분수 해석과 상댓값 (feat.화학2, 근수축)

안녕하세요^^ 제가 수험생활 때 자주 쓰던 작은 팁을 공유하려 합니다.
이미 아시는 분들도 있겠지만 그래도 써볼게요.
처음 쓰는 칼럼이니 부족한 점이 있어도 너그럽게 봐주세요^^

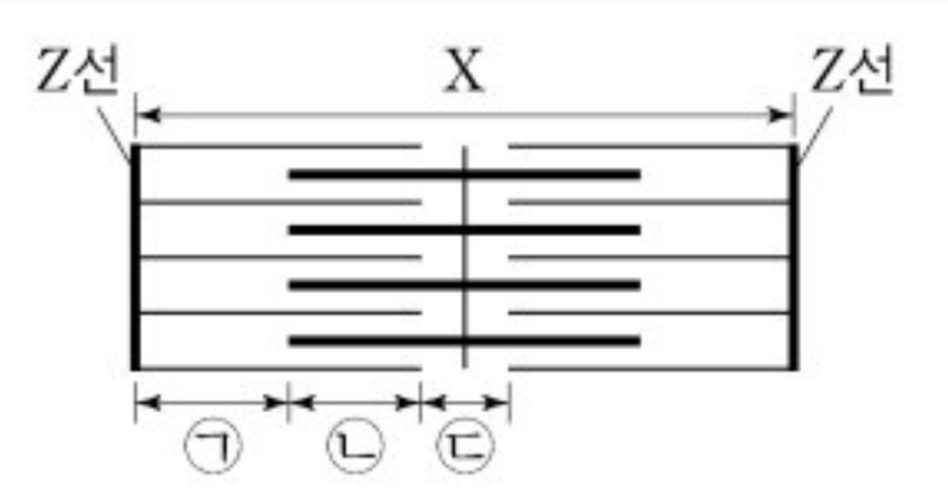
<EBS손은정 선생님, 오르비 전자책 어나더클래스의 영향을 일부 받았음을 알려드립니다>

◇분수 해석
생1의 근수축, 화2의 화학반응식 문제에서는 분수로 제시된 자료를 제시하는 경우가 많습니다.
특히 화2에서는 분수 자료가 매우 잦죠.(특히 몰 분율같은)
또한 근수축 문제에서도 분수자료가 많이 활용되고 있습니다.
이렇게 자주 제시되는 분수 자료를 좀 더 쉽고 빠르게 해석하는 법을 공유하려 합니다.

일단 사전개념으로 '변화량' 과 '고정값' 이란 용어를 소개하겠습니다.

☆변화량

변화량은 어떤 상황에서 변화하는 다양한 값 중 하나의 변화 정도를 기준으로 잡고 그에 대한 다른 값들의 변화 정도의 상댓값을 나타낸 것입니다.
예를 들어, 생1에서 한 근육 원섬유 마디에서 전체 마디(기준)의 변화량을 상대적으로 +2라 하면 H대의 변화량도 +2입니다. 또 액틴과 마이오신이 겹치는 부분의 절반은 -1의 변화량을 갖죠.



(위 그림에서 X의 변화량을 +2라 하면 ㉠의 변화량은 +1, ㉡의 변화량은 -1, ㉢의 변화량은 +2 입니다.)

또한, 화학에서는 예를 들어 화학 반응식 A+2B->2C 이 있다고 하면 저는 A의 변화량을 -1, B의 변화량을 -2, C의 변화량을 +2라 정의하겠습니다.

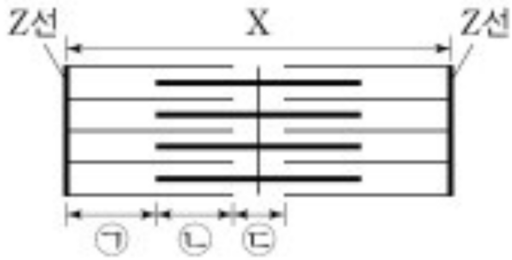
☆고정값

이 부분이 이 글의 핵심입니다. 결론부터 말하면 '변화량을 연산하여 0을 만든다' 입니다.

먼저 230610 생1 문제를 보겠습니다.

10. 다음은 골격근의 수축 과정에 대한 자료이다.

○ 그림은 근육 원섬유 마디 X의 구조를, 표는 골격근 수축 과정의 두 시점 t_1과 t_2일 때 ㉠의 길이에서 ㉢의 길이를 뺀 값을 ㉡의 길이로 나눈 값($\frac{㉠-㉢}{㉡}$)과 X의 길이를 나타낸 것이다. X는 좌우 대칭이고, t_1일 때 A대의 길이는 1.6㎛이다.



시점	$\frac{㉠-㉢}{㉡}$	X의 길이
t_1	$\frac{1}{4}$	?
t_2	$\frac{1}{2}$	3.0㎛

○ 구간 ㉠은 액틴 필라멘트만 있는 부분이고, ㉡은 액틴 필라멘트와 마이오신 필라멘트가 겹치는 부분이며, ㉢은 마이오신 필라멘트만 있는 부분이다.

위 자료에서 분수의 1,2,4 등은 약분을 거친 결과이기에 서로 같은 스케일의 수로 볼 수 없습니다. 다시 말하면 예를 들어 위의 ㉡의 2는 4의 절반의 값이라고 할 수 없죠. 그러나 고정값 활용을 이용하면 약분 전의 분수, 즉 같은 스케일로 분수를 조정할 수 있게 됩니다. 이는 변화량을 이용함으로 가능합니다.

위 분수에서 분자의 변화량은 ㉠-㉢= (+1)-(+2)=-1 입니다.
(꼭 ㉠의 변화량을 +1이라 할 필요는 없습니다. 한 마디의 변화량을 +1이라 하면 ㉠의 변화량은 0.5가 됩니다)

이때 분모의 변화량은 -1이고요. 이때, 분모와 분자의 변화량을 적당히 상수배하고 더하거나 빼서(일차결합) 0을 만들 수 있는 방법을 찾아 봅니다.
이 경우는 (분모의 변화량)-(분자의 변화량) 혹은 (분자의 변화량)-(분모의 변화량)이 0이 되겠네요.
그러면, 그 0이 된 연산의 값은 항상 일치해야 합니다. 이 일정한 값을 고정값이라고 하겠습니다.
다시 말해 위 경우라 하면 (분모)-(분자)의 4-1과 2-1은 서로 같아야 합니다.
그런데 3과 1로 서로 다르죠? 그러면 적당히 통분을 해서 같게 해 주면 됩니다. 즉 1/2를 3/6으로 만들면 됩니다. 그러면 (분모)-(분자)의 값은 모두 3으로 같게 됩니다. 물론 문제 상황에 따라서 2/8와 6/12로 바꿔도 되겠죠?

그런데 여기서 (분모의 변화량)-(분자의 변화량) 이 0이면 왜 서로 뺀 값이 항상 같아야 하는지 궁금하실 수 있습니다. 그 이유를 수식적으로 보이면, 예를 들어 분수 a/b에서 분모의 변화량이 +2, 분자의 변화량이 +1이라 합시다. 여기서 0을 만들려면 2×(분자의 변화량)-(분모의 변화량)=0 인데 a와 b가 각각 변화했을 때 분수는 a+x/b+2x 꼴로 표현됩니다. 이는 2×(분자)-(분모)의 값인 2a-b 의 값이 일정하다는 의미입니다.

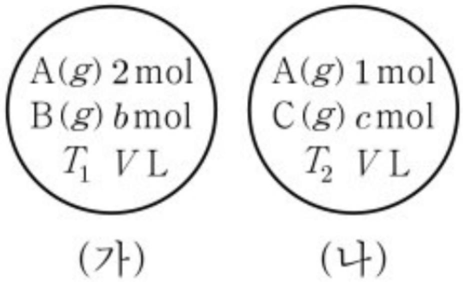
이 개념은 화2에도 동일하게 적용됩니다.
특히 몰 분율 해석에 유용하죠.
여기서는 화학 반응식의 계수를 변화량으로 쓰면 편리합니다. 여기서 반응물의 계수는 (-)부호를, 생성물의 계수는 (+)부호를 붙이면 됩니다.

230919 화2 문제를 보겠습니다.

19. 다음은 A(g)로부터 B(g)와 C(g)가 생성되는 반응의 화학 반응식과 반응 속도식이다. k는 반응 속도 상수이다.

$$A(g) \rightarrow B(g) + C(g) \qquad v = k[A]$$

그림은 강철 용기 (가)와 (나)에 A(g)~C(g)를 넣은 초기 상태를, 표는 온도 T_1과 T_2에서 이 반응이 진행될 때 $\frac{P_A}{P_B + P_C}$를 반응 시간에 따라 나타낸 것이다. P_A~P_C는 각각 A(g)~C(g)의 부분 압력이고, $\frac{\text{(나)에서 } 4t\text{일 때 C}(g)\text{의 양(mol)}}{\text{(가)에서 } 2t\text{일 때 B}(g)\text{의 양(mol)}} = 1$이다.



반응 시간		t	$2t$	$3t$	$4t$
$\frac{P_A}{P_B + P_C}$	(가)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{18}$	
	(나)		x		$\frac{1}{13}$

이 문제에서 A/B+C 형태의 분수에서 분자의 변화량은 -1, 분모의 변화량은 +2 이므로 2×(분자의 변화량)+(분모의 변화량)=0 입니다.
이때 (가)에서 2×(분자)+(분모)의 값들은 각각 5,10,20 인데 모두 같아야 하므로 최소공배수를 찾으면 되겠네요. 즉 20으로 통일하면 분수들은 각각 4/12, 2/16, 1/18 이 됩니다(보통 숫자가 큰 분수가 변하지 않는 경우가 많습니다).

다른 문제를 보겠습니다.(221119)

19. 다음은 A(g)로부터 B(g)가 생성되는 반응의 화학 반응식과 반응 속도식이다. k는 반응 속도 상수이다.

$$2A(g) \rightarrow B(g) \qquad v = k[A]$$

표는 A(g)와 B(g)의 혼합 기체를 강철 용기 (가)와 (나)에 각각 넣은 후 반응이 진행될 때, $\frac{B(g)\text{의 양(mol)}}{A(g)\text{의 양(mol)}}$을 반응 시간에 따라 나타낸 것이다. (가)와 (나)에서 온도는 각각 T_1과 T_2로 일정하고, (나)에서 반응 전 A(g)의 몰 분율은 $\frac{2}{3}$이다.

반응 시간		$2t$	$3t$
$\frac{B(g)\text{의 양(mol)}}{A(g)\text{의 양(mol)}}$	(가)	7	$\frac{29}{2}$
	(나)		$\frac{7}{2}$

여기서도 분자의 변화량이 +1, 분모의 변화량이 −2 이므로 2×(분자의 변화량)+(분모의 변화량)=0 입니다.
그러므로 2×(분자)+(분모)의 값들인 15(7은 7/1로 봅니다), 60을 최소공배수 60으로 바꾸면 각각 28/4, 29/2 가 됩니다.
또한 (나)에서 초기 몰 분율이 2/3이라는 말을 분수값이 1/2 이라는 의미로 이해할 수 있으므로 2×(분자)+(분모)의 값들은 반응 전 4, 3t일때 16으로 이해할 수 있습니다. 따라서 반응 전의 분수를 28/4, 29/2 로 볼 수 있습니다.(반감기가 t라는 것도 바로 확인되네요^^)

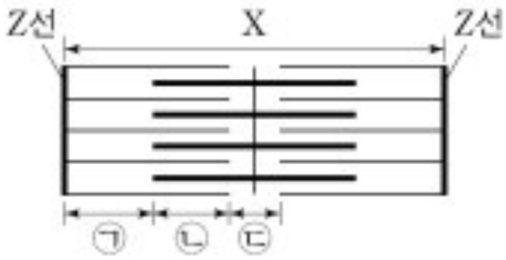
◇상댓값

'상댓값' 을 이용하면 분수해석을 더 효율적으로 사용할 수 있습니다.
상댓값이란 별게 아니라 실제적인 수치(실제값) 대신 값들 사이의 비율을 간단한 자연수 등으로 바꾸어 사용하는 것을 말합니다. 예로, 바로 위 문제에서 (가)의 2t의 A의 양을 2, B의 양을 29라 보는 것입니다.
물론 정확한 실제값이 아니기에 나중에 다시 바꾸어야 하겠지만 몇 가지 주의사항만 지키면 계산이 편리해집니다.

앞에서 소개한 생1 230610 문제를 보겠습니다.

10. 다음은 골격근의 수축 과정에 대한 자료이다.

○ 그림은 근육 원섬유 마디 X의 구조를, 표는 골격근 수축 과정의 두 시점 t_1과 t_2일 때 ㉠의 길이에서 ㉢의 길이를 뺀 값을 ㉡의 길이로 나눈 값($\frac{㉠-㉢}{㉡}$)과 X의 길이를 나타낸 것이다. X는 좌우 대칭이고, t_1일 때 A대의 길이는 1.6㎛이다.



시점	$\frac{㉠-㉢}{㉡}$	X의 길이
t_1	$\frac{1}{4}$	?
t_2	$\frac{1}{2}$	3.0㎛

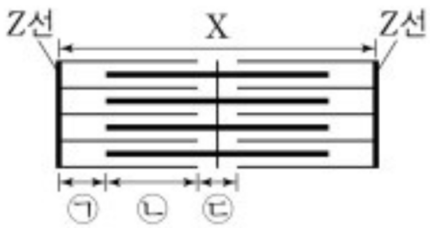
○ 구간 ㉠은 액틴 필라멘트만 있는 부분이고, ㉡은 액틴 필라멘트와 마이오신 필라멘트가 겹치는 부분이며, ㉢은 마이오신 필라멘트만 있는 부분이다.

먼저 t1보다 정보가 많은 t2 에서 X의 길이를 상대적으로 30이라 하겠습니다. (상댓값과 실제값은 ×10의 규칙을 갖겠네요.) 그러면 A대의 길이는 16이므로 ㉠은 7이고, 7-㉢/㉡=1/2, 2㉡+㉢=16 을 연립하여 ㉡=6, ㉢=4 라는 것을 알 수 있습니다. 여기서 만일 고정값을 활용하지 않는다면 다시 t1의 상태를 알기 위해 일차방정식을 풀어야 하겠지만 고정값 활용을 통해 분수를 각각 1/4와 3/6으로 이해한다면 바로 t1에서 ㉡=4 라는 것을 알 수 있고 바로 ㉠=9, ㉢=8 이라는 것을 알 수 있습니다. 그러면 각 수 앞에 소수점. 만 찍어주면 자료해석 완료!
(이때 실제값으로 되돌리지 않으면 큰일나요)

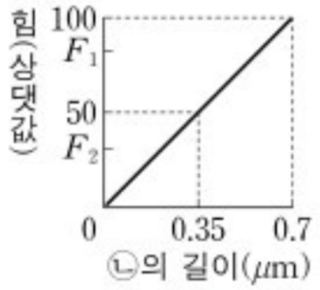
다른 문제도 볼까요?
(230919)생1

19. 다음은 골격근 수축 과정에 대한 자료이다.

○ 그림 (가)는 근육 원섬유 마디 X의 구조를, (나)는 구간 ㉡의 길이에 따른 ⓐ X가 생성할 수 있는 힘을 나타낸 것이다. X는 좌우 대칭이고, ⓐ가 F_1일 때 A대의 길이는 1.6 ㎛이다.



(가)



(나)

○ 구간 ㉠은 액틴 필라멘트만 있는 부분이고, ㉡은 액틴 필라멘트와 마이오신 필라멘트가 겹치는 부분이며, ㉢은 마이오신 필라멘트만 있는 부분이다.

○ 표는 ⓐ가 F_1과 F_2일 때 ㉢의 길이를 ㉠의 길이로 나눈 값($\frac{㉢}{㉠}$)과 X의 길이를 ㉡의 길이로 나눈 값($\frac{X}{㉡}$)을 나타낸 것이다.

힘	$\frac{㉢}{㉠}$	$\frac{X}{㉡}$
F_1	1	4
F_2	$\frac{3}{2}$	?

여기서는 F1에서 ㉠의 길이를 상대적으로 1, ㉢도 1이라 합시다. 그러면 X/㉡=4이므로 3+2㉡=4㉡, 즉 ㉡=1.5 입니다. 여기서 A대의 길이는 상대적으로 2×1.5+1=4이므로 상댓값과 실제값 사이에 ×0.4의 규칙이 있음을 알 수 있습니다.(A대의 길이가 1.6이기 때문에)
여기서 F2의 상황을 분석할 때 변화량과 고정값이 활용됩니다.
㉢의 변화량은 +2, ㉠의 변화량은 +1이라 하면 ㉢-2㉠의 변화량=0인데 F1의 1을 1/1로 보면 ㉢-2㉠의 값이 F1과 F2의 값이 -1로 같습니다. 그러므로 F2에서의 ㉢의 상댓값을 3, ㉠의 상댓값을 2라 할 수 있고 변화량에 의해 ㉡은 0.5라 할 수 있겠네요. 이제 모든 상댓값에 0.4만 곱해주면 끝납니다.

여기서 직관적으로 1/1 --> 3/2 이면 분모 1증가, 분자 2증가라서 따로 손댈 필요가 없다는 것이 보이면 그것도 훌륭합니다.

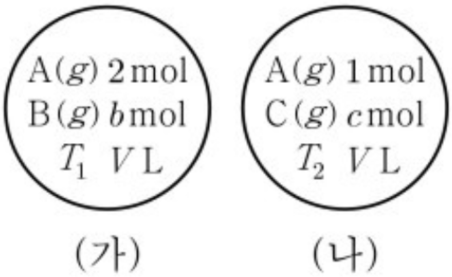
상댓값을 활용할 때 주의할 점은 상댓값이란 것을 항상 인지해야 한다는 것과 실제값과의 규칙(비례상수)를 잊지 말아야 한다는 것입니다.
이를 위해서 문제 풀 때 ×0.4 식으로 따로 규칙을 눈에 띄게 적어주는 것을 추천합니다. 또한 너무 깔끔한 상댓값에 집착하는 것도 지양해야 합니다. 꼭 자연수 상댓값이 아니더라도 소수점 한 자리 정도까지는 자연스럽게 계산하면 좋겠습니다.(화2에서 특히)

화2 문제도 풀어보겠습니다. (230919)

19. 다음은 A(g)로부터 B(g)와 C(g)가 생성되는 반응의 화학 반응식과 반응 속도식이다. k는 반응 속도 상수이다.

$$A(g) \rightarrow B(g) + C(g) \qquad v = k[A]$$

그림은 강철 용기 (가)와 (나)에 A(g)~C(g)를 넣은 초기 상태를, 표는 온도 T_1과 T_2에서 이 반응이 진행될 때 $\frac{P_A}{P_B + P_C}$를 반응 시간에 따라 나타낸 것이다. P_A~P_C는 각각 A(g)~C(g)의 부분 압력이고, $\frac{\text{(나)에서 } 4t\text{일 때 C}(g)\text{의 양(mol)}}{\text{(가)에서 } 2t\text{일 때 B}(g)\text{의 양(mol)}} = 1$이다.



반응 시간		t	$2t$	$3t$	$4t$
$\frac{P_A}{P_B + P_C}$	(가)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{18}$	
	(나)		x		$\frac{1}{13}$

(가)상황: 앞에서 보았던 것처럼 A/B+C 형태의 분수에서 분자의 변화량은 -1, 분모의 변화량은 +2 이므로 각각 4/12, 2/16, 1/18로 볼 수 있고 온도 T1에서의 반감기는 t임을 쉽게 알 수 있습니다. (가)의 반응전 상태에서 A의 양을 상대적으로 8이라 하면 (t에서 4이니까) A의 양은 실제 2몰이므로 상댓값과 실제값 사이에 ×4의 규칙이 있음을 알 수 있습니다. 이를 적어두고 자료를 분석하면 초기>t로 변화할 때 A4감소, B4증가, C4증가 이므로 t에서 4/12의 12=4b+8, b=1입니다. (이후 풀이는 생략)

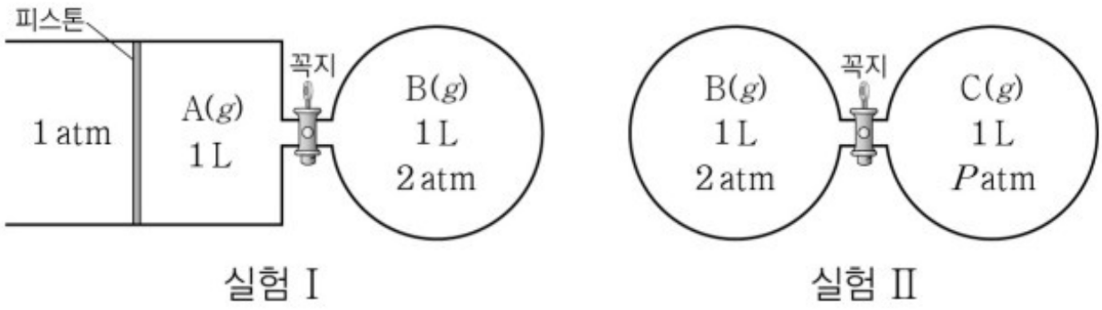
화2 에서는 굳이 상댓값을 실제값으로 바꿀 필요가 없는 경우가 상당히 많습니다. 이 문제처럼 실제값이 제시되어 있어도 비례상수만 잘 써두면 필요할 때 바꾸면 되죠.

화2 몇 문제만 더 보겠습니다.

18. 다음은 A(g)와 B(g)가 반응하여 C(g)가 생성되는 반응의 화학 반응식과 TK에서 농도로 정의된 평형 상수(K)이다.

$$A(g) + B(g) \rightleftarrows C(g) \quad K$$

그림은 꼭지로 분리된 실린더와 강철 용기에 A(g)와 B(g)가 각각 들어 있는 실험 Ⅰ의 초기 상태와, 꼭지로 분리된 강철 용기에 B(g)와 C(g)가 각각 들어 있는 실험 Ⅱ의 초기 상태를 나타낸 것이다.



표는 실험 Ⅰ과 Ⅱ에서 각각 꼭지를 열고 반응이 진행되어 도달한 평형 상태에 대한 자료이다. 평형 상태에서 실험 Ⅰ의 실린더 속 기체의 부피는 VL이다.

실험	Ⅰ	Ⅱ
평형 상태에서 $\dfrac{\text{B}(g)\text{의 양(mol)}}{\text{A}(g)\text{의 양(mol)}}$	3	6

(220718)화2

B/A 에서 (분모의 변화량)=-1, (분자의 변화량)도 -1 이므로 분모-분자의 값은 항상 일정해야 합니다.
실험1의 초기상태에서 B-A의 값이 1이므로(PV=기체의 양 이라고 할게요) 실험1의 평형상태에서의 3을 1.5/0.5로 보아야 합니다.(3=3/1->3-1=2이므로 1을 만들기 위해 분모,분자에 1/2를 곱하여)
실험2의 평형상태에서의 6도 초기상태의 B-A의 값인 2를 고려하여 2.4/0.4로 바꿉니다. (이하 생략)

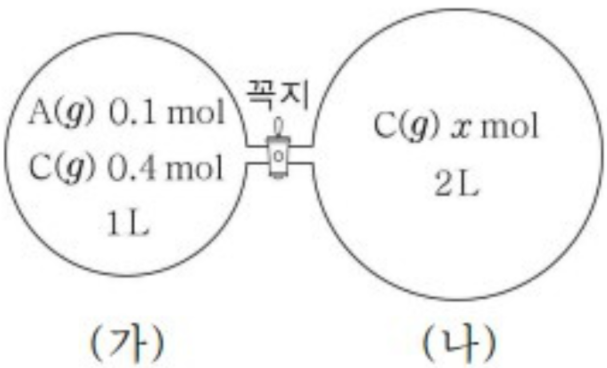
사실 이 문제를 손은정 선생님께서 이런 방식으로 푸셨고 저가 그걸 보고 더 발전시켜서 하나의 테크닉으로 사용하게 되었습니다.

하나만 더 소개하겠습니다.

17. 다음은 A(g)와 B(g)가 반응하여 C(g)가 생성되는 반응의 열화학 반응식과 TK에서 농도로 정의되는 평형 상수(K)이다.

$$A(g) + 2B(g) \rightleftarrows 2C(g) \quad \Delta H < 0 \quad K$$

그림은 꼭지로 분리된 강철 용기 (가)와 (나)에 기체가 들어 있는 초기 상태를, 표는 (가)와 (나)에서 반응이 진행되어 TK에서 각각 평형 상태에 도달하였을 때 B(g)의 몰 분율을 나타낸 것이다.



용기	평형 상태에서 B(g)의 몰 분율
(가)	$\frac{1}{3}$
(나)	$\frac{2}{5}$

몰 분율도 일종의 분수입니다. B의 몰 분율은 B/A+B+C 인데 B의 변화량은 -2, A+B+C의 변화량은 (-1)+(-2)+(2)=-1입니다. 그러므로 2×(분모)-(분자)의 값이 일정하다는 것을 알 수 있습니다. (가)에서는 초기상태에서 2×(분모)-(분자)의 값이 2×(0.5)-(0)=1이므로 1/3에서의 2×3-1=5를 1로 바꾸기 위해 분모, 분자에 0.2를 곱해서 0.2/0.6으로 바꾸면 되겠습니다. 즉, B 0.2, A 0.2, C 0.2몰이 있다는 것을 쉽게 알 수 있습니다.
(나)에서는 초기의 2×(분모)-(분자)의 값은 2x-0=2x이므로 2/5의 2×5-2=8이므로 분모, 분자에 x/4을 곱하면 B 0.5x, A 0.25x, C 0.5x 가 있다는 것을 알 수 있습니다.

변화량을 생각하고 고정값을 찾는 이 방법은 처음에는 어색하고 느릴 수 있지만, 익숙해지면 빠르고 정확하게 분수 자료를 해석하는 유용한 방법이 될 수 있습니다. 여기에 상댓값도 같이 이용하면 더욱 좋고요. 제가 소개한 것들 외에도 다양한 문제에서 활용될 여지가 있습니다. 이 글이 많은 분들에게 조금이나마 도움이 되었으면 좋겠습니다.

처음 쓰는 글이라서 오타나 오류가 있을 것 같은데 말씀해주시면 감사하겠습니다!!

감사합니다.