에 $y=0$을 대입하면

$-a^t=-\dfrac{1}{a^t\ln a}(x-t)$

$x=t+a^{2t}\ln a$

이므로 점 B의 좌표는

$\mathrm{B}(t+a^{2t}\ln a,\ 0)$

한편 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H, 원점을 O라 하면

$$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\frac{\overline{\mathrm{HO}}}{\overline{\mathrm{HB}}}=\frac{t}{a^{2t}\ln a}$$

$f(t)=\dfrac{t}{a^{2t}\ln a}$라 하면

$$f'(t)=\frac{a^{2t}\ln a-ta^{2t}\times 2(\ln a)^2}{(a^{2t}\ln a)^2}$$

$$=\frac{a^{2t}\ln a(1-2t\ln a)}{(a^{2t}\ln a)^2}$$

$f'(t)=0$에서

$1-2t\ln a=0$

$t=\dfrac{1}{2\ln a}$

이고, 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 조사하면 함수 $f(t)$는 $t=\frac{1}{2\ln a}$에서 최댓값을 가짐을 알 수 있다.

따라서 $\frac{1}{2\ln a}=1$이므로

$\ln a=\frac{1}{2}$

$a=\sqrt{e}$

정답 ②

Theme 28 방정식의 실근의 개수

82. ②

074

$x^2-5x+2\ln x=t$

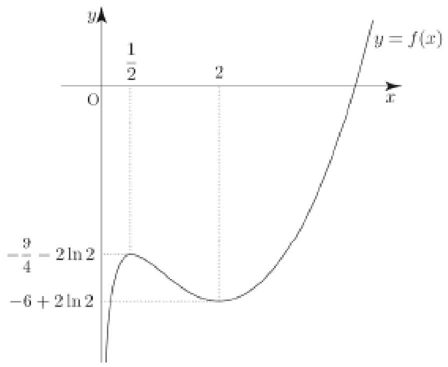
$f(x)=x^2-5x+2\ln x$라 하면

$f'(x)=2x-5+\frac{2}{x}=\frac{2x^2-5x+2}{x}=\frac{(2x-1)(x-2)}{x}$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{9}{4}-2\ln 2,\ f(2)=-6+2\ln 2$

$\lim_{x\to 0+}f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$

이를 바탕으로 $f(x)$를 그리면



x에 대한 방정식 $x^2-5x+2\ln x=t$가 서로 다른 2개의 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수가 2가 되어야 하므로

$t=-\frac{9}{4}-2\ln 2$ or $t=-6+2\ln 2$

따라서 모든 실수 t의 값의 합은 $-\frac{33}{4}$이다.

답 ②

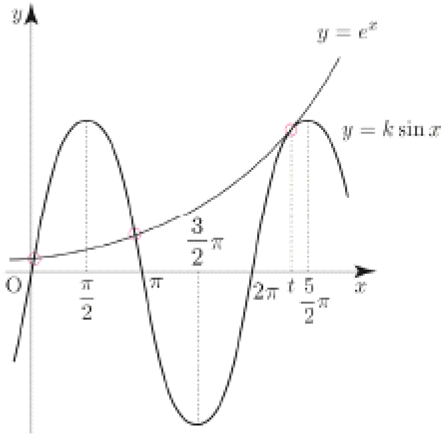
83. ④

073

$f(x)=e^x,\quad g(x)=k\sin x$

$f(x)=g(x)\Rightarrow e^x=k\sin x$

방정식 $e^x=k\sin x$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 3이므로 $x>0$에서 곡선 $y=e^x$와 곡선 $y=k\sin x$는 아래 그림과 같이 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.



접점의 x좌표를 t라 하면

$e^t=k\sin t$

$e^t=k\cos t$

이므로 연립하면

$k\sin t=k\cos t\Rightarrow\sin t=\cos t\Rightarrow\tan t=1$

$\Rightarrow t=2\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{9}{4}\pi\ \left(\because\ 2\pi<t<\frac{5}{2}\pi\right)$

$e^{\frac{9}{4}\pi}=k\sin\frac{9}{4}\pi\Rightarrow e^{\frac{9}{4}\pi}=k\times\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow k=\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}$

따라서 $k=\sqrt{2}e^{\frac{9\pi}{4}}$이다.

답 ④

84. ③

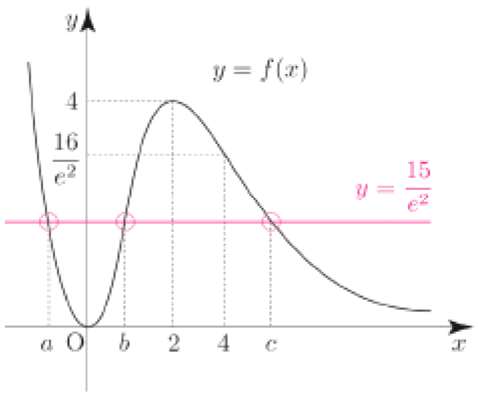
086

$f(x)=x^2e^{-x+2}$

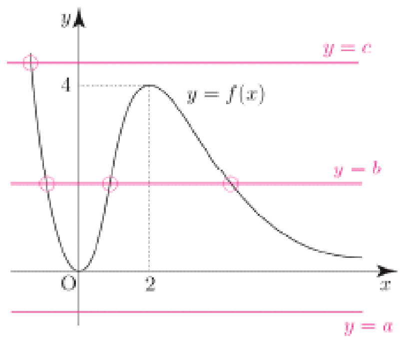
$f(4)=16e^{-2}=\dfrac{16}{e^2}$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\dfrac{15}{e^2}$가 만나는 세 점의

x좌표를 각각 a, b, c라 하면 $a<0$, $0<b<2$, $4<c$이다.



곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=a$는 만나지 않는다.
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=b$는 서로 다른 세 점에서 만난다.
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=c$는 한 점에서 만난다.



따라서 함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{15}{e^2}$의

교점의 개수는 4이다.

답 ③

Tip <왜 하필 $y=\dfrac{15}{e^2}$일까?>

c가 4보다 큰지 작은지 같은지를 알아야
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=c$가 만나는 점의
개수를 파악할 수 있기 때문이다.

즉, $f(4)=16e^{-2}=\dfrac{16}{e^2}$이므로 $4<c$인 것을

알려주기 위함이다.

Theme 29 부등식의 활용

85. ①

053

$2x+1+ke^{x^2}\ge 0 \Rightarrow ke^{x^2}\ge -2x-1 \Rightarrow k\ge(-2x-1)e^{-x^2}$

$f(x)=(-2x-1)e^{-x^2}$라 하면

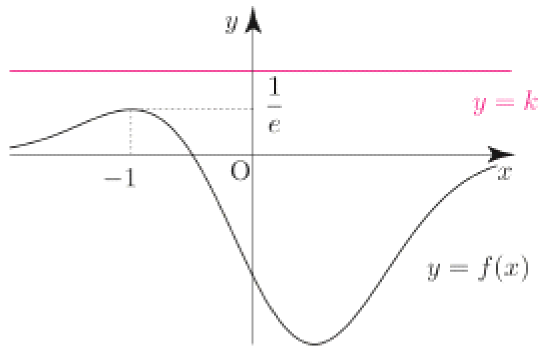
$f'(x)=-2e^{-x^2}+(4x^2+2x)e^{-x^2}=2(2x-1)(x+1)e^{-x^2}$

Semi 도함수 $f'(x)=(2x-1)(x+1)$

$f'(-1)=f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$, $f(-1)=\dfrac{1}{e}$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-2e^{-\frac{1}{4}}$

$\Rightarrow x=-1$에서 극대, $x=\dfrac{1}{2}$에서 극소

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$



$k\ge(-2x-1)e^{-x^2} \Rightarrow k\ge\dfrac{1}{e}$

따라서 실수 k의 최솟값은 $\dfrac{1}{e}$이다.

답 ①

Tip 가이드스텝에서 배운 다항함수×지수함수 빨리
그리기를 적용시켜 대략적인 그래프 개형을
파악해도 좋다.

Theme 30 속도와 가속도

86. 6

054

$x=\frac{1}{2}\cos2t,\ y=t-\frac{1}{2}\sin2t$

$\frac{dx}{dt}=-\sin2t,\ \frac{dy}{dt}=1-\cos2t$

$\frac{d^2x}{dt^2}=-2\cos2t,\ \frac{d^2y}{dt^2}=2\sin2t$

가속도가 $(1,\ a)$이므로

$-2\cos2t=1 \Rightarrow \cos2t=-\frac{1}{2} \Rightarrow \sin2t=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$a=2\sin2t=\pm\sqrt{3}$

속력은 $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{9}{4}}=\sqrt{3}=b$

따라서 $a^2+b^2=3+3=6$이다.

답 6

87. ④

056

$x=t-\frac{1}{2t},\ y=t+\frac{2}{t}$

$\frac{dx}{dt}=1+\frac{1}{2t^2}=1+\frac{1}{2}t^{-2},\ \frac{dy}{dt}=1-\frac{2}{t^2}=1-2t^{-2}$

$\frac{d^2x}{dt^2}=-t^{-3}=-\frac{1}{t^3},\ \frac{d^2y}{dt^2}=4t^{-3}=\frac{4}{t^3}$

따라서 시각 $t=2$일 때, 가속도의 크기는

$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$

$=\sqrt{\left(-\frac{1}{8}\right)^2+\left(\frac{4}{8}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{64}+\frac{16}{64}}=\frac{\sqrt{17}}{8}$

이다.

답 ④

3. 적분법

Theme 31 여러 가지 함수의 적분법

88. ④

009

$x^3f'(x)=\cos x-3x^2f(x)$

$\Rightarrow x^3f'(x)+3x^2f(x)=\cos x$

$\{x^3f(x)\}'=3x^2f(x)+x^3f'(x)$이므로

$\{x^3f(x)\}'=\cos x$

$x^3f(x)=\sin x+C$

$f(\pi)=0 \Rightarrow C=0$

$x^3f(x)=\sin x$이므로

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{8}{\pi^3}$

$x^3f'(x)=\cos x-3x^2f(x)$의 양변에 $x=\frac{\pi}{2}$를 대입하면

$\frac{\pi^3}{8}f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{3}{4}\pi^2\times\frac{8}{\pi^3} \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{48}{\pi^4}$

따라서 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{48}{\pi^4}$이다.

답 ④

89. ⑤

010

$xf'(x)-f(x)=x^2\tan^2x$

$\Rightarrow \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\tan^2x$

Tip $\frac{3}{\pi}\times f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{\pi}{3}}$의 값을 구하는 것으로부터 몫의 미분법에 대한 힌트를 얻을 수 있다.

$\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}'=\frac{f'(x)x-f(x)}{x^2}$이므로

$\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}'=\tan^2x=\sec^2x-1$

이므로

$\dfrac{f(x)}{x}=\tan x-x+C$

$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{4} \Rightarrow C=\dfrac{\pi}{4}$

$\dfrac{f(x)}{x}=\tan x-x+\dfrac{\pi}{4}$

따라서 $\dfrac{3}{\pi}\times f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)}{\dfrac{\pi}{3}}=\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{12}$이다.

답 ⑤

Theme 32 치환적분법

90. ②

25. 출제의도 : 치환적분법을 이용하여

정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=1+\dfrac{1}{x}$이므로

$\displaystyle\int_1^e\left(1+\frac{1}{x}\right)f(x)dx$

$\displaystyle=\int_1^e f'(x)f(x)dx$

$=\left[\dfrac{1}{2}\{f(x)\}^2\right]_1^e$

$=\dfrac{1}{2}\{f(e)\}^2-\dfrac{1}{2}\{f(1)\}^2$

$=\dfrac{1}{2}(e+1)^2-\dfrac{1}{2}(1+0)^2$

$=\dfrac{e^2}{2}+e$

정답 ②

91. ②

050

$\sqrt{x^2-1}=t$라 하면 $x^2-1=t^2$, $2x=2t\dfrac{dt}{dx} \Rightarrow x=t\dfrac{dt}{dx}$

$x=1$일 때, $t=0$, $x=\sqrt{2}$일 때, $t=1$

$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{2}}x^3\sqrt{x^2-1}\,dx&=\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{x^2-1}\times x^2\times x\,dx\\&=\int_0^1 t\times(t^2+1)\times t\,dt\\&=\int_0^1(t^4+t^2)dt\\&=\left[\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}\right]_0^1\\&=\frac{1}{5}+\frac{1}{3}=\frac{8}{15}\end{aligned}$$

답 ②

92. ①

020

$\{f(x)\}^2f'(x)=\dfrac{3x}{x^2+1}$

$\{f(x)^3\}'=3\{f(x)\}^2f'(x) \Rightarrow \dfrac{1}{3}\{f(x)^3\}'=\{f(x)\}^2f'(x)$

이므로

$\dfrac{1}{3}\{f(x)^3\}'=\dfrac{3x}{x^2+1} \Rightarrow \{f(x)^3\}'=\dfrac{9x}{x^2+1}$

$\{f(x)^3\}'=\dfrac{9x}{x^2+1}=\dfrac{9}{2}\times\dfrac{2x}{x^2+1}$

$\{f(x)\}^3=\dfrac{9}{2}\ln|x^2+1|+C=\dfrac{9}{2}\ln(x^2+1)+C$

$f(0)=0 \Rightarrow C=0$이므로 $\{f(x)\}^3=\dfrac{9}{2}\ln(x^2+1)$

$\displaystyle\int_0^2 x\{f(x)\}^3dx=\frac{9}{2}\int_0^2 x\ln(x^2+1)\,dx$

$x^2+1=t$라 하면 $2x=\dfrac{dt}{dx}$

$x=0$일 때, $t=1$, $x=2$일 때, $t=5$

$$\begin{aligned}\frac{9}{2}\int_0^2 x\ln(x^2+1)\,dx&=\frac{9}{4}\int_1^5\ln t\,dt\\&=\frac{9}{4}[t\ln t-t]_1^5\\&=\frac{9}{4}(5\ln5-4)\end{aligned}$$

답 ①

93. ④

062

$g(x)$와 $f(x)$는 서로 역함수 관계이므로
$g(f(x))=x$이고, 양변을 x에 대해 미분하면
$f'(x)g'(f(x))=1 \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{g'(f(x))}$

$$\int_1^a \frac{1}{g'(f(x))f(x)}dx = \int_1^a \frac{f'(x)}{f(x)}dx$$
$$= [\ln|f(x)|]_1^a = \ln|f(a)|-\ln|f(1)|$$

이고, $f(1)=8$이므로

$\ln|f(a)|-\ln 8 = 2\ln a+\ln(a+1)-\ln 2$

$\Rightarrow \ln|f(a)|=\ln 4a^2(a+1)$

$f(x)$는 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로
양의 실수 전체의 집합에서 연속이다.
즉, $a>0$일 때, $f(a)=4a^2(a+1)$ or $f(a)=-4a^2(a+1)$
이때, $f(1)=8$이므로 $f(a)=4a^2(a+1)$ $(a>0)$이다.
따라서 $f(2)=4\times4\times3=48$이다.

답 ④

94. 26

093

$-x=t$라 하면 (가) 조건에 의해서
$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)+6}{e^x}=1 \Rightarrow \lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{ae^{-2t}+be^{-t}+c+6}{e^{-t}}=1$

$\Rightarrow \lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{ae^{-t}+b+(c+6)e^t}{1}=1$

$\Rightarrow b=1,\ c=-6$

$f(x)=ae^{2x}+e^x-6$이므로 (나) 조건에 의해서
$f(\ln 2)=0 \Rightarrow ae^{2\ln 2}+e^{\ln 2}-6=0 \Rightarrow 4a+2-6=0$

$\Rightarrow a=1$

$f(x)=e^{2x}+e^x-6$
$f'(x)=2e^{2x}+e^x>0$
이므로 $f(x)$는 증가함수이다.

$x=f(s)$라 하면 $f(\ln 2)=0,\ f(\ln 4)=14$이고,

$1=f'(s)\dfrac{ds}{dx}$이므로

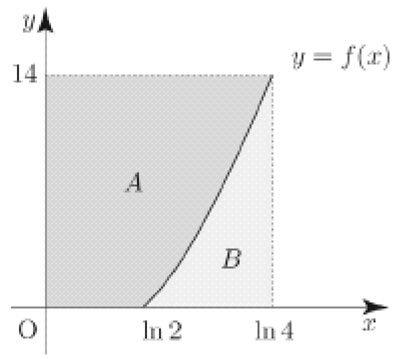
$$\int_0^{14} g(x)dx = \int_{\ln 2}^{\ln 4} g(f(s))f'(s)ds$$
$$= \int_{\ln 2}^{\ln 4} sf'(s)ds$$
$$= \Big[sf(s)\Big]_{\ln 2}^{\ln 4} - \int_{\ln 2}^{\ln 4} f(s)ds$$
$$= 14\ln 4 - \int_{\ln 2}^{\ln 4}(e^{2s}+e^s-6)ds$$
$$= 28\ln 2 - \left[\frac{1}{2}e^{2s}+e^s-6s\right]_{\ln 2}^{\ln 4}$$
$$= 28\ln 2-(8-6\ln 2) = -8+34\ln 2$$

따라서 $p+q=-8+34=26$이다.

답 26

다르게 풀어보자.

$f(x)$는 증가함수이므로 다음과 같다.



2025 규토 라이트 수2 정적분의 활용 Guide step
개념파악하기 - (5) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 사이의 넓이는 어떻게 구할까? 에서 배운 technique을 사용하면

$\int_0^{14} g(x)dx = A,\ \int_{\ln 2}^{\ln 4} f(x)dx = B$
$A+B=14\ln 4$ (직사각형의 넓이)
이므로 $A=14\ln 4-\int_{\ln 2}^{\ln 4} f(x)dx = -8+34\ln 2$이다.

Theme 33 부분적분법

95. 2

052

$$\int_0^{\pi} x\cos(\pi - x)dx = \int_0^{\pi} x(-\cos x)dx$$

$f(x) = x,\ g'(x) = -\cos x$라 하면
$f'(x) = 1,\ g(x) = -\sin x$이므로

$$\int_0^{\pi} x(-\cos x)dx = [x(-\sin x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\sin x dx$$
$$= -[\cos x]_0^{\pi} = -(-1-1) = 2$$

답 2

96. ④

061

$$\int_1^2 (x-1)f'\left(\frac{x}{2}\right)dx = 2$$

$\frac{x}{2} = t$라 하면 $\frac{1}{2} = \frac{dt}{dx}$

$x=1$일 때, $t = \frac{1}{2}$, $x=2$일 때, $t=1$

$$\int_1^2 (x-1)f'\left(\frac{x}{2}\right)dx = 2\int_{\frac{1}{2}}^1 (2t-1)f'(t)dt$$
$$= 2\Big[(2t-1)f(t)\Big]_{\frac{1}{2}}^1 - 4\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt$$
$$= 2f(1) - 4\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt = 2$$

$f(1) = 4$이므로

$8 - 4\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt = 2 \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt = \frac{3}{2}$

따라서 $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx = \frac{3}{2}$이다.

답 ④

97. ②

072

$f(x)g(x) = x^4 - 1$이므로
$f(1)g(1) = f(-1)g(-1) = 0$

$$\int_{-1}^1 \{f(x)\}^2 g'(x)dx$$
$$= \Big[\{f(x)\}^2 g(x)\Big]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 2f'(x)f(x)g(x)dx$$
$$= \{f(1)\}^2 g(1) - \{f(-1)\}^2 g(-1) - \int_{-1}^1 2f'(x)f(x)g(x)dx$$
$$= -2\int_{-1}^1 (x^4-1)f'(x)dx$$
$$= 120$$
$$\Rightarrow \int_{-1}^1 (x^4-1)f'(x)dx = -60$$

$$\int_{-1}^1 (x^4-1)f'(x)dx = \Big[(x^4-1)f(x)\Big]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 4x^3 f(x)dx$$
$$= -4\int_{-1}^1 x^3 f(x)dx$$
$$= -60$$

따라서 $\int_{-1}^1 x^3 f(x)dx = 15$이다.

답 ②

98. ①

081

$g(x)=\int_{1}^{x}\frac{f(t^2+1)}{t}dt$

$g(1)=0,\ g'(x)=\frac{f(x^2+1)}{x}$

$g(2)=3$

$$\int_{1}^{2}xg(x)dx=\int_{1}^{2}g(x)x\,dx$$
$$=\left[g(x)\frac{x^2}{2}\right]_{1}^{2}-\int_{1}^{2}g'(x)\frac{x^2}{2}dx$$
$$=2g(2)-\int_{1}^{2}\frac{f(x^2+1)}{x}\times\frac{x^2}{2}dx$$
$$=6-\int_{1}^{2}\frac{f(x^2+1)}{4}\times 2x\,dx$$

$x^2+1=t$라 하면 $2x=\frac{dt}{dx}$이고,

$x=1$일 때, $t=2$, $x=2$일 때, $t=5$이므로

$$\int_{1}^{2}\frac{f(x^2+1)}{4}\times 2x\,dx=\frac{1}{4}\int_{2}^{5}f(t)dt$$
$$=4\quad(\because(\text{나}))$$

따라서 $\int_{1}^{2}xg(x)dx=6-\int_{1}^{2}\frac{f(x^2+1)}{4}\times 2x\,dx$

$=6-4=2$

이다.

답 ①

99. ①

098

$y=f(x)$는 원점에 대하여 대칭이므로

$f(-x)=-f(x)$

$f(x)=\frac{\pi}{2}\int_{1}^{x+1}f(t)dt=\frac{\pi}{2}\{F(x+1)-F(1)\}$

양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\frac{\pi}{2}f(x+1)\ \Rightarrow\ f(x+1)=\frac{2}{\pi}f'(x)$

$$\pi^2\int_{0}^{1}xf(x+1)dx=\pi^2\int_{0}^{1}x\times\frac{2}{\pi}f'(x)dx$$
$$=2\pi\int_{0}^{1}xf'(x)dx$$
$$=2\pi\left[xf(x)\right]_{0}^{1}-2\pi\int_{0}^{1}f(x)dx$$
$$=2\pi f(1)-2\pi\int_{0}^{1}f(x)dx$$
$$=2\pi-2\pi\int_{0}^{1}f(x)dx\quad(\because\ f(1)=1)$$

$\int_{0}^{1}f(x)dx$를 구하려면 어떻게 해야할까?

아직 사용하지 않은 원점 대칭 조건을 사용해보자.

$f(x)=\frac{\pi}{2}\int_{1}^{x+1}f(t)dt$의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$f(-1)=\frac{\pi}{2}\int_{1}^{0}f(t)dt=-\frac{\pi}{2}\int_{0}^{1}f(t)dt$

$f(-x)=-f(x)\ \Rightarrow\ f(-1)=-f(1)=-1$이므로

$f(-1)=-\frac{\pi}{2}\int_{0}^{1}f(t)dt=-1$

$\therefore\ \int_{0}^{1}f(t)dt=\frac{2}{\pi}$

따라서 $\pi^2\int_{0}^{1}xf(x+1)dx=2\pi-2\pi\int_{0}^{1}f(x)dx$

$=2\pi-4=2(\pi-2)$

이다.

답 ①

100. ③

28. 출제의도 : 치환적분과 부분적분을 이용하여 함수의 정적분 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$g(0)=f'(0)\sin 0+0=0$

$g(1)=f'(2)\sin\pi+1=1$이므로

$\int_0^1 g(x)dx+\int_{g(0)}^{g(1)} g^{-1}(x)dx$

$=\int_0^1 g(x)dx+\int_0^1 g^{-1}(x)dx$

$=1\times1-0\times0=1$

따라서

$\int_0^1 g(x)dx+\int_0^1 g^{-1}(x)dx=1$ ……㉠

㉠에

$g(x)=f'(2x)\sin\pi x+x$,

$\int_0^1 g^{-1}(x)dx=2\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx+\frac{1}{4}$

을 대입하면

$\int_0^1 \{f'(2x)\sin\pi x+x\}dx$

$+2\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx+\frac{1}{4}=1$

$3\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx+\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\frac{1}{4}=1$

$3\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

따라서

$\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx=\frac{1}{12}$ ……㉡

한편, $\int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$에서

$x=2t$라 하면 $\frac{dx}{dt}=2$이고

$x=0$일 때, $t=0$, $x=2$일 때 $t=1$이므로

$\int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$

$=2\int_0^1 f(2t)\cos\pi t\,dt$

$u(t)=f(2t)$, $v(t)=\frac{1}{\pi}\sin\pi t$로 놓으면

$u'(t)=2f'(2t)$, $v'(t)=\cos\pi t$이므로

$2\int_0^1 f(2t)\cos\pi t\,dt$

$=2\left[\frac{1}{\pi}f(2t)\sin\pi t\right]_0^1-\frac{4}{\pi}\int_0^1 f'(2t)\sin\pi t\,dt$

$=0-\frac{4}{\pi}\int_0^1 f'(2t)\sin\pi t\,dt$

$=-\frac{4}{\pi}\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx$

이므로 ㉡에서

$\int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi}{2}x\,dx=-\frac{4}{\pi}\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx$

$=-\frac{4}{\pi}\times\frac{1}{12}$

$=-\frac{1}{3\pi}$

정답 ③

Theme 34 정적분으로 표시된 함수의 극한

101. ⑤

066

$f(x)=a\cos(\pi x^2)$

$\lim_{x\to0}\left\{\frac{x^2+1}{x}\int_1^{x+1}f(t)dt\right\}$

$=\lim_{x\to0}\left\{(x^2+1)\times\frac{F(x+1)-F(1)}{x}\right\}$

$=\lim_{x\to0}(x^2+1)\times\lim_{x\to0}\frac{F(1+x)-F(1)}{x}$

$=1\times F'(1)=f(1)=3$

$f(1)=a\cos(\pi)=-a=3 \Rightarrow a=-3$ 이므로
$f(x)=a\cos(\pi x^2)=-3\cos(\pi x^2)$

따라서 $f(a)=f(-3)=-3\cos(9\pi)=3$이다.

답 ⑤

Theme 35 정적분을 포함한 등식

102. ②

032

$f(x)=(\ln x)^2-\int_1^e\frac{f(t)}{t}dt$의 양변에 $\frac{1}{x}$을 곱하면

$\frac{f(x)}{x}=\frac{(\ln x)^2}{x}-\frac{1}{x}\int_1^e\frac{f(t)}{t}dt$

이때 $\int_1^e\frac{f(t)}{t}dt=a$라 하면

$\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx=\int_1^e\frac{(\ln x)^2}{x}dx-a\int_1^e\frac{1}{x}dx$

$\Rightarrow a=\int_1^e\frac{(\ln x)^2}{x}dx-a\Big[\ln|x|\Big]_1^e$

$\Rightarrow a=\int_1^e\frac{(\ln x)^2}{x}dx-a$

$\Rightarrow a=\frac{1}{2}\int_1^e\frac{(\ln x)^2}{x}dx$

$\ln x=s$라 하면 $\frac{1}{x}=\frac{ds}{dx}$
$x=1$일 때, $s=0$, $x=e$일 때, $s=1$
$\int_1^e\frac{(\ln x)^2}{x}dx=\int_0^1 s^2ds=\left[\frac{1}{3}s^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$이므로
$a=\frac{1}{6}$이다.

따라서 $\int_1^e\frac{f(t)}{t}dt=\frac{1}{6}$이다.

답 ②

103. 16

035

$\int_1^x(x-t)f(t)dt=e^{2x-2}+ax^2+bx+3$

$x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt=e^{2x-2}+ax^2+bx+3$
양변에 $x=1$을 대입하면
$0=1+a+b+3 \Rightarrow a+b=-4$

$x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt=e^{2x-2}+ax^2+bx+3$
양변을 x에 대해 미분하면

$\int_1^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=2e^{2x-2}+2ax+b$

$\int_1^x f(t)dt=2e^{2x-2}+2ax+b$
양변에 $x=1$을 대입하면
$0=2+2a+b \Rightarrow 2a+b=-2$

$a+b=-4,\ 2a+b=-2 \Rightarrow a=2,\ b=-6$

$\int_1^x f(t)dt = 2e^{2x-2} + 4x - 6$

양변을 x에 대해 미분하면

$f(x) = 4e^{2x-2} + 4$

$f(1) = 8$

따라서 $a - b + f(1) = 2 - (-6) + 8 = 16$이다.

답 16

104. ③

036

$f(x) + \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)e^{x-t}dt = \sin 3x$

$f(x) + e^x \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)e^{-t}dt = \sin 3x$

양변에 $x = \frac{\pi}{2}$를 대입하면

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{3}{2}\pi = -1$

Tip 정적분으로 정의된 함수 $\int_a^x f(t)dt$를 x에 대해 미분할 때는 $f(t)$ 안의 식에 x가 포함되어 있는지 주의해야 한다. 만약 문자 x가 포함된 경우에는 x를 $\int$ 앞에 위치시키고 곱의 미분법을 이용하여 미분한다.

cf 2024 규토 라이트 N제 수2 문제편 p256

$f(x) + e^x \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)e^{-t}dt = \sin 3x$

양변을 x에 대해 미분하면

$f'(x) + e^x \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)e^{-t}dt + e^x \times f(x)e^{-x} = 3\cos 3x$

$\Rightarrow f'(x) + e^x \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)e^{-t}dt + f(x) = 3\cos 3x$

이때, $f(x) + e^x \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)e^{-t}dt = \sin 3x$이므로

$f'(x) = 3\cos 3x - \sin 3x$

$f(x) = \sin 3x + \frac{1}{3}\cos 3x + C$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \Rightarrow -1 + C = -1 \Rightarrow C = 0$

$f(x) = \sin 3x + \frac{1}{3}\cos 3x$

따라서 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sin 3x + \frac{1}{3}\cos 3x\right)dx$

$= \left[-\frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{18} - \left(-\frac{1}{3}\right)$

$= \frac{2\sqrt{2}}{9} + \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{2}+3}{9}$

이다.

답 ③

105. ④

037

$tx + 1 = s$ 라 하면 $x = \frac{s-1}{t}$, $t = \frac{ds}{dx}$

$x = 0$일 때, $s = 1$, $x = 2$일 때, $s = 2t + 1$

$\int_0^2 x f(tx+1)dx = \int_1^{2t+1} \frac{s-1}{t} f(s) \times \frac{1}{t} ds$

$= \frac{1}{t^2} \int_1^{2t+1} (s-1)f(s)ds$

$= 4te^t$

$\Rightarrow \int_1^{2t+1} (s-1)f(s)ds = 4t^3e^t$

$g(s) = (s-1)f(s)$라 하면

$\int_1^{2t+1} g(s)\,ds = 4t^3e^t$

$G(2t+1) - G(1) = 4t^3e^t$

양변을 t에 대하여 미분하면

$2g(2t+1) = 12t^2e^t + 4t^3e^t$

$\Rightarrow g(2t+1) = (6t^2 + 2t^3)e^t$

$\Rightarrow 2t f(2t+1) = (6t^2 + 2t^3)e^t$

$\therefore f(2t+1) = (3t + t^2)e^t$

$2t + 1 = 5 \Rightarrow t = 2$

$2t + 1 = -3 \Rightarrow t = -2$

이므로

$f(5) = (6+4)e^2 = 10e^2$

$f(-3) = (-6+4)e^{-2} = -2e^{-2}$

따라서 $f(5) \times f(-3) = 10e^2 \times (-2e^{-2}) = -20$이다.

답 ④

Theme 36 정적분으로 정의된 함수 (New함수)

106. 325

070

$f(x) = \int_1^x \frac{n - \ln t}{t} dt$

$f'(x) = \frac{n - \ln x}{x}$

Semi 도함수 $f'(x) = n - \ln x$

$f'(e^n) = 0 \Rightarrow x = e^n$에서 극대이자 최대

$f(e^n) = g(n) = \int_1^{e^n} \frac{n - \ln t}{t} dt$

$\ln t = s$라 하면 $\frac{1}{t} = \frac{ds}{dt}$

$t = 1$일 때, $s = 0$, $t = e^n$일 때, $s = n$

$$g(n) = \int_1^{e^n} \frac{n - \ln t}{t} dt$$

$$= \int_0^n (n - s) ds = \left[ns - \frac{1}{2}s^2\right]_0^n = n^2 - \frac{n^2}{2}$$

$$= \frac{n^2}{2}$$

따라서 $\sum_{n=1}^{12} g(n) = \sum_{n=1}^{12} \frac{n^2}{2} = \frac{12 \times 13 \times 25}{12} = 13 \times 25 = 325$

이다.

답 325

107. ①

092

$$f(x) = \begin{cases} |\sin x| - \sin x & \left(-\frac{7}{2}\pi \le x < 0\right) \\ \sin x - |\sin x| & \left(0 \le x \le \frac{7}{2}\pi\right) \end{cases}$$

$-\frac{7}{2}\pi \le x < 0$에서

$\sin x \ge 0$일 때, $|\sin x| - \sin x = 0$

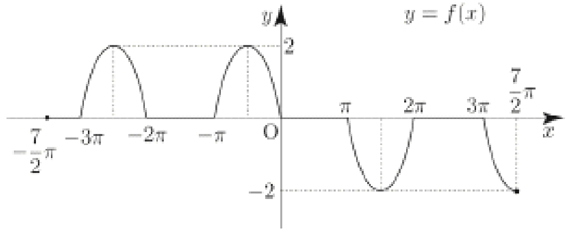
$\sin x < 0$일 때, $|\sin x| - \sin x = -2\sin x$

$0 \le x \le \frac{7}{2}\pi$에서

$\sin x \ge 0$일 때, $\sin x - |\sin x| = 0$

$\sin x < 0$일 때, $\sin x - |\sin x| = 2\sin x$

이를 바탕으로 $f(x)$를 그리면 다음과 같다.

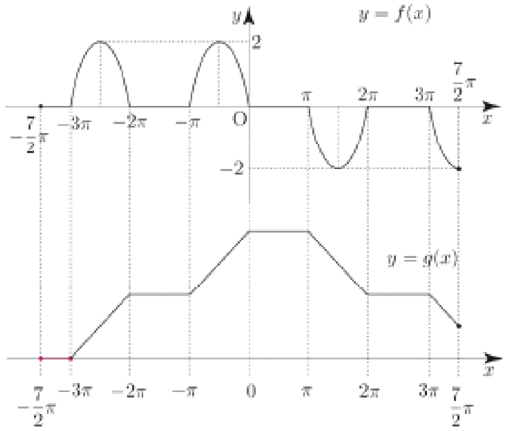


$g(x) = \int_a^x f(t)dt$라 하자.

(New 함수 Technique)

$g'(x) = f(x)$, $g(a) = 0$ (x축 설정)

$f(x)$를 바탕으로 $g(x)$를 그리면 다음과 같다.



모든 실수 x에 대하여 $g(x) \ge 0$이 되도록 하는 실수 a의

범위는 $-\frac{7}{2}\pi \le a \le -3\pi$이므로 최솟값은 $\alpha = -\frac{7}{2}\pi$이고,

최댓값은 $\beta = -3\pi$이다.

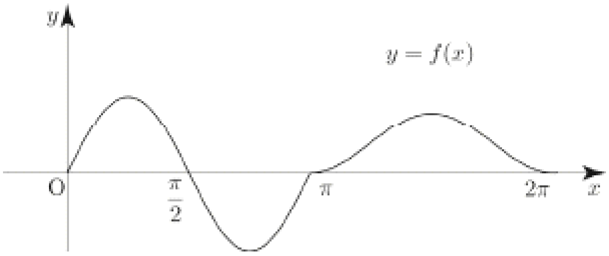
따라서 $\beta - \alpha = -3\pi + \frac{7}{2}\pi = \frac{\pi}{2}$이다.

답 ①

108. 75

041

$$f(x)=\begin{cases}\pi\sin2x & (0\le x\le\pi)\\ 1-\cos2x & (\pi<x\le2\pi)\end{cases}$$



$g(x)=\int_a^x f(x)\,dx$라 하자.

(New함수 Technique)

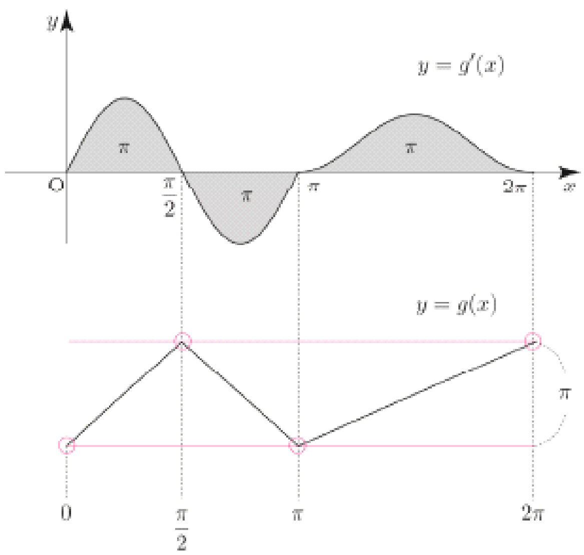
$g(a)=0,\ g'(x)=f(x)$

방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하려면
함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수가 2이면 된다.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi\sin2x\,dx=\left[-\frac{\pi}{2}\cos2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$$
$$\int_\pi^{2\pi}(1-\cos2x)\,dx=\left[x-\frac{1}{2}\sin2x\right]_\pi^{2\pi}=2\pi-\pi=\pi$$

$$g'(x)=\begin{cases}\pi\sin2x & (0\le x\le\pi)\\ 1-\cos2x & (\pi<x\le2\pi)\end{cases}$$

$g'(x)$를 바탕으로 $g(x)$를 그리면



($f'(x)$의 넓이는 $f(x)$의 함숫값의 차이와 같다.
2024 규토 라이트 수2 문제편 p299 참고)

$g(a)=0$이므로 a는 x축을 결정한다.

$m=4$이고, $a_1=0,\ a_2=\frac{\pi}{2},\ a_3=\pi,\ a_4=2\pi$이므로

$$m+\sum_{n=1}^{m}a_n=4+\frac{7}{2}\pi=p+q\pi$$

따라서 $10(p+q)=10\left(4+\frac{7}{2}\right)=40+35=75$이다.

답 75

109. 9

045

$F(x)=\int_0^x f(t)dt$

$F(0)=0,\ \ F'(x)=f(x)$

$\{f(x)\}^2=f(x)f(x)=F'(x)f(x)$이므로

$$\int_0^2\{f(x)\}^2dx+\int_0^2F(x)f'(x)dx=12$$
$$\Rightarrow\int_0^2F'(x)f(x)dx+\int_0^2F(x)f'(x)dx=12$$
$$\Rightarrow\int_0^2\{F'(x)f(x)+F(x)f'(x)\}dx=12$$
$$\Rightarrow\int_0^2\{F(x)f(x)\}'\,dx=12$$

$$\begin{aligned}\int_0^2\{F(x)f(x)\}'\,dx&=[F(x)f(x)]_0^2\\&=F(2)f(2)-F(0)f(0)\\&=F(2)f(2)\quad(\because\ F(0)=0)\\&=12\end{aligned}$$

$\therefore\ F(2)f(2)=12\ \cdots$ ㉠

$$\int_0^2 xf'(x)dx = [xf(x)]_0^2 - \int_0^2 f(x)dx$$

$$= 2f(2) - F(2)$$

$$= 5$$

$\therefore\ 2f(2) - F(2) = 5\ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$2f(2) - F(2) = 5 \Rightarrow \dfrac{24}{F(2)} - F(2) = 5$

$\Rightarrow 24 - \{F(2)\}^2 = 5F(2)$

$\Rightarrow \{F(2)\}^2 + 5F(2) - 24 = 0$

$\Rightarrow (F(2)+8)(F(2)-3) = 0$

$\Rightarrow F(2) = 3\ (\because\ F(2) > 0)$

$\therefore\ F(2) = 3$

따라서 $\displaystyle\int_0^2 \{F(x)\}^2 f(x)dx = \left[\frac{\{F(x)\}^3}{3}\right]_0^2$

$$= \frac{\{F(2)\}^3}{3} - \frac{\{F(0)\}^3}{3}$$

$$= \frac{27}{3} - 0 = 9$$

이다.

답 9

Tip 적분은 미분의 역연산임을 이용하면 굳이 치환적분을 하지 않아도 바로 적분가능하다.

$\int f(x)dx$를 어떻게 설정해야 미분하여 $f(x)$가 될까? 라는 사고가 핵심이다.

아래 식들은 잘 나오니 기억해 두자.

① $\{xf(x)\}' = f(x) + xf'(x)$

$\int \{f(x) + xf'(x)\}dx = xf(x) + C$

② $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$\int \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\}dx = f(x)g(x) + C$

③ $\{\ln|f(x)|\}' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

$\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$

③ $\{f(x)^2\}' = 2f(x)f'(x)$

$\int 2f(x)f'(x)dx = \{f(x)\}^2 + C$

④ $\{f(x)^3\}' = 3\{f(x)\}^2 f'(x)$

$\int 3\{f(x)\}^2 f'(x)dx = \{f(x)\}^3 + C$

⑤ $\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$

$\int f'(g(x))g'(x)dx = f(g(x)) + C$

⑥ $\left\{\dfrac{f(x)}{x}\right\}' = \dfrac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$

$\int \dfrac{xf'(x) - f(x)}{x^2}dx = \dfrac{f(x)}{x} + C$

Theme 37 새롭게 정의된 함수의 정적분

110. ③

27. [출제의도] 부분적분법 이해하기

$\mathrm{Q}(t,\ 0)$, $\mathrm{R}(0,\ 2\ln(t+1))$이므로

직사각형 OQPR의 넓이는 $f(t)=2t\ln(t+1)$

따라서

$$\int_1^3 f(t)dt$$
$$=\int_1^3\{2t\ln(t+1)\}dt$$
$$=\left[t^2\ln(t+1)\right]_1^3-\int_1^3\frac{t^2}{t+1}dt$$
$$=\left[t^2\ln(t+1)\right]_1^3-\int_1^3\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt$$
$$=\left[t^2\ln(t+1)\right]_1^3-\left[\frac{1}{2}t^2-t+\ln(t+1)\right]_1^3$$
$$=(9\ln4-\ln2)-\left(\frac{9}{2}-3+\ln4-\frac{1}{2}+1-\ln2\right)$$
$$=-2+16\ln2$$

111. ①

085

원 C와 y축의 교점을 D라 하면

원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같으므로

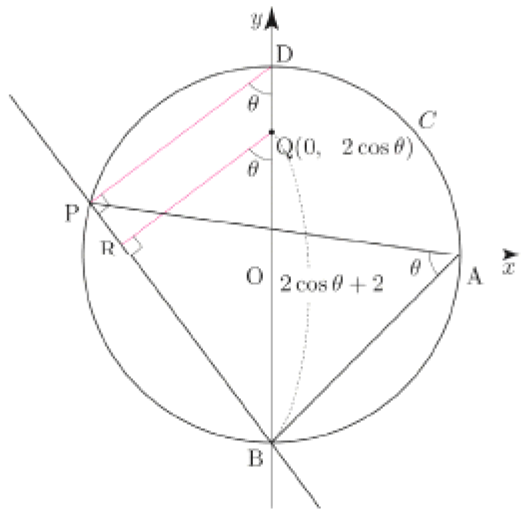
$\angle\mathrm{PAB}=\angle\mathrm{PDB}=\theta$이다.

$\angle\mathrm{PDB}=\angle\mathrm{RQB}=\theta$ (by 동위각)

구하고자 하는 값이 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}f(\theta)d\theta$이므로

θ의 범위는 $\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{3}$라 할 수 있다.

$\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{3}$에서 $2\cos\theta>0$이므로 $\overline{\mathrm{QB}}=2\cos\theta+2$이다.



삼각형 PDB에서

$\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{DB}}\times\sin\theta=4\sin\theta$

삼각형 RQB에서

$\overline{\mathrm{RB}}=\overline{\mathrm{QB}}\times\sin\theta=(2\cos\theta+2)\sin\theta=2\cos\theta\sin\theta+2\sin\theta$

이므로

$$f(\theta)=\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{PB}}-\overline{\mathrm{RB}}$$
$$=4\sin\theta-(2\cos\theta\sin\theta+2\sin\theta)$$
$$=2\sin\theta-2\cos\theta\sin\theta$$

이다.

따라서 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}f(\theta)d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(2\sin\theta-2\cos\theta\sin\theta)d\theta$

$$=\left[-2\cos\theta-\sin^2\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$
$$=\left(-1-\frac{3}{4}\right)-\left(-\sqrt{3}-\frac{1}{4}\right)$$
$$=-\frac{3}{2}+\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{3}-3}{2}$$

이다.

답 ①

Theme 38 정적분과 급수의 관계

112. ①

040

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{3n}{3n+k}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{3}{3+\frac{k}{n}}}\times\frac{1}{n}$$

$\varDelta x=\frac{1}{n}$, $x_k=3+\frac{k}{n}$ $\left(x_k=3+\frac{(4-3)k}{n}\Rightarrow a=3,\ b=4\right)$

라 하면 $f(x)=\sqrt{\frac{3}{x}}=\sqrt{3}\,x^{-\frac{1}{2}}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{3n}{3n+k}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{3}{3+\frac{k}{n}}}\times\frac{1}{n}$$

$$=\int_3^4 f(x)dx=\sqrt{3}\int_3^4 x^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$=\sqrt{3}\left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_3^4=4\sqrt{3}-6$$

답 ①

113. ③

051

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+2kn}{k^3+3k^2n+n^3}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2+2\left(\frac{k}{n}\right)}{\left(\frac{k}{n}\right)^3+3\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}\times\frac{1}{n}$$

$\varDelta x=\frac{1}{n}$, $x_k=\frac{k}{n}$ $\left(x_k=0+\frac{(1-0)k}{n}\Rightarrow a=0,\ b=1\right)$라

하면 $f(x)=\frac{x^2+2x}{x^3+3x^2+1}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+2kn}{k^3+3k^2n+n^3}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2+2\left(\frac{k}{n}\right)}{\left(\frac{k}{n}\right)^3+3\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}\times\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1\frac{x^2+2x}{x^3+3x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{3x^2+6x}{x^3+3x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{3}\left[\ln\left|x^3+3x^2+1\right|\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{3}\ln 5$$

답 ③

114. ③

25. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{(k-3n)^2}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}-2\ln\frac{2}{3}$ ② $\frac{1}{2}+2\ln\frac{2}{3}$ ③ $1+2\ln\frac{2}{3}$

④ $1+2\ln 2$ ⑤ $2+2\ln 3$

$$\frac{\frac{2k}{n}}{\left(-3+\frac{k}{n}\right)^2}\ \frac{1}{n}$$

$$\int_0^1\frac{2x}{(x-3)^2}dx$$

$x-3=t \Rightarrow dx=dt$

$$\int_{-3}^{-2}\frac{2(t+3)}{t^2}dt=\int_{-3}^{-2}\left(\frac{2}{t}+\frac{6}{t^2}\right)dt$$

$$=\left[2\ln|t|-\frac{6}{t}\right]_{-3}^{-2}$$

$$=2\ln 2+3-(2\ln 3+2)$$

$$=2\ln\frac{2}{3}+1$$

Theme 39 정적분과 급수의 관계 활용

115. ③

069

$x_k=1+\frac{k}{n}$이므로

$A_k=\frac{1}{2}\left(1+\frac{k}{n}\right)e^{1+\frac{k}{n}}$

$\varDelta x=\frac{1}{n}$, $x_k=1+\frac{k}{n}$ $\left(x_k=1+\frac{(2-1)k}{n}\Rightarrow a=1,\ b=2\right)$

이고 $f(x)=\frac{1}{2}xe^x$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}A_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(1+\frac{k}{n}\right)e^{1+\frac{k}{n}}\times\frac{1}{n}$$

$$=\int_1^2\frac{1}{2}xe^xdx=\left[\frac{1}{2}xe^x\right]_1^2-\int_1^2\frac{1}{2}e^xdx$$

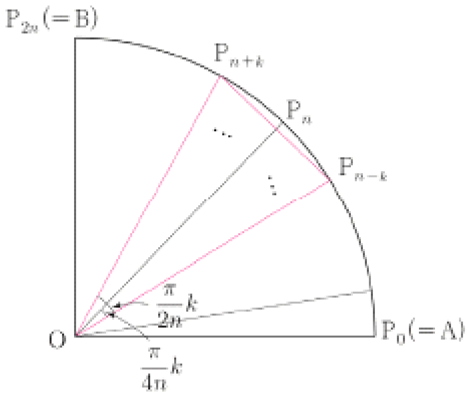
$$=e^2-\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}e=\frac{1}{2}e^2$$

답 ③

116. ①

068

$\angle \mathrm{P}_k\mathrm{OP}_{k-1} = \dfrac{\pi}{2} \times \dfrac{1}{2n} = \dfrac{\pi}{4n}$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2n)$



$\angle \mathrm{P}_n\mathrm{OP}_{n-k} = \angle \mathrm{P}_n\mathrm{OP}_{n+k} = \dfrac{\pi}{4n}k$

$\Rightarrow \angle \mathrm{P}_{n+k}\mathrm{OP}_{n-k} = \dfrac{\pi}{2n}k$

$\therefore\ S_k = \dfrac{1}{2} \times 1^2 \times \sin\dfrac{\pi k}{2n}$

$\Delta x = \dfrac{\pi}{2n}$, $x_k = \dfrac{\pi k}{2n}$ $\left(x_k = 0 + \dfrac{\left(\frac{\pi}{2} - 0\right)k}{n} \Rightarrow a=0,\ b=\dfrac{\pi}{2} \right)$

이고 $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\sin x$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi}\sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right) \times \frac{\pi}{2n}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\pi}\sin x\, dx = \frac{1}{\pi}$$

답 ①

117. 14

080

$x_k = \dfrac{k}{n}$ 이므로 $\mathrm{A}_k = \dfrac{1}{n} \times f\left(\dfrac{k}{n}\right)$

$\mathrm{A}_1 = \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{a}{n} + b\right)$,

$\mathrm{A}_n = \dfrac{1}{n} f(1) = \dfrac{1}{n}(1+a+b)$

이므로

$\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_n = \dfrac{7n^2+1}{n^3}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{a}{n} + b\right) + \dfrac{1}{n}(1+a+b) = \dfrac{7n^2+1}{n^3}$

$\Rightarrow 1 + an + (1+a+2b)n^2 = 7n^2 + 1$

$\Rightarrow a=0,\ 1+a+2b=7 \quad \Rightarrow a=0,\ b=3$

$\therefore\ f(x) = x^2 + 3$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{8k}{n}\mathrm{A}_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{8k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$$

$\Delta x = \dfrac{1}{n}$, $x_k = \dfrac{k}{n}$ $\left(x_k = 0 + \dfrac{(1-0)k}{n} \Rightarrow a=0,\ b=1 \right)$

이므로 $g(x) = 8xf(x)$

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{8k}{n}\mathrm{A}_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{8k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$

$$= \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 8xf(x)dx$$

$$= \int_0^1 (8x^3 + 24x)dx$$

$$= \left[2x^4 + 12x^2\right]_0^1 = 14$$

이다.

답 14

Theme 40 넓이

118. ①

043

$f(x)=x\ln(x^2+1)$라 하면

$f(0)=0$이고, $x>0$에서 $f(x)>0$이다.

$x^2+1=t$라 하면 $2x=\dfrac{dt}{dx}$이고,

$x=0$일 때, $t=1$, $x=1$일 때, $t=2$이므로

구하고자 하는 넓이 S는

$$S=\int_0^1 x\ln(x^2+1)dx=\frac{1}{2}\int_1^2 \ln t\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\Big[t\ln t-t\Big]_1^2=\frac{1}{2}(2\ln 2-2+1)$$

$$=\frac{1}{2}(2\ln 2-1)=\ln 2-\frac{1}{2}$$

답 ①

119. ②

045

둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_0^1\left\{\sin\frac{\pi}{2}x-(2^x-1)\right\}dx$$

$$=\int_0^1\left(\sin\frac{\pi}{2}x-2^x+1\right)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x-\frac{2^x}{\ln 2}+x\right]_0^1$$

$$=-\frac{2}{\ln 2}+1-\left(-\frac{2}{\pi}-\frac{1}{\ln 2}\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}-\frac{1}{\ln 2}+1$$

답 ②

Theme 40 입체도형의 부피

120. ②

050

단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\left(\sqrt{\frac{3x+1}{x^2}}\right)^2=\frac{3x+1}{x^2}$$

구하는 입체도형의 부피 V는

$$V=\int_1^2 S(x)dx=\int_1^2\frac{3x+1}{x^2}dx=\int_1^2\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$=\left[3\ln|x|-\frac{1}{x}\right]_1^2=3\ln 2-\frac{1}{2}-(0-1)$$

$$=\frac{1}{2}+3\ln 2$$

답 ②

121. ④

052

단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\left(\sqrt{\sec^2 x+\tan x}\right)^2=\sec^2 x+\tan x$$

구하는 입체도형의 부피 V는

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{3}}S(x)dx=\int_1^2(\sec^2 x+\tan x)dx$$

$$=\Big[\tan x-\ln|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}-\ln\frac{1}{2}=\sqrt{3}+\ln 2$$

답 ④

122. ⑤

071

$y=e^x \Rightarrow x=\ln y$

단면의 넓이를 $S(y)$라 하면

$S(y)=\frac{\sqrt{3}}{4}(\ln y)^2$

입체도형의 부피 V는

$V=\int_1^e S(y)dy=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_1^e(\ln y)^2 dy$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[(\ln y)^2 y\right]_1^e-\frac{\sqrt{3}}{4}\int_1^e 2\ln y\times\frac{1}{y}\times y\,dy$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}e-\frac{\sqrt{3}}{2}\int_1^e \ln y\,dy$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}e-\frac{\sqrt{3}}{2}\left[y\ln y-y\right]_1^e$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}e-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}(e-2)}{4}$

답 ⑤

123. ③

26. 출제의도 : 입체도형의 부피를 구할 수 있는가?

풀이 :

$\sqrt{\frac{\pi}{6}}\le t\le\sqrt{\frac{\pi}{2}}$인 실수 t에 대하여 직선 $x=t$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\frac{\pi}{2}t^3\sin t^2$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} S(t)dt$

$=\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\frac{\pi}{2}t^3\sin t^2 dt$

$=\frac{\pi}{2}\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}t^3\sin t^2 dt$

이때 $t^2=u$라 하면 $t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$일 때 $u=\frac{\pi}{2}$, $t=\sqrt{\frac{\pi}{6}}$일 때 $u=\frac{\pi}{6}$이고

$2t=\frac{du}{dt}$이므로

$\frac{\pi}{2}\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}t^3\sin t^2 dt$

$=\frac{\pi}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}u\sin u\,du$

$=\frac{\pi}{4}\left(\left[-u\cos u\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos u\,du\right)$

$=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\left[\sin u\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\right)$

$=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{12}\pi+1-\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{\sqrt{3}\pi^2+6\pi}{48}$

정답 ③

Theme 42 속도와 거리

124. ②

028

$$\begin{cases} x = 2\cos t - 2\sin t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$$

$\dfrac{dx}{dt} = -2\sin t - 2\cos t$, $\dfrac{dy}{dt} = 2\sin t\cos t$이므로

점 P가 $t=0$에서 $t=\dfrac{\pi}{2}$까지 움직인 거리는

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-2\sin t - 2\cos t)^2 + (2\sin t\cos t)^2}\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 + 8\sin t\cos t + 4\sin^2 t\cos^2 t}\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4(\sin t\cos t + 1)^2}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\,|\sin t\cos t + 1|\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin t\cos t + 2)\,dt = \left[\sin^2 t + 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 + \pi$$

답 ②

125. ①

062

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=t^2x-\dfrac{\ln t}{8}$이 만나는 두 점의 x좌표를 각각 α, β라 하자.

방정식 $x^2 = t^2x - \dfrac{\ln t}{8} \Rightarrow x^2 - t^2x + \dfrac{\ln t}{8} = 0$의 두 실근은 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta = t^2$이다.

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=t^2x-\dfrac{\ln t}{8}$이 만나는 두 점의 중점은 직선 $y=t^2x-\dfrac{\ln t}{8}$ 위의 점이므로 중점의 좌표는

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ t^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \frac{\ln t}{8}\right) \Rightarrow \left(\frac{t^2}{2},\ \frac{t^4}{2} - \frac{\ln t}{8}\right)$$이다.

이므로 점 P의 시각 t에서의 위치는 다음과 같다.

$x = \dfrac{t^2}{2}$, $y = \dfrac{t^4}{2} - \dfrac{\ln t}{8}$

이때 $\dfrac{dx}{dt} = t$, $\dfrac{dy}{dt} = 2t^3 - \dfrac{1}{8t}$이므로

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{t^2 + \left(2t^3 - \frac{1}{8t}\right)^2}$$

$$= \sqrt{t^2 + 4t^6 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{64t^2}}$$

$$= \sqrt{4t^6 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{64t^2}}$$

$$= \sqrt{\left(2t^3 + \frac{1}{8t}\right)^2}$$

$$= \left|2t^3 + \frac{1}{8t}\right|$$

$$= 2t^3 + \frac{1}{8t} \quad (\because\ t > 0)$$

따라서 시각 $t=1$에서 $t=e$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^e \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_1^e \left(2t^3 + \frac{1}{8t}\right)dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{8}\ln|t|\right]_1^e$$

$$= \frac{1}{2}e^4 + \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{2} + 0\right)$$

$$= \frac{e^4}{2} - \frac{3}{8}$$

이다.

답 ①

Theme 43 곡선의 길이

126. ⑤

044

$f(x)=\frac{1}{8}e^{2x}+\frac{1}{2}e^{-2x}$라 하면

$f'(x)=\frac{1}{4}e^{2x}-e^{-2x}$

구하고자 하는 곡선의 길이 l은

$$l=\int_0^{\ln 2}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=\int_0^{\ln 2}\sqrt{1+\left(\frac{1}{4}e^{2x}-e^{-2x}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_0^{\ln 2}\sqrt{\left(\frac{1}{4}e^{2x}+e^{-2x}\right)^2}=\int_0^{\ln 2}\left|\frac{1}{4}e^{2x}+e^{-2x}\right|dx$$

$$=\int_0^{\ln 2}\left(\frac{1}{4}e^{2x}+e^{-2x}\right)dx=\left[\frac{1}{8}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^{\ln 2}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$$

답 ⑤

127. 78

053

$f(x)=\frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$라 하면

$f'(x)=\frac{1}{2}(x^2+2)^{\frac{1}{2}}\times 2x=x\sqrt{x^2+2}$

구하고자 하는 곡선의 길이 l은

$$l=\int_0^6\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=\int_0^6\sqrt{1+x^2(x^2+2)}\,dx$$

$$=\int_0^6\sqrt{(x^2+1)^2}\,dx=\int_0^6|x^2+1|dx=\int_0^6(x^2+1)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_0^6=72+6=78$$

답 78

128. ⑤

032

$f(x)=\frac{1}{4}x^2-\ln\sqrt{x}=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x$

$f'(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}$이므로

$x=1$에서 $x=e$까지 곡선 $y=\frac{1}{4}x^2-\ln\sqrt{x}$의 길이는

$$\int_1^e\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=\int_1^e\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_1^e\sqrt{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^2}}\,dx$$

$$=\int_1^e\sqrt{\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_1^e\left|\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right|dx=\int_1^e\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\ln|x|\right]_1^e$$

$$=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}$$

답 ⑤

129. ①

055

$f(x)=\frac{1}{2}(|e^x-1|-e^{|x|}+1)$라 하면

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x\ge 0)\\ \frac{1}{2}(-e^x-e^{-x}+2) & (x<0)\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}0 & (x\ge 0)\\ \frac{1}{2}(-e^x+e^{-x}) & (x<0)\end{cases}$$

구하고자 하는 곡선의 길이 l은

$$l=\int_{-\ln 4}^{1}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

$$=\int_{-\ln 4}^{0}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx+\int_0^1\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

$$=\int_{-\ln 4}^{0}\sqrt{1+\frac{1}{4}(-e^x+e^{-x})^2}+\int_0^1 1\,dx$$

$$=\int_{-\ln 4}^{0}\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})dx+1$$

$$=\left[\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\right]_{-\ln 4}^{0}+1=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-4\right)+1=\frac{23}{8}$$

답 ①