

2016학년도 논술 모의고사 2회 문제지 (수학)

성명 : ()

제한 시간 : 110분, 총점 : 100점

다음 제시문을 읽고 [문제 1] ~ [문제 4]에 답하시오.

(가) 좌표평면상의 점 (x, y) 를 점 (x', y') 로 바꾸는 것을 ‘변환’이라고 한다. 이 ‘변환’은 마치 정의역과 공역이 모두 2차원 실수 평면인 함수처럼 다룰 수 있다. 때문에 다음과 같은 표현을 ‘변환 f ’라 한다.

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (x', y') \in \mathbb{R}^2$$

이때 x', y' 가 상수 a, b, c, d 에 대하여 다음과 같이 표현될 수 있다면, ‘변환 f ’를 ‘일차변환’이라 부른다.

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

‘일차변환’의 가장 큰 특징은 ‘변환’을 행렬을 이용해 나타낼 수 있다는 점이다. 즉, 다음 두 표현은 동치이며, 변환 f 에 대응되는 2×2 행렬 A 는 유일하다.

$$f : (x, y) \rightarrow (ax + by, cx + dy) \leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(나) 중심을 원점으로 하고 반시계방향으로 θ (rad)만큼 회전시키는 과정을 일반적으로 ‘좌표평면상의 점 (x, y) 을 원점을 중심으로 θ 만큼 회전시킨다.’라고 표현하기도 한다. 이때, $\theta > 0$ 이면 반시계방향으로 θ 만큼, $\theta < 0$ 이면 시계방향으로 $-\theta$ 만큼 회전시킨다.

(다) 상수 a, b, c, d, e, f 에 대하여 곡선 C' 의 방정식이

$$C' : ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

로 표현될 경우, 곡선 C' 는 좌표평면상의 어떤 이차곡선 C 를 원점을 중심으로 적당히 θ 만큼 회전시킨 곡선이다. 여기서, 이차곡선 C 는 포물선, 타원(원 포함), 쌍곡선 중 하나이다. 이때, 회전시키기 전과 후의 곡선은 서로 합동이다.

(라) 편의상 원점을 중심으로 하는 이차곡선 중 x 축을 대칭축으로 하는 포물선, x 축을 장축으로 하는 타원, x 축을 주축으로 하는 쌍곡선을 통틀어서 ‘ x 축이 중심축인 이차곡선’이라 표현하자.

[문제 1] 좌표평면상의 임의의 점 (x, y) 를 원점을 중심으로 θ 만큼 회전시키는 변환을 g 라 하자. 변환 g 가 일차변환임을 보이고, 변환 g 에 대응되는 2×2 행렬 A 를 구하시오. [10점]

[문제 2] 아래의 문제에 답하시오.

[문제 2-1] $m \neq 0, n > 0$ 인 임의의 상수 m, n 에 대하여 곡선 $y = mx + \frac{n}{x}$ 가 원점이 중심이고, x 축을 중심축으로 하는 어떤 이차곡선을 원점을 중심으로 θ 만큼 회전시킨 도형임을 보이고, $\tan \theta$ 를 m, n 에 대한 식으로 나타내시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [15점]

[문제 2-2] $n \neq 0$ 인 임의의 상수 m, n 에 대하여 곡선 $y = mx + \frac{n}{x}$ 은 어떤 종류의 이차곡선인지 논하시오. [10점]

2016학년도 논술 모의고사 2회 문제지 (수학)

성명 : ()

제한 시간 : 110분

[문제 3] 아래의 문제에 답하시오.

[문제 3-1] $a \neq c$ 인 임의의 세 양수 a, b, c 에 대하여 $ax^2 - bxy + cy^2 = 1$ 은 원점이 중심이고, x 축을 중심축으로 하는 어떤 이차곡선을 원점을 중심으로 θ 만큼 회전시킨 곡선임을 보이고, $\tan 2\theta$ 를 a, b, c 에 대한 식으로 나타내시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $b^2 - 4ac < 0$) [15점]

[문제 3-2] 임의의 세 양수 m, n, k 에 대하여 $y = mx + \sqrt{n - kx^2}$ 와 $y = mx - \sqrt{n - kx^2}$ 로 이루어진 곡선은 원점이 중심이고, x 축을 중심으로 하는 어떤 이차곡선을 원점을 중심으로 θ 만큼 회전시킨 곡선임을 보이고, $\tan 2\theta$ 를 m, n, k 에 대한 식으로 나타내시오. (단, $m^2 + k \neq 1$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [5점]

[문제 3-3] $n > 0, k > 0$ 이고 $m^2 + k \neq 1$ 인 임의의 세 상수 m, n, k 에 대하여 곡선 $y = mx + \sqrt{n - kx^2}$ 와 $y = mx - \sqrt{n - kx^2}$ 로 이루어진 곡선은 어떤 종류의 이차곡선인지 논하시오. [10점]

[문제 4] 아래의 문제에 답하시오.

[문제 4-1] 제시문 (다)에 주어진 곡선 C' 가 다음의 이차곡선이도록 하는 상수 a, b, c, d, e, f 의 조건을 구하시오. [25점]

- i) C' : 원점이 중심인 타원(원도 포함)
- ii) C' : 원점이 중심인 쌍곡선

[문제 4-2] 역행렬이 존재하는 임의의 2×2 행렬 B 에 의해 중심이 원점인 원이 옮겨지는 도형은 어떤 도형인지 논하시오. [10점]

2016학년도 논술 모의고사 2회 답안지 (수학)

성명 : ()

제한시간 : 110분

※뒷면의 주의사항을 잘 읽고 답안지에 기입하십시오.

수

학

수

학

※ 주의 사항

- 절대로 지정된 칸을 벗어나서 답안을 작성하지 마시오.
- 틀린 곳을 수정할 땐 절대 수정테이프나 수정액을 사용하지 말고, 두 줄을 긋거나 지우개로 깨끗이 지운 후 서술하시오.
- 사용 가능한 필기구는 검은색 볼펜이나 연필, 샤프만 가능하며, 절대 색상이 있는 필기구를 사용해서는 안 되며, 한번 사용한 색상의 필기구로 서술하시오.