

제 2 교시

수학 영역

5 지선 다형

1. $\sqrt[5]{54} \times 2^{\frac{5}{3}}$ 의 값은? [2점] 5

- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

$$= 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3 \cdot 2^{\frac{5}{3}}$$

$$= 2^2 \cdot 3 = 12$$

2. 함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$ 에 대하여 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{2h}$ 의

값은? [2점] 3

- ① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

$$= \frac{f'(3)}{2}$$

$$= \frac{3x^2 - 6x + 1}{2} \Big|_{x=3}$$

$$= 5$$

3. $\cos\theta > 0$ 이고 $\sin\theta + \cos\theta \tan\theta = -1$ 일 때, $\tan\theta$ 의 값은?

2 [3점]

- ① $-\sqrt{3}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ 1 ⑤ $\sqrt{3}$

$$2 \sin\theta = -1$$

$$\tan\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (\because \cos\theta > 0)$$

4. 함수

$$f(x) = \begin{cases} 2x+a & (x < 3) \\ \sqrt{x+1}-a & (x \geq 3) \end{cases}$$

이 $x=3$ 에서 연속일 때, 상수 a 의 값은? [3점] /

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$$6 + a = 2 - a \quad a = -2$$

5. 다항함수 $f(x)$ 가

$$f'(x) = x(3x+2), \quad f(1) = 6$$

을 만족시킬 때, $f(0)$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\begin{aligned} f(0) &= - \int_0^1 f'(x) dx + 6 \\ &= - \left[\frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 \right]_0^1 + 6 \\ &= -2 + 6 = 4 \end{aligned}$$

6. 공비가 1보다 큰 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

$$\frac{S_4}{S_2} = 5, \quad a_5 = 48$$

일 때, $a_1 + a_4$ 의 값은? [3점]

- ① 39 ② 36 ③ 33 ④ 30 ⑤ 27

$$\frac{S_4}{S_2} = \frac{S_2 + r^2 S_2}{S_2} = 1 + r^2 = 5$$

$$r = 2 \quad (\because r > 1)$$

$$\therefore a_n = 3 \times 2^{n-1} \quad (\because a_5 = 48)$$

$$a_1 + a_4 = 3 + 24 = 27.$$

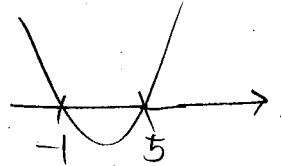
7. 함수 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x + 1$ 이 닫힌구간 $[a, b]$ 에서

감소할 때, $b-a$ 의 최댓값은? (단, a, b 는 $a < b$ 인 실수이다.)

[3점]

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$$f'(x) = x^2 - 4x - 5$$



$$(b-a)_{\max} = 5 - (-1) = 6$$

8. 두 다항함수 $f(x), g(x)$ 에 대하여

$$(x+1)f(x) + (1-x)g(x) = x^3 + 9x + 1, \quad f(0) = 4$$

일 때, $f'(0) + g'(0)$ 의 값은? [3점] 2

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$x=0 \Rightarrow 4 + g(0) = 1, \quad g(0) = -3$$

미분 \Rightarrow

$$(x+1)f'(x) + f(x) + (1-x)g'(x) - g(x) = 3x^2 + 9$$

$$= 3x^2 + 9$$

$$x=0 \Rightarrow$$

$$f'(0) + g'(0) = 9 - f(0) + g(0)$$

$$= 9 - 4 - 3 = 2$$

9. 좌표평면 위의 두 점 $(0, 0), (\log_2 9, k)$ 를 지나는 직선이 직선 $(\log_4 3)x + (\log_8 8)y - 2 = 0$ 에 수직일 때, 3^k 의 값은? (단, k 는 상수이다.) [4점] 3

- ① 16 ② 32 ③ 64 ④ 128 ⑤ 256

$$\frac{k}{\log_2 9} \times \left(-\frac{\log_4 3}{\log_8 8} \right) = -1$$

$$k = 3 \log_2 4 = \log_2 64$$

$$3^k = 64$$

10. 시간 $t=0$ 일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시간 $t(t \geq 0)$ 에서의 속도가 각각

$$v_1(t) = 3t^2 - 6t - 2, \quad v_2(t) = -2t + 6$$

이다. 출발한 시각부터 두 점 P, Q가 다시 만날 때까지 점 Q가 움직인 거리는? [4점] 4

- ① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

$$x_1(t) - x_2(t) = \int_0^t (v_1(t) - v_2(t)) dt$$

$$= \left[t^3 - 2t^2 - 8t \right]_0^t$$

$$= t^3 - 2t^2 - 8t$$

$$= t(t+2)(t-4)$$

만날 때 $\Rightarrow t=4$.

$$x_Q = \int_0^4 |v_2(t)| dt$$

$$= \int_0^3 (-2t+6) dt + \int_3^4 (2t-6) dt$$

$$= 9 + 1 = 10$$

11. 공차가 음의 정수인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_6 = -2, \sum_{k=1}^8 |a_k| = \sum_{k=1}^8 a_k + 42$$

일 때, $\sum_{k=1}^8 a_k$ 의 값은? [4점] 2

- ① 40 ② 44 ③ 48 ④ 52 ⑤ 56

$$a_n = d(n-6) - 2 \quad (d \text{는 음의 정수})$$

$$a_1, a_2, \dots, a_4 \geq 0$$

$$a_6, a_7, a_8 < 0$$

$a_5 = \text{좌절할까리 양수 (두로)}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^8 (|a_k| - a_k) &= |a_5| - a_5 + \sum_{k=6}^8 (-2a_k) \\ &= |-2-d| + 2+d - 2 \times 3(-2+d) \\ &= -5d + 4 + |d+2| = 42 \end{aligned}$$

$$d = -5$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^8 a_k &= \sum_{k=1}^8 (2d - 5n) \\ &= 44 \end{aligned}$$

12. 실수 a 에 대하여 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 3x + a & (x < 0) \\ 3x + a & (x \geq 0) \end{cases}$$

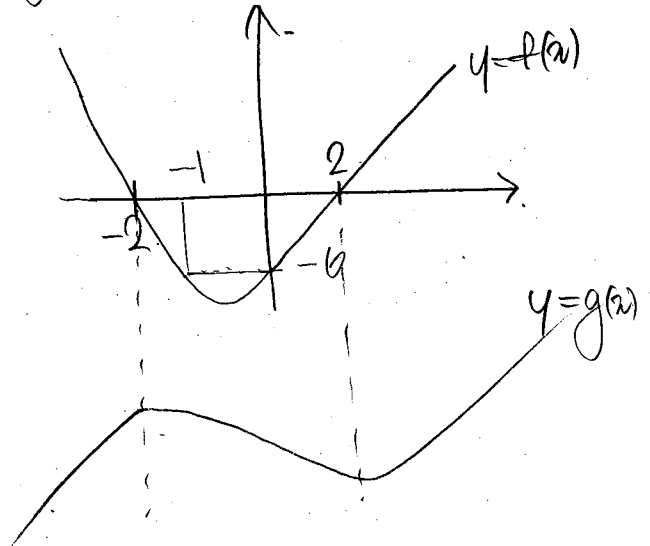
이다. 함수

$$g(x) = \int_{-4}^x f(t) dt$$

가 $x=2$ 에서 극솟값을 가질 때, 함수 $g(x)$ 의 극댓값은? [4점] 5

- ① 18 ② 20 ③ 22 ④ 24 ⑤ 26

$$g'(2) = f(2) = 0 \Rightarrow a = -6$$



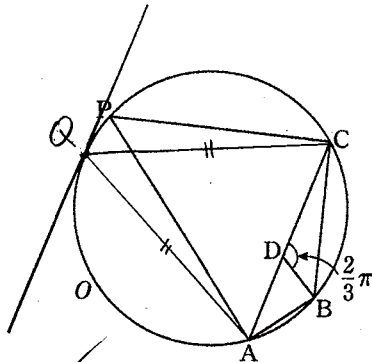
$$\begin{aligned} g(-2) &= \int_{-4}^{-2} (3t^2 + 3t - 6) dt \\ &= \left[t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 6t \right]_{-4}^{-2} \\ &= 26 \end{aligned}$$

13. 그림과 같이

$$2\overline{AB} = \overline{BC}, \quad \cos(\angle ABC) = -\frac{5}{8}$$

인 삼각형 ABC의 외접원을 O라 하자. 원 O 위의 점 P에 대하여 삼각형 PAC의 넓이가 최대가 되도록 하는 점 P를 Q라 할 때, $\overline{QA} = 6\sqrt{10}$ 이다. 선분 AC 위의 점 D에 대하여 $\angle CDB = \frac{2}{3}\pi$ 일 때, 삼각형 CDB의 외접원의 반지름의 길이는?

2 [4점]



- ① $3\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{3}$ ③ $3\sqrt{6}$ ④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{6}$

$\overline{AB} = k, \overline{BC} = 2k$, 코사인법칙 \Rightarrow

$$-\frac{5}{8} = \frac{k^2 + 4k^2 - \overline{AC}^2}{2 \cdot k \cdot 2k}, \quad \overline{AC} = \frac{\sqrt{30}}{2} k$$

$\cos(\angle AQC) = \frac{5}{8}$, 코사인법칙 \Rightarrow

$$\frac{5}{8} = \frac{(6\sqrt{10})^2 + (6\sqrt{10})^2 - \overline{AC}^2}{2 \cdot 6\sqrt{10} \cdot 6\sqrt{10}}, \quad \overline{AC} = 2\sqrt{10}$$

$\therefore k = 6$, 사인법칙 (CDB) \Rightarrow

$$2r = \frac{2k}{\sin \frac{2}{3}\pi} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot 12$$

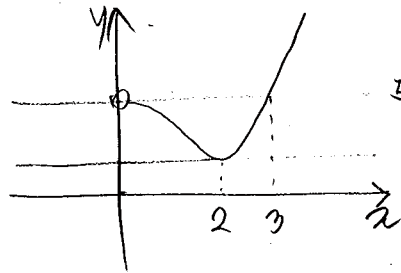
$$r = 4\sqrt{3}$$

14. 두 정수 a, b에 대하여 함수 f(x)는

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax + \frac{a^2}{4} + b^2 & (x \leq 0) \\ x^3 - 3x^2 + 5 & (x > 0) \end{cases}$$

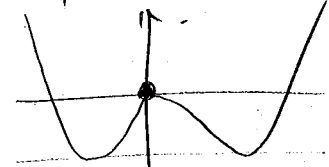
이다. 실수 t에 대하여 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = t$ 가 만나는 점의 개수를 g(t)라 하자. 함수 g(t)가 t=k에서 불연속인 실수 k의 개수가 2가 되도록 하는 두 정수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는? [4점]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7



t=1에서 무조건 g(t) 불연속

$$\frac{a^2}{4} + b^2 = 1 \Rightarrow$$

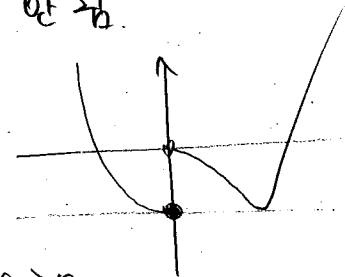


\rightarrow 숫자 k $b^2 - \frac{3}{4}a^2 = 1$

$a^2 = 4, b^2 = 4 \Rightarrow 2$ 개.
(a < 0)

$\frac{a^2}{4} + b^2 > 5 \Rightarrow$ 안 됨.

$\frac{a^2}{4} + b^2 < 5 \Rightarrow$



$\frac{a^2}{4} + b^2 = 1, a \geq 0$

(a, b) = (0, ±1), (2, 0) $\Rightarrow 3$ 개.

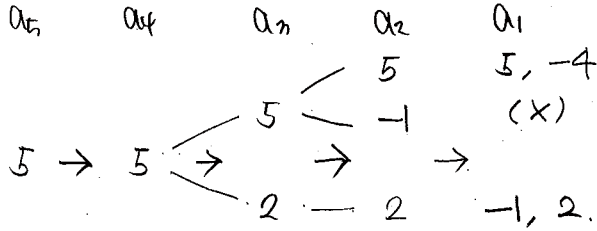
15 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n & (a_n > n) \\ 3n-2-a_n & (a_n \leq n) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, $a_5 = 5$ 가 되도록 하는 모든 a_1 의 값의 곱은?

3 [4점]

- ① 20 ② 30 ③ 40 ④ 50 ⑤ 60



단답형

16 방정식 $4^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-9}$ 을 만족시키는 실수 x 의 값을 구하시오.

3 [3점]

$$2^{2x} = 2^{9-x} \quad x=3$$

17. $\int_0^2 (3x^2 - 2x + 3) dx - \int_2^0 (2x + 1) dx$ 의 값을 구하시오. [3점] 16

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^2 (3x^2 + 4) dx \\
 &= \left[x^3 + 4x \right] = 16
 \end{aligned}$$

18. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^9 a_k = 137, \quad \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^9 2a_k = 101$$

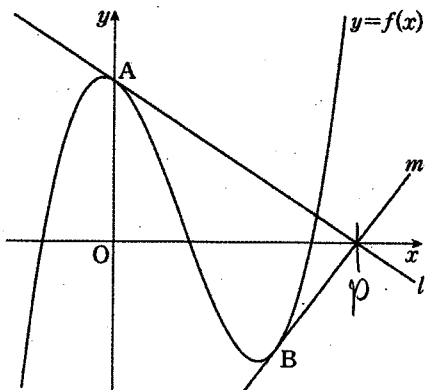
일 때, a_{10} 의 값을 구하시오. [3점] 113

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = 125, \quad \sum_{k=1}^9 a_k = 12$$

$$a_{10} = 125 - 12 = 113$$

19. 실수 a 에 대하여 함수 $f(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + ax + 2$ 이다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $A(0, 2)$, $B(2, f(2))$ 에서의 접선을 각각 l , m 이라 하자. 두 직선 l , m 이 만나는 점이 x 축 위에 있을 때, $60 \times |f(2)|$ 의 값을 구하시오. [3점] 80



$$l: y = a_2 + 2$$

$$m: y = (a+2)(x-2) + 2a$$

$$ap + 2 = ap - 2a + 2p - 4 + 2a = 0$$

$$p = 3, \quad a = -\frac{2}{3}$$

$$f(2) = 2a = -\frac{4}{3}, \quad 60 \times |f(2)| = 80$$

20. 두 함수 $f(x) = 2x^2 + 2x - 1$, $g(x) = \cos \frac{\pi}{3}x$ 에 대하여

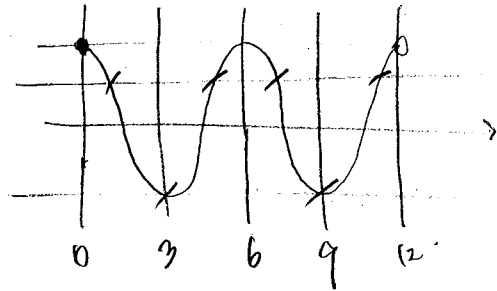
$0 \leq x < 12$ 에서 방정식

$$f(g(x)) = g(x)$$

를 만족시키는 모든 실수 x 의 값의 합을 구하시오. [4점] 36

$$f(t) = t, \quad 2t^2 + t - 1 = 0$$

$$t = \frac{1}{2} \text{ or } t = -1$$



$$(3 \times 2) + (9 \times 2) + 3 + 9 = 36$$

21. $a > 2$ 인 실수 a 에 대하여 기울기가 -1 인 직선이 두 곡선

$$y = a^x + 2, \quad y = \log_a x + 2$$

와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 선분 AB를 지름으로 하는 원의 중심의 y 좌표가 $\frac{19}{2}$ 이고 넓이가 $\frac{121}{2}\pi$ 일 때, a^2 의 값을 구하시오. [4점] 13

$$y = a^x + 2, \quad y = \log_a x + 2$$

$$\Rightarrow y = x + 2 \text{ 에 대칭}$$

$$\text{반지름} = \frac{11}{2} \times \sqrt{2}$$

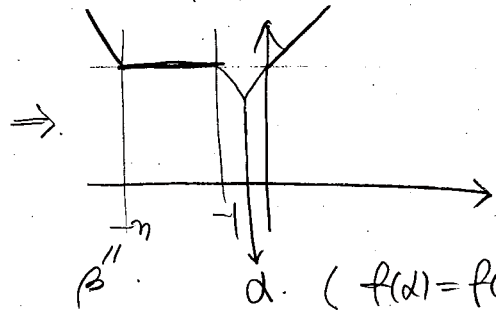
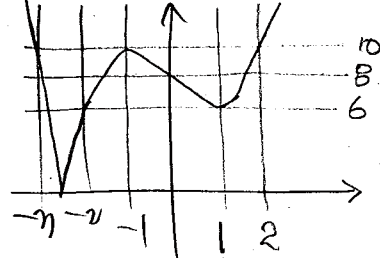
$$\text{중심} = \left(\frac{15}{2}, \frac{19}{2} \right)$$

$$A, B \Rightarrow (2, 15), (13, 4)$$

$$a^2 + 2 = 15, \quad a^2 = 13$$

22. 함수 $f(x) = |x^3 - 3x + 8|$ 과 실수 t 에 대하여

닫힌구간 $[t, t+2]$ 에서의 $f(x)$ 의 최댓값을 $g(t)$ 라 하자. 서로 다른 두 실수 α, β 에 대하여 함수 $g(t)$ 는 $t = \alpha$ 와 $t = \beta$ 에서만 미분가능하지 않다. $\alpha\beta = m + n\sqrt{6}$ 일 때, $m+n$ 의 값을 구하시오. (단, m, n 은 정수이다.) [4점] 2



$$\alpha^3 - 3\alpha + 8 = (\alpha + 2)^3 - 3(\alpha + 2) + 8$$

$$\alpha = -1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\alpha\beta = 3 - \sqrt{6}$$

$$m = 3, \quad n = -1, \quad m + n = 2$$

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n-1}}{2^n - 3^n}$ 의 값은? [2점]

- ① $-\frac{1}{3}$
 ② $-\frac{1}{6}$
 ③ 0
 ④ $\frac{1}{6}$
 ⑤ $\frac{1}{3}$

24. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = 3$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 a_n + b_n}{1 + 2b_n}$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{3}$
 ② $\frac{1}{2}$
 ③ $\frac{2}{3}$
 ④ $\frac{5}{6}$
 ⑤ 1

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n + \frac{b_n}{n}}{\frac{1}{n} + \frac{2b_n}{n}}$$

$$= \frac{1+3}{0+2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

25. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$2n+3 < a_n < 2n+4$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_n+1)^2+6n^2}{na_n}$ 의 값은? [3점] 5

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$a_n \approx 2n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 6n^2}{n \cdot 2n} = \frac{10}{2} = 5$$

26. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} - a_n = a_1 + 2$$

를 만족시킨다. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n + n}{a_n - n + 1} = 3$ 일 때, a_{10} 의 값은? 4

(단, $a_1 > 0$) [3점]

- ① 35 ② 36 ③ 37 ④ 38 ⑤ 39

$$a_n = a_1 + (a_1 + 2)(n-1)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_1 + (a_1 + 2)(2n-2) + n}{a_1 + (a_1 + 1)(n-1)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2a_1 + 5)n - 4}{(a_1 + 1)n - 1}$$

$$= \frac{2a_1 + 5}{a_1 + 1} = 3 \quad a_1 = 2$$

$$a_n = 4n - 2$$

$$a_{10} = 38$$

27. $a_1 = 3, a_2 = 6$ 인 등차수열 $\{a_n\}$ 과 모든 항이 양수인 수열 $\{b_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n a_k (b_k)^2 = n^3 - n + 3$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n b_{2n}}$ 의 값은? [3점] 2

- ① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ③ 3 ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ 6

$$a_1 (b_1)^2 = 3$$

$$\begin{aligned} n \geq 2, a_n (b_n)^2 &= \frac{n^3 - n^2}{n} - \frac{(n-1)^3 - (n-1)^2}{n-1} \\ &= 3n^2 - 3n + 1 + 1 \\ &= 3n^2 - 3n + 2 \end{aligned}$$

$$a_n = 3n$$

$$(b_n)^2 = n - 1 + \frac{2}{3n} \quad (n \geq 2)$$

$$= 1 \quad (n=1)$$

↳ 상한값

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n b_{2n}} &= \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^2}{(b_n)^2 (b_{2n})^2}} \\ &= \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^2}{(n-1 + \frac{2}{3n})(2n-1 + \frac{1}{3n})}} \\ &= \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

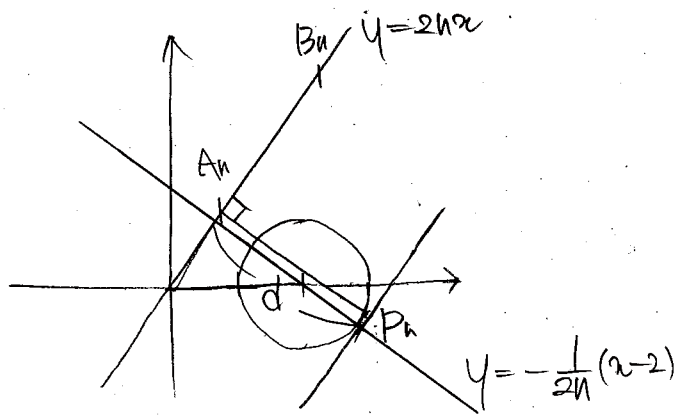
28. 자연수 n 에 대하여 직선 $y = 2nx$ 가 곡선 $y = x^2 + n^2 - 1$ 과 만나는 두 점을 각각 A_n, B_n 이라 하자. 원 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ 위의 점 P 에 대하여 삼각형 $A_n B_n P$ 의 넓이가 최대가 되도록 하는 점 P 를 P_n 이라 할 때, 삼각형 $A_n B_n P_n$ 의 넓이를 S_n 이라

하자. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}$ 의 값은? [4점] 3

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$$A_n (n-1, 2n^2 - 2n)$$

$$B_n (n+1, 2n^2 + 2n)$$



$$P_n \left(2 + \frac{2n}{\sqrt{4n^2 + 1}}, -\frac{1}{\sqrt{4n^2 + 1}} \right)$$

$$S_n = \Delta A_n B_n P_n$$

$$= \frac{1}{2} \times (2 \times \sqrt{4n^2 + 1}) \times d$$

$$= \sqrt{4n^2 + 1} \times \left(2 \times \frac{2n}{\sqrt{4n^2 + 1}} + 1 \right)$$

$$= 4n + \sqrt{4n^2 + 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = 6$$

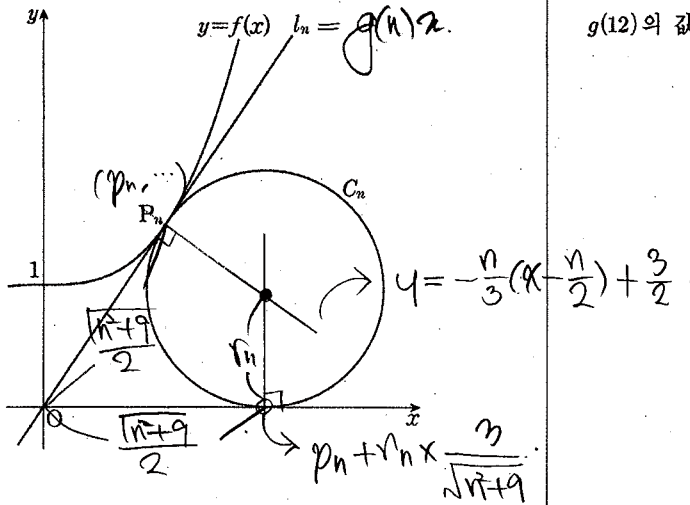
단답형

29. 자연수 n 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = \frac{4}{n^3}x^3 + 1$$

이라 하자. 원점에서 곡선 $y=f(x)$ 에 그은 접선을 l_n , 접선 l_n 의 접점을 P_n 이라 하자. x 축과 직선 l_n 에 동시에 접하고 점 P_n 을 지나는 원 중 중심의 x 좌표가 양수인 것을 C_n 이라 하자. 원 C_n 의 반지름의 길이를 r_n 이라 할 때, $40 \times \lim_{n \rightarrow \infty} n^2(4r_n - 3)$ 의 값을 구하시오. [4점]

270



$$\frac{4}{n^3} p_n^3 + 1 = g(n) p_n$$

$$\frac{12}{n^3} p_n^2 = g(n) \Rightarrow \frac{8}{n^3} p_n^3 = 1$$

$$p_n = \frac{n}{2} \Rightarrow g(n) = \frac{3}{n}$$

$$P_n \left(\frac{n}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

$$r_n = \frac{\sqrt{n^2+9}}{3} \left(\frac{\sqrt{n^2+9}}{2} - \frac{n}{2} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{n^2+9}}{6} \times \frac{9}{n + \sqrt{n^2+9}}$$

$$4r_n - 3 = \frac{3\sqrt{n^2+9} - 3n}{n + \sqrt{n^2+9}}$$

$$= \frac{27}{(n + \sqrt{n^2+9})^2} \approx \frac{27}{4n^2}$$

$$40 \times \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \frac{27}{4n^2} = 270$$

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 와 자연수 m 에 대하여 구간 $(0, \infty)$ 에서 정의된 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x) \left(\frac{x}{m} \right)^n + x}{\left(\frac{x}{m} \right)^n + 1}$$

라 하자. 함수 $g(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $g(x)$ 는 구간 $(0, \infty)$ 에서 미분가능하고, $g'(m+1) \leq 0$ 이다.
- (나) $g(k)g(k+1) = 0$ 을 만족시키는 자연수 k 의 개수는 3이다.
- (다) $g(l) \geq g(l+1)$ 을 만족시키는 자연수 l 의 개수는 3이다.

$g(12)$ 의 값을 구하시오. [4점] 84

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

[Step 1]

$x > 0$ 에서 정의된 함수 $g(x)$ 를 풀면,

$$g(x) = \begin{cases} x & (x < m) \\ \frac{f(x)+x}{2} & (x = m) \text{이다.} \\ f(x) & (x > m) \end{cases}$$

함수 $g(x)$ 는 $x > 0$ 에서 미분가능하므로

$$f(m) = m, f'(m) = 1 \text{에서}$$

$$f(x) = (x-m)^2(x-p) + x \quad (\text{단, } p > m) \quad \cdots \text{㉠}$$

로 쓸 수 있다.

[Step 2]

한편 $0 < x \leq m$ 에서 $g(x) \neq 0$ 이므로

$g(x) = 0$ 과 $x > m$ 이고 $f(x) = 0$ 은 동치이다.

조건 (나)에서

$f(k)f(k+1) = 0$ 을 만족하는 자연수 k 가 존재하므로,
 $k > m$ 이고 $f(k) = 0$ 을 만족하는 자연수 k 가 존재한다.

존재하는 자연수 k 의 개수가 1이면

조건 (나)를 만족하는 자연수의 개수가 최대 2이고,

존재하는 자연수 k 의 개수가 3이면

조건 (나)를 만족하는 자연수의 개수가 최소 4이다.

이는 모순이므로 $k > m$ 이고 $f(k) = 0$ 을 만족하는
두 자연수 k 를 각각 k_1, k_2 라 하자. (단, $m < k_1 < k_2$)

이때 $k_2 - k_1 \neq 1$ 이면 조건 (나)를 만족하는 자연수는

$k_1 - 1, k_1, k_2 - 1, k_2$ 이므로 4개이므로 모순이다.

따라서 $k_2 - k_1 = 1$ 이다.

따라서 $k_1 = k$ 라 하면

$$f(x) = (x-k)(x-k-1)(x-q) \quad (\text{단, } q < m) \quad \cdots \text{㉡}$$

로 쓸 수 있다.

[Step 3]

한편 조건 (다)를 만족하는 자연수 l 의 최댓값이 k 이고,

조건 (다)를 만족하는 자연수 l 의 집합이

$\{k-2, k-1, k\}$ 임을 알 수 있다.

이때 $g(m+1) = f(m+1) = (m+1-p) + m = 2m+1-p$,

$g(m) = m$ 에서 $g(m) > g(m+1)$ ($\because p > m+1$)이고,

$g(m) = m \geq g(m-1)$ 이므로

$(m-1)$ 은 조건 (다)를 만족하지 않고 m 은 만족한다.

따라서 $m = k-2$ 임을 알 수 있고,

$$f(x) = (x-m-2)(x-m-3)(x-q) \quad \cdots \text{㉢}$$

이다.

[Step 4]

㉠과 ㉢을 연립하면

$$(x-m)^2(x-p) + x = (x-m-2)(x-m-3)(x-q) \text{이다.}$$

삼차식의 근과 계수의 관계를 이용하자.

$$\text{이차항에서 } 2m+p = 2m+5+q \text{에서 } q = p-5 \quad \cdots \text{㉣}$$

㉣을 대입하면 일차항에서

$$m^2 + 2mp + 1 = (2m+5)(p-5) + (m+2)(m+3) \quad \cdots \text{㉤}$$

$$\text{상수항에서 } -m^2p = -(m+2)(m+3)(p-5) \quad \cdots \text{㉥}$$

따라서 ㉤과 ㉥을 연립하면 $p = m+4$, $m = 6$ 이므로

$$f(x) = (x-6)^2(x-10) + x, g(12) = f(12) = 84 \text{이다.}$$

$\therefore 84$