2025학년도 우로보로스 모의고사 1회 정답과 해설

1. ① 2. ③ 3. ④ 4. ④ 5. ④

6. ① 7. ② 8. ⑤ 9. ② 10. ③

11. ⑤ 12. ④ 13. ⑤ 14. ① 15. ⑤

16. 3 17. 264 18. 24 19. 2 20. 4

21. 100 22. 203

23. ④ 24. ② 25. ③ 26. ③ 27. ⑤

28. ④

29. 5 30. 44

〈 공통과목 〉

1. $\left(\frac{5}{\sqrt[3]{5}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(5^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=5^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{5}$

2. $\lim_{h\to0}\frac{f(4+2h)-f(4-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}3\times\frac{f(4+2h)-f(4-h)}{(4+2h)-(4-h)}$

$=\lim_{h\to0}3\times\frac{f(4+2h)-f(4-h)}{3h}$

이고 함수 $f(x)$가 $x=4$에서 미분가능하므로

위 극한은 $3f'(4)$로 수렴한다.

$f'(x)=x^2-5$이므로

$3f'(4)=33$

3. $\sum_{n=1}^{5}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{5}\frac{1}{(n+1)-(n)}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\sum_{n=1}^{5}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)$

$=1-\frac{1}{6}$

$=\frac{5}{6}$

4. 주어진 그림에서

$f(0)=3,\ \lim_{x\to-1-}f(x)=2,\ \lim_{x\to1+}f(x)=2$이므로

$3+2\times2=7$

5. $f(x)=(x-5)(x^2+x-1)$에서

$f'(x)=x^2+x-1+(x-5)(2x+1)$이므로

$f'(5)=29$

6. $\cos\theta=\frac{4}{5}$이고 $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$이므로

$\tan\theta=-\frac{3}{4}$이고

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}$

$=-\frac{4}{3}$

7. $x^4+4x^3+5+k=0$에서 $x^4+4x^3+5=-k$

이므로 곡선 $y=x^4+4x^3+5$와 직선 $y=-k$

의 서로 다른 교점의 개수를 조사하면 된다.

$f(x)=x^4+4x^3+5$라 하면

$f'(x)=4x^3+12x^2$이므로

함수 $f(x)$는 $x<-3$에서 감소하고

$x=-3$에서 극소, $x>-3$에서 증가한다.

따라서 $f(-3)=-k$이므로

$k=22$

8. 주어진 식을 변형하면

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{4\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta+\frac{4}{\tan\theta}$

이다. $0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\tan\theta>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\tan\theta+\frac{4}{\tan\theta}\geq2\sqrt{\tan\theta\times\frac{4}{\tan\theta}}=4$

이고, 등호는 $\tan\theta=2$일 때 성립한다.

따라서 주어진 식의 최솟값은 4

정답과 해설

9. 함수 $g(x)=\lim_{t\to x}\frac{f(t)}{f'(t)}$가 불연속인 x에 대하여 $\lim_{t\to x}f'(t)=0$이다.

그런데 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{t\to 2}f(t)=0$이고

함수 $f(x)$는 $(x-2)^2$를 인수로 가지며

함수 $f'(x)$는 x를 인수로 가진다.

따라서

$f'(x)=3x(x-2)$, $f(x)=(x+1)(x-2)^2$

이므로 $f(0)=4$

10. $A-B=\frac{4}{15}$에서 $-A+B=-\frac{4}{15}$이고,

정적분의 정의에 의하여

$$-A+B=\int_0^{2a}x(x-a)(x-2a)^2$$

$$=\int_0^{2a}x^2(x-2a)^2-ax(x-2a)^2dx$$

$$=\frac{32a^5}{30}-a\times\frac{16a^4}{12}=16a^5\times\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{12}\right)$$

$$-\frac{4}{15}a^5=-\frac{4}{15}$$이므로

$a=1$

11. 모든 2 이상의 자연수 n에 대하여

$a_n-a_{n-1}=n$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{a_k}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{10}a_k\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\left(a_1-\frac{a_1}{2}\right)+\left(\frac{a_2}{2}-\frac{a_2}{3}\right)+\left(\frac{a_3}{3}-\frac{a_4}{4}\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{a_9}{9}-\frac{a_9}{10}\right)+\left(\frac{a_{10}}{10}-\frac{a_{10}}{11}\right)$$

$$=a_1+\left(\frac{a_2-a_1}{2}\right)+\left(\frac{a_3-a_2}{3}\right)+\left(\frac{a_4-a_3}{4}\right)\cdots$$

$$+\left(\frac{a_{10}-a_9}{10}\right)-\frac{a_{10}}{11}$$

$$=a_1+1+1+1+\cdots+1-\frac{a_{10}}{11}$$

$$=a_1-\frac{a_{10}}{11}+9$$이고,

$a_2=a_1+2$
$a_3=a_2+3=a_1+2+3$
$a_4=a_3+4=a_1+2+3+4$
$\vdots$
$a_{10}=a_1+2+3+4+\cdots+9+10=a_1+54$

이므로 $\frac{10}{11}a_1-\frac{54}{11}+9=-\frac{5}{11}$에서

$a_1=-5$

12. 함수 $f(x)$의 역함수를 $f^{-1}(x)$라 하면

$f^{-1}(x)=b^{\frac{x}{a}}$이므로

모든 실수 x에 대하여 $g(x)=f^{-1}(-x)$이다.

따라서 임의의 두 양수 α, β에 대하여

$g(-\beta)=\alpha$이면 $f(\alpha)=\beta$이다.

두 점 $\mathrm{C}\left(-\frac{5}{8}b,\ b\right)$, $\mathrm{D}\left(-\frac{5}{4}b,\ 2b\right)$이 곡선

$y=g(x)$ 위에 있으므로

$f(b)=\frac{5}{8}b$, $f(2b)=\frac{5}{4}b$에서 $a=\frac{5}{4}$, $b=2$이다.

두 사각형 APQB, DCRS는 서로 합동인

사다리꼴이므로, 두 사각형의 넓이의 합은

$2\times\frac{1}{2}\times b\times(a+2a)=3ab=\frac{15}{2}$

13. 선분 CD의 길이를 k라 하면

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{PB}}=3k$, $\overline{\mathrm{BC}}=2k$이다.

삼각형 ABP는 정삼각형이고,

$\angle\mathrm{ABP}=\frac{\pi}{3}$, $\angle\mathrm{ADP}=\frac{\pi}{6}$이므로

삼각형 PBC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{PC}}}{\sin\angle\mathrm{PBC}}=\frac{\overline{\mathrm{PC}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4\sqrt{57}}{3},\quad \overline{\mathrm{PC}}=2\sqrt{19}$$이다.

삼각형 PBC에서 코사인법칙에 의하여

$$(2\sqrt{19})^2=(3k)^2+(2k)^2-2\times3k\times2k\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$

에서 $k=2$이므로 원 O의 반지름의 길이는

6이고,

정답과 해설

삼각형 PCD에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{PC}}}{\sin\angle\mathrm{CDP}}=4\sqrt{19}$이므로

삼각형 CDP의 외접원의 반지름의 길이는

$2\sqrt{19}$이다.

따라서 원 O의 넓이와 삼각형 CDP의 외접원의 넓이의 합은

$6^2\pi+(2\sqrt{19})^2\pi=112\pi$

14. $A=\{x\,|\,f(x)=-f(x-f(x))+x\}$

에서 주어진 식 $f(x)=-f(x-f(x))+x$

을 변형하면

$x-f(x)=f(x-f(x))$이다.

$x-f(x)=t$라 하면 $f(t)=t$

방정식 $f(t)=t$를 만족시키는 실수 t를

t_0라 할 때, $x-f(x)=t_0$에서

$f(x)=x-t_0$ ⋯※

이므로 ※를 만족하는 x의 값의 개수가 4이다.

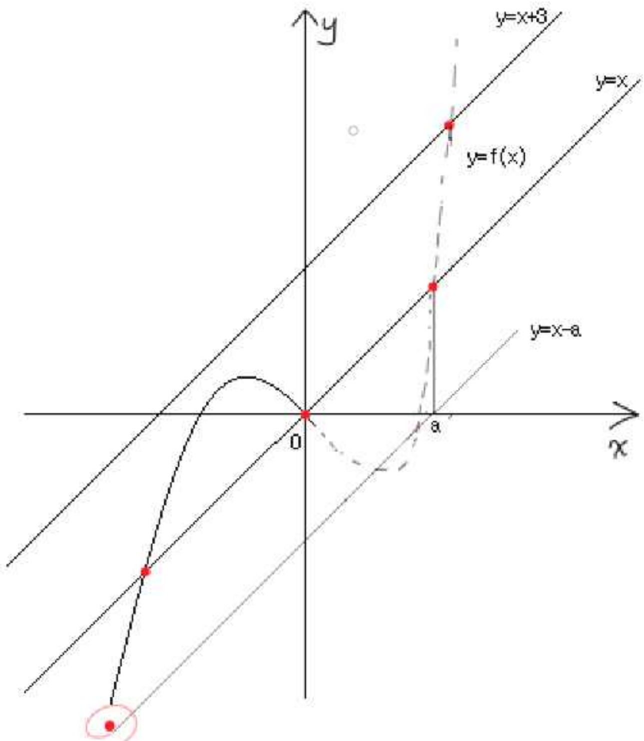
(1)에서 방정식 $f(t)=t$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같고,

(2)에서 방정식 $f(x)=x-t_0$의 실근은

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 t_0라 하면 점 $(t_0,\,0)$을 지나고 기울기가 1인 직선과 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.

$f(0)=0$이고 $f(-3)=-3$이므로, 두 직선 $y=x$, $y=x+3$과 함수 $y=f(x)$의 그래프의 위치 관계를 관찰하면 된다.

(1) $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수인 경우



$f(0)=0$, $f'(0)<0$이고 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)-x=+\infty$

이므로 $x>0$에서 곡선 $y=f(x)$가

직선 $y=x$와 만나는 점이 적어도 하나

존재한다.

이 점의 x좌표를 a라 하면

$x<0$에서 곡선 $y=f(x)$가 직선 $x-a$와

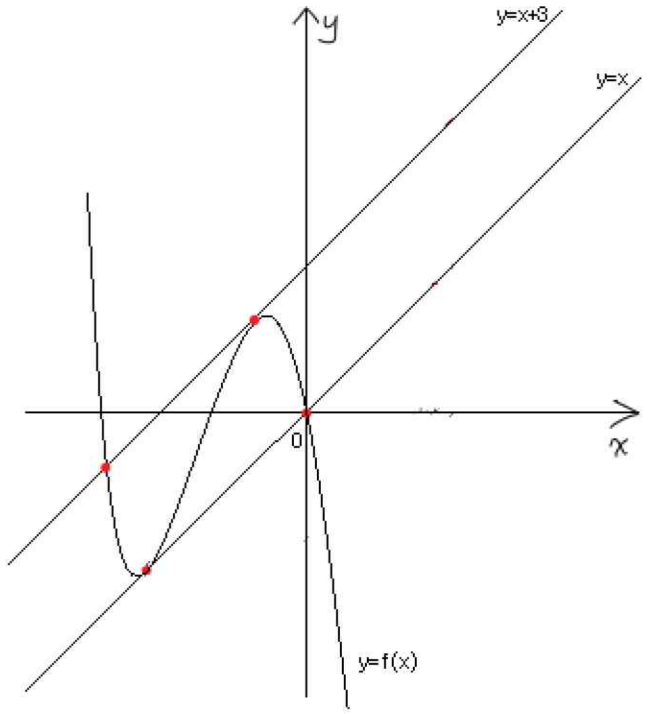
만나는 점이 적어도 하나 존재한다.

따라서 세 직선 $y=x+3$, $y=x$, $y=x-a$

와 곡선 $y=f(x)$가 만나는 점의 개수가

최소 5개가 되므로 모순이다.

(2) $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수인 경우



곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 개수가 3 이상이면 (1)과 동일한 이유로 모순이다.
따라서 곡선 $y=f(x)$가 $x=-3$에서 직선 $y=x$와 접할 때 조건을 만족한다.

(1), (2)에 의하여
조건을 만족하는 함수 $f(x)$는
$f(x)=-\frac{3}{4}x(x+3)^2+x$이므로
$f(-8)=142$

15. $a_8=\alpha$라 하고 상황을 분류하면 다음과 같다.

<table>
<tr><th>a_7</th><th>a_8</th><th>a_9</th><th>a_{10}</th></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td rowspan="2">α</td><td>$\frac{1}{4}-\frac{1}{\alpha}$</td><td rowspan="2">$\frac{9}{4}$</td></tr>
<tr><td>4α</td></tr>
</table>

모든 자연수 n에 대하여
a_{n+2}가 정수가 아니면
$a_{n+1}\times a_n$은 정수가 아니다.
따라서 $a_8\times a_9$가 정수이면 a_{10}이 정수이므로
$a_8\times a_9$는 정수가 아니다.

(1) $a_7\times a_8$이 정수가 아닌 경우
$\frac{1}{4}-\frac{1}{\alpha}=\beta$라 하면 $\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}=\frac{9}{4}$에서
$\frac{\beta}{\alpha}-1=\frac{9}{4}\beta$, $\frac{1}{\alpha^2}-\frac{5}{2\alpha}+\frac{25}{16}=0$이다.
$t=\frac{1}{\alpha}$라 하고 정리하면
$16t^2-40t+25=0$, $t=\frac{5}{4}$이므로 $\alpha=\frac{4}{5}$이고,
$\frac{1}{a_6}-\frac{1}{4}=\frac{4}{5}$을 만족하는 a_6의 값은 $\frac{20}{21}$이다.

a_4	a_5	a_6	a_7
$\frac{21}{25}$	$\frac{21}{5}$	$\frac{20}{21}$	4

$a_5\times a_6$이 정수가 아니면 $a_5=\frac{20}{101}<4$이므로
조건을 만족시키지 않는다.
$a_5\times a_6$이 정수이면 $a_5=\frac{21}{5}>4$이므로
조건을 만족시키고,
$\frac{1}{a_4}-\frac{5}{21}=\frac{20}{21}$을 만족시키는 a_4의 값은
$\frac{21}{25}$이다.

정답과 해설

(2) $a_7 \times a_8$이 정수인 경우

$\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{4\alpha}=\frac{9}{4}$에서 $\alpha=\frac{1}{3}$이므로

$a_7 \times a_8=\frac{4}{3}$가 되어 모순이다.

(1), (2)에 의하여

$a_4=\frac{21}{25}$

16. $4^x \le \left(\frac{1}{2}\right)^{x-9}$에서 $2x \le -x+9$이므로

x의 최댓값은 3

17. $\int_{-3}^{3}(4|t^3|+3t^2+2|t|+5)dt$

$=2\times\int_0^3(4t^3+3t^2+2t+5)dt$

$=2\times\left[t^4+t^3+t^2+5t\right]_0^3$

$=264$

18. 함수 $g(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서

미분 불가능하므로

$x \ne -1$, $x \ne 1$에서

$\frac{d}{dx}(f(x)g(x))=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

이다.

함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고

$$g'(x)=\begin{cases}1 & (x<-1,\ x>1)\\ -1 & (-1<x<1)\end{cases}$$

이므로 $\lim_{x\to-1}f(x)g'(x)$의 값과

$\lim_{x\to1}f(x)g'(x)$의 값이 모두 존재하면 된다.

따라서 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$는

$f(x)=x^2-1$이므로

$f(5)=24$

19. 점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 점을

A$'$이라 하면

세 점 A$'$, B, P가 한 직선 위에 있을 때

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 값이 최소이다.

이때 직선 $\mathrm{BP_0}$의 기울기는

직선 A$'$B의 기울기와 같다.

따라서 $\frac{\log_2 2k-\log_2 k}{2k-(-k)}=\frac{1}{3k}=\frac{1}{6}$이므로

$k=2$

20. $f(x)=(x-a)(x-b)^2$에서

$f'(x)=(3x-2a-b)(x-b)$이고

$g(x)=(a-b)^2(x-a)$이므로

$h(x)=\frac{(x-a)(x-b)^2}{(a-b)^2(3x-2a-b)(x-a)(x-b)}$

$\left(x\ne a, x\ne\frac{2a+b}{3}, x\ne b\right)$

이다. 함수 $h(x)$가 $x=2$에서만 불연속이므로

$h(x)=\frac{(x-b)}{(a-b)^2(3x-2a-b)}\left(x\ne\frac{2a+b}{3}\right)$

이고, $\frac{2a+b}{3}=2$에서 $b=6-2a$이다.

$f(0)=-16=-ab^2$에서

$a(6-2a)^2=16$, $a(a-3)^2=4$

이므로 $a=1$ 또는 $a=4$이고,

$a=4$이면 $a>b$이므로 모순이다.

따라서 $a=1$, $b=4$이므로

$f(x)=(x-1)(x-4)^2$

$f(5)=4$

정답과 해설

21. 함수 $|x|f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$g(x)=F(x)-F(k)$

이다. 조건 (가)에서 $\lim\limits_{x\to m}\dfrac{1}{|g(x)|}=\infty$이면

$\lim\limits_{x\to m}g(x)=0$이므로

$k=-2$일 때 함수 $y=F(x)-F(-2)$와 x축이

만나는 점의 개수는 1이고

$k\neq-2$일 때 함수 $y=F(x)-F(k)$와 x축이

만나는 점의 개수는 2이다.

따라서 함수 $g(x)$는

$x<-2$에서 감소하고, $x=-2$에서 극소이며,

$x>-2$에서 증가하므로

$x<-2$에서 $f(x)\le 0$이고

$x>-2$에서 $f(x)\ge 0$이다.

함수 $|x|f(x)$의 부호가 $x=-2$의 좌우에서

$(-)\to(+)$로 바뀌므로

$f'(-2)\neq 0$이다.

조건 (나)에 의하여 집합 B의 원소의 개수가

1 이상이므로

방정식 $f(x)=0$의 -2가 아닌 실근이

적어도 하나 존재하여야 한다.

이 값을 a라 하면

$f(x)$의 함숫값의 부호가 $x=-2$에서만

바뀌므로

$f(x)=(x+2)(x-a)^2$이고,

$f'(1)=0$이므로 $a=1$ 또는 $a=7$이다.

따라서 조건을 만족하는 함수 $f(x)$는

$f(x)=(x+2)(x-1)^2$ 또는

$f(x)=(x+2)(x-7)^2$이므로

$f(3)=20$ 또는 $f(3)=80$,

$20+80=100$

22. $f(k+t)=t-k+f(k)$

$\to$ 구간 $(k,\ k+1]$에서

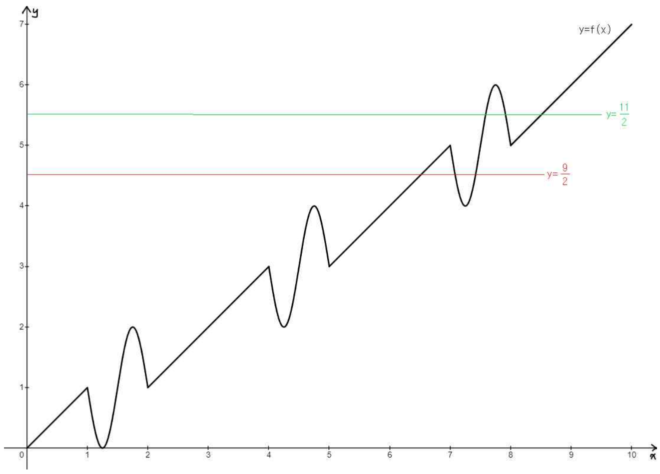
$f(x)=x-k+f(k)$

$\to$ 구간 $(k,\ k+1]$에서

$f(x)=-\sin(2\pi x)+f(k)$

이고, 조건 (다)에 의하여

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$g\left(\dfrac{9}{2}\right)$의 값은

방정식 $-\sin(2\pi x)+5=\dfrac{9}{2}\ (7<x<8)$

를 만족시키는 x의 최댓값과 같고,

그 값은 $\dfrac{89}{12}$이다.

$g\left(\dfrac{11}{2}\right)$의 값은

방정식 $x-3=\dfrac{11}{2}$

를 만족시키는 x의 값과 같고,

그 값은 $\dfrac{17}{2}$이다.

따라서 $\dfrac{89}{12}+\dfrac{17}{2}=\dfrac{191}{12}$이므로 $p=12,\ q=191$

$p+q=203$

정답과 해설

〈 미적분 〉

23. $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{1-\cos 2x}$

$=\lim_{x\to 0} 9\times\dfrac{1-\cos 3x}{(3x)^2}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{(2x)^2}{1-\cos 2x}$

$=\dfrac{9}{4}$

24. $\int_{e^2}^{e^8}\dfrac{1}{x\ln x}dx$에서 $\ln x=t$, $\dfrac{1}{x}dx=dt$

로 치환하면

$\int_{2}^{8}\dfrac{1}{t}dt=[\ln t]_2^8=\ln 8-\ln 2=\ln 4$

$=2\ln 2$

25. 주어진 입체도형의 부피는

$\int_1^3\left(\sqrt{x(x+1)}-\dfrac{1}{\sqrt{x(x+1)}}\right)^2dx$이므로

$\int_1^3 x(x+1)-2+\dfrac{1}{x(x+1)}dx$

$=\int_1^3 x^2+x-2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}dx$

$=\left[\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+2x+\ln x-\ln(x+1)\right]_1^3$

$=\dfrac{26}{3}+\ln\dfrac{3}{2}$

26. 주어진 식에서

$-\sqrt{3}<t<0$에서 $x>0$,

$0<t<\sqrt{3}$에서 $x<0$이므로

점 $\mathrm{P}(-1,\ 0)$은 $t=\sqrt{2}$에 대응하는 점이고

점 $\mathrm{Q}(1,\ 0)$은 $t=-\sqrt{2}$에 대응하는 점이다.

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2bt}{3at^2-3a}$에서

$t=-\sqrt{2}$일 때 $\dfrac{dy}{dx}<0$,

$t=\sqrt{2}$일 때 $\dfrac{dy}{dx}>0$이므로

점 P에서 곡선 $y=f(x)$에 접하는

직선의 기울기는 $\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$이고

점 Q에서 곡선 $y=f(x)$에 접하는

직선의 기울기는 $-\tan\dfrac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$이다.

$t=\sqrt{2}$일 때 $2\sqrt{2}a-3\sqrt{2}a=-\sqrt{2}a=-1$

이므로 $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이고

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2\sqrt{2}b}{3a}=\dfrac{4b}{3}=\sqrt{3}$이므로

$b=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$이다.

따라서 $a\times b=\dfrac{3\sqrt{6}}{8}$

정답과 해설

27. 모든 자연수 n에 대하여

$\tan^2 \pi a_n = \dfrac{1}{a_n}$이므로

$-\tan \pi a_{2n} = \dfrac{1}{a_{2n}}$이고

$\tan \pi a_{2n+1} = \dfrac{1}{a_{2n+1}}$이다.

$$\frac{a_{2n+1}+1}{a_{2n+1}-1} = \frac{1+\dfrac{1}{a_{2n+1}}}{1-\dfrac{1}{a_{2n+1}}}$$

$$= \frac{\tan\dfrac{\pi}{4} + \tan \pi a_{2n+1}}{1-\tan\dfrac{\pi}{4}\times \tan \pi a_{2n+1}}$$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{4} + \pi a_{2n+1}\right)$$

이고

$$\frac{a_{2n}-1}{a_{2n}+1} = \frac{1-\dfrac{1}{a_{2n}}}{1+\dfrac{1}{a_{2n}}}$$

$$= \frac{\tan\dfrac{\pi}{4} + \tan \pi a_{2n}}{1-\tan\dfrac{\pi}{4}\times(-\tan \pi a_{2n})}$$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{4} + \pi a_{2n}\right)$$

이므로 주어진 극한은

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tan^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\pi a_{2n+1}\right) - \tan^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\pi a_{2n}\right)}{a_{2n+1}-a_{2n}}$$

이다. $n\to\infty$이면 $a_{2n+1}-a_{2n}\to 0$이므로

주어진 극한은 함수 $f(x) = \tan^2 x$라 하면

$\pi f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$의 값과 같다.

$f'(x) = 2\tan x\sec^2 x$이므로

$\pi f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \pi\times 2\times 1\times 2 = 4\pi$

28. 조건 (가)에서 $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f(x)}{x^2}\right) = \dfrac{3x^2}{\ln(x^3+1)}$

이고 $f(\sqrt[3]{3}) = \dfrac{\sqrt[3]{9}}{2}\times f(1)$이므로

조건 (나)에서

$$g(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{t^3+1}dt$$

$$= \int_1^x \frac{t^2}{t^3+1}\times\frac{f(t)}{t^2}dt$$

$$= \left[\frac{1}{3}ln(t^3+1)\times\frac{f(t)}{t^2}\right]_1^x$$

$$-\int_1^x \frac{1}{3}ln(t^3+1)\times\frac{3t^2}{\ln(t^3+1)}dt$$

$$= \frac{1}{3}ln(x^3+1)\times\frac{f(x)}{x^2} - \frac{f(1)}{3}ln2 - \int_1^x t^2 dt$$

$$= \frac{1}{3}ln(x^3+1)\times\frac{f(x)}{x^2} - \frac{f(1)}{3}ln2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}$$

이다. 따라서

$$g(\sqrt[3]{3}) = \frac{\ln 4}{3}\times\frac{f(\sqrt[3]{3})}{\sqrt[3]{9}} - \frac{f(1)}{3}ln2 - 1 + \frac{1}{3}$$

$$= -\frac{2}{3}$$

정답과 해설

29. 함수 $f(x)$가 $x>0$에서 미분가능하고

$x=g(t)$에서 극소이므로

모든 $t\ge -1+\sqrt{3}$인 실수 t에 대하여

$f'(g(t))=0$에서

$\frac{2\ln(g(t))}{g(t)}+2g(t)-t^2-2t=0$이 성립한다.

따라서 $\frac{2\ln(g(t))}{g(t)}+2g(t)=t^2+2t$에서

$\frac{2\ln(g(t))}{g(t)}+2g(t)+1=t^2+2t+1=(t+1)^2$

$t\ge -1+\sqrt{3}$에서 $t+1>0$이고

$\frac{2\ln(g(t))}{g(t)}+2g(t)+1>0$이므로

$\sqrt{\frac{2\ln(g(t))}{g(t)}+2g(t)+1}=t+1$,

$\sqrt{\frac{2\ln(g(t))}{g(t)}+2g(t)+1}-1=t$

즉 함수 $g(t)$의 역함수는

$h(t)=\sqrt{\frac{2\ln t}{t}+2t+1}-1$이다.

$h'(t)=\dfrac{\frac{2-2\ln t}{t^2}+2}{2\sqrt{\frac{2\ln t}{t}+2t+1}}$에서

$h'(e)=\dfrac{2}{2\sqrt{\frac{2}{e}+2e+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{\frac{2}{e}+2e+1}}$

이므로 $\frac{1}{\{h'(e)\}^2}=\frac{2}{e}+2e+1$,

$\frac{e}{\{h'(e)\}^2}=2e^2+e+2$

따라서 $a=2$, $b=1$, $c=2$이므로

$a+b+c=2+1+2=5$

(다른 풀이)

$h(g(t))=t$에서 $g'(t)\times h'(g(t))=1$,

$h'(g(t))=\frac{1}{g'(t)}$이므로

$g(\alpha)=e$를 만족하는 실수 α에 대하여

$e\times\{g'(\alpha)\}^2$의 값을 구하면 된다.

$\frac{2\ln(g(t))}{g(t)}+2g(t)=t^2+2t$에서

$\sqrt{\frac{2\ln(g(t))}{g(t)}+2g(t)+1}-1=t$

$t=\alpha$일 때

$\sqrt{\frac{2}{e}+2e+1}-1=\alpha$

$\frac{2\ln(g(t))}{g(t)}+2g(t)=t^2+2t$에서

양변을 t에 대하여 미분하면

$\left\{\frac{\{2-2\ln(g(t))\}}{\{g(t)\}^2}+2\right\}g'(t)=2t+2$,

$2g'(\alpha)=2\alpha+2=2\sqrt{\frac{2}{e}+2e+1}$

이므로 $g'(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{e}+2e+1}$

따라서 $\{g'(\alpha)\}^2=\frac{2}{e}+2e+1$,

$e\times\{g'(\alpha)\}^2=2e^2+e+2$

이므로 $a=2$, $b=1$, $c=2$

$a+b+c=2+1+2=5$

정답과 해설

30. 함수 $f(x)$의 이계도함수 $f''(x)$가
$f''(x)=(x^2-x-2)e^{-x}$이므로
$f'(x)=(-x^2-x+1)e^{-x}+C$(C는 적분상수)
에서 $f'(0)=1$이므로 $C=0$이고
$f(x)=(x^2+3x+2)e^{-x}+k$(k는 상수)
이다.
방정식 $f(x)=f'(t)(x-t)+f(t)$
의 실근의 개수 $g(t)$는 곡선 $y=f(x)$와
점 $(t,\ f(t))$에서 곡선 $y=f(x)$에 접하는
직선의 교점의 개수와 같고
함수 $g(t)$가 불연속이 되는 t의 값은
함수 $f(x)$가 극값 또는 변곡점을 갖는
x의 값과 같다.

함수 $f(x)$가 극값을 갖는 x의 값은
방정식 $f'(x)=0$에서 $-x^2-x+1=0$을
만족하는 두 실근과 같고
함수 $f(x)$가 변곡점을 갖는 x의 값은
방정식 $f''(x)=0$에서 $x^2-x-2=0$을
만족하는 두 실근과 같다.

함수 $g(x)h(x)$가 모든 실수 a에 대하여
$\lim_{x\to a+} g(x)h(x)=\lim_{x\to a-} g(x)h(x)=g(a)h(a)$
를 만족시켜야 하므로, 함수 $g(x)$가 $x=c$에서
불연속이면 $h(c)=0$을 만족시켜야 한다.
따라서 방정식 $-x^2-x+1=0$의 두 실근과
방정식 $x^2-x-2=0$의 두 실근이
방정식 $h(x)=0$의 네 실근이 되면 된다.

함수 $h(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로
조건을 만족시키는 함수 $h(x)$는
$h(x)=(x^2+x-1)(x^2-x-2)$이다.
따라서 $h(3)=44$