2025학년도 연세대학교 모의 논술 문제 자연계열(수학)

모집단위		수험번호		성 명	

[문제 1, 단답형] 한 변이 길이가 1인 정사각형 ABCD가 평면 위에 있다고 하자. 점 P는 정사각형 ABCD의 내부 또는 경계에 있는 점이고, 두 점 $\mathrm{P_1}, \mathrm{P_2}$는 각각 P에서 선분 BC, CD로 내린 수선의 발이다. $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{PP_1}}$을 만족하는 점 P가 나타내는 곡선을 C_1, $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{PP_2}}$를 만족하는 점 P가 나타내는 곡선을 C_2라 하자. 선분 AB, AD와 곡선 C_1로 둘러싸인 영역을 S_1이라 하고 선분 AB, AD와 곡선 C_2로 둘러싸인 영역을 S_2라 하자. S_1과 S_2의 공통부분 S라고 할 때 (즉, $S=S_1\cap S_2$), S의 넓이를 구하시오. [10점]

[문제 2, 단답형] $1\le n\le 10$인 자연수 n에 대하여 $a_n=\sum_{m=n}^{10}\frac{m+2n-1}{m^3(m+1)(m+2)}$ 이라고 하자. $\sum_{n=1}^{10}a_n$ 의 값을 구하시오. [10점]

[문제 3, 단답형] 좌표평면에 원형의 동전을 던지려고 한다. 좌표평면 위의 x좌표, y좌표가 모두 정수인 점을 격자점이라고 하자.

[문제 3-1] 반지름이 R인 동전을 던졌을 때, 동전이 격자점을 적어도 한 개 반드시 덮는다고 하자. 이때 R의 최솟값을 구하시오 (단, 격자점이 동전의 경계에 놓인 경우도 덮는 것으로 간주한다.) [5점]

[문제 3-2] [문제 3-1]에서 구한 최솟값을 반지름으로 갖는 동전을 던졌을 때 동전이 격자점을 정확히 두 개만 덮었다고 하자. 이때 동전의 중심이 $(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)$ 을 꼭짓점으로 갖는 정사각형 안에서 놓일 수 있는 영역의 면적을 구하시오. [5점]

[문제 4, 단답형] n개의 칸이 연결된 지하철이 있다. 여행자는 지하철의 첫 번째 칸에 타고 출발한다고 하자.

여행자는 다음 규칙에 따라 칸을 이동한다.

a) 여행자는 4초마다 한 칸씩 다음 칸으로 이동하며 마지막 칸에 도착한 후 첫 번째 칸 방향으로 돌아오는 왕복운동을 계속한다 (예를 들어, 첫 번째 칸에 타고 출발하는데 4초가 되는 순간 두 번째 칸, 8초가 되는 순간 세 번째 칸으로 이동한다. n번째 칸에 4초 동안 머문 후에는 $n-1$ 번째 칸으로 다시 돌아오며 첫 번째 칸 방향으로 계속 이동한다.)

b) 지하철이 한 역에서 그 다음 역까지 이동하는데 소요되는 시간은 6분이다.

c) 지하철에서 내릴 수 있는 출구는 n번째 칸에만 있다.

d) 지하철이 역에 도착했을 시, 여행자는 n번째 칸에 있을 때만 내릴 수 있다.

e) 출발역은 0번째 역으로 한다.

[문제 4-1] $n=8$일 때, 여행자가 내릴 수 있는지 판별하고 내릴 수 있다면 몇 번째 역에서 처음으로 내릴 수 있는지 구하시오. [5점]

[문제 4-2] $n=9$일 때, 여행자가 내릴 수 있는지 판별하고 내릴 수 있다면 몇 번째 역에서 처음으로 내릴 수 있는지 구하시오. [5점]

[문제 5, 서술형] 함수 f가 실수 전체 집합에서 미분가능하다.

[문제 5-1] 함수 f가 다음 조건을 만족한다.

a) $f(1)=1885$
b) 모든 실수 x에 대해 $f(x)=cf\left(\frac{x}{c}\right)$ 이다 (단, $c>0$은 $c\neq 1$인 특정한 상수이다.)

$f'(0)$의 값과 위의 조건을 만족하는 가능한 모든 함수 f를 구하시오. [15점]

[문제 5-2] $0<c<1$인 특정한 상수 c에 대하여 함수 f가 다음 조건을 만족한다.

a) $\int_{c}^{1} f(x)dx=1$
b) 모든 실수 x에 대해 $f(x)=c^{-2}f(cx)$이다.

$a_k=\int_{c^k}^{1} f(x)dx$라 할 때 $\lim_{k\to\infty} a_k$의 값을 구하시오. [15점]

[문제 6, 서술형] 자연수 전체 집합에서 정의된 함수 f가 모든 자연수 n에 대해 다음을 만족한다고 하자(단, 함수 f의 공역은 자연수 전체 집합이다).

$$f(n)+f(n+1)=f(n+2)f(n+3)-2025$$

[문제 6-1] 모든 자연수 n에 대해 부등식 $f(n)\leq f(n+2)$가 성립함을 보이시오. [10점]

[문제 6-2] $f(1)=1$일 때, $f(21)$이 될 수 있는 값을 모두 구하시오. [20점]