2024학년도 대학수학능력시험

SM모의고사 0회 정답 및 해설

• 수학 영역 •

공통과목

1	①	2	③	3	⑤	4	③	5	⑤
6	①	7	②	8	④	9	③	10	②
11	④	12	②	13	③	14	⑤	15	④
16	2	17	27	18	270	19	30	20	14
21	36	22	52						

해설

1. $\left(4^{1+\sqrt{5}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{5}}}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2+\frac{2}{\sqrt{5}}}$

$=\left(2^{2+2\sqrt{5}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{5}}}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2+\frac{2}{\sqrt{5}}}$

$=2^{2+\frac{2}{\sqrt{5}}}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2+\frac{2}{\sqrt{5}}}$

$=\left(2\times\frac{1}{2}\right)^{2+\frac{2}{\sqrt{5}}}=1$

2. $\lim_{x\to3}\frac{x^2-2x-3}{2x-6}$

$=\lim_{x\to3}\frac{(x+1)(x-3)}{2(x-3)}$

$=\lim_{x\to3}\frac{x+1}{2}$

$=\frac{3+1}{2}=2$

3. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$\frac{a_5}{a_3}=\frac{a+4d}{a+2d}=3$

에서 $a=-d$이다. $a<0$이므로 $d>0$이고,

$a_4\times a_7=2d\times5d=40$에서 $d=2$이다.

따라서 a_8의 값은 $a_8=a+7d=6d=12$이다.

[다른 풀이]

$a_5=3a_3$에서 수열 $\{a_n\}$은

$-a_3,\ 0,\ a_3,\ 2a_3,\ 3a_3,\ 4a_3,\ \cdots$

로 이어지는 공차가 a_3인 등차수열이다.

$a_4\times a_7=2a_3\times5a_3=40$에서 $a_3=2$이므로

$(\because -a_3<0)$, a_8의 값은 $a_8=6a_3=12$이다.

4. 주어진 등식의 양변을 미분하면

$g'(x)=(2x+3)f(x)+(x^2+3x)f'(x)$

이다. 따라서 $g'(4)$의 값은

$g'(4)=11f(4)+28f'(4)=-6$이다.

5. $\cos\left(\theta-\frac{3\pi}{2}\right)=\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta=\frac{\sqrt{7}}{5}$이고,

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서 $\cos\theta=-\frac{3\sqrt{2}}{5}$이다.

따라서 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sqrt{14}}{6}$이다.

6. $f'(x)=-3x^2+14x^2+5=-(3x+1)(x-5)$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{1}{3}$에서 극소,

$x=5$에서 극대이다. 따라서 $b=5$이다.

$f(5)=-125+175+25+a=25$이므로

$a=-50$이다. 따라서 $\frac{a}{b}=-10$이다.

7. 합과 일반항 사이의 관계에 의해

$\log_2 a_n=(n^2+n+1)-\{(n-1)^2+(n-1)+1\}$

$=2n\ (n\ge2)$

이다. 즉

$a_n=2^{2n}=4^n\ (n\ge2)$

이고, $\frac{a_{11}}{a_{10}}=4$이다. $\log_2 a_1=3$에서 $a_1=8$이므로,

$a_1+\frac{a_{11}}{a_{10}}$의 값은 12이다.

[Remark]

합의 형태가 상수항이 존재하는 이차식이므로 $\log_2 a_n$은 둘째 항부터 등차수열이다. 따라서 a_n은 둘째 항부터 등비수열이다.

8. $f(x)$가 사차함수이고 점 $(1,\ 5)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로, 점 $(1,\ 5)$가 한 접점이다.

즉 접선의 방정식을 구하면

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$

$=3(x-1)+5$

$=3x+2$이다.

두 식을 연립하여 나머지 접점의 좌표를 구하면

$x^4-2x^2+3x+3=3x+2$

$x^4-2x^2+1=0$

$(x^2-1)^2=0$

$(x-1)^2(x+1)^2=0$

에서 $(-1,\ f(-1))=(-1,\ -1)$이다.

따라서 두 접점 사이의 거리는

$\sqrt{\{1-(-1)\}^2+\{5-(-1)\}^2}$

$=\sqrt{2^2+6^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$이다.

[다른 풀이]

직선과 사차함수 $y=f(x)$가 다른 두 점에서 접하므로, 두 식을 연립하면 서로 다른 중근이 2개여야 한다.

이때 2개의 중근을 각각 α, β라 하면

$(x-\alpha)^2(x-\beta)^2=0$ …… ㉠

$(x^2-2\alpha x+\alpha^2)(x^2-2\beta x+\beta^2)=0$

$x^4-2(\alpha+\beta)x^3+(\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2)x^2$

$-2\alpha\beta(\alpha+\beta)x+\alpha^2\beta^2=0$

에서 $\alpha+\beta=0$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$(x-a)^2(x+a)^2=0$

$\{(x-a)(x+a)\}^2=0$

$(x^2-a^2)^2=0$

$x^4-2a^2x^2+a^4=0$ …… ㉢

직선의 방정식은 일차식이므로, ㉢의 이차 이상의 항은 $f(x)$의 이차 이상의 항과 같다.

즉, $a^2=1$이므로 ㉠은 $(x-1)^2(x+1)^2=0$이다.

따라서 두 접점의 x좌표는 각각 -1, 1이고

접선의 기울기가 3이므로

두 접점 사이의 거리는 $2\sqrt{1^2+3^2}=2\sqrt{10}$이다.

9. 모든 실수 x에 대하여

$-1\le2\sin(ax+b)+1\le3$

이므로, 주어진 구간에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 3이고 최솟값이 -1이려면 닫힌구간 $\left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$ 안에 함수 $f(x)$의 극대점과 극소점이 적어도 한 개 이상 포함되어야 한다. 즉, 닫힌구간 $\left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$ 안에 적어도 함수 $f(x)$의 최소 주기의 절반이 포함되어야 한다. 따라서

$\pi-\frac{\pi}{2}\ge\frac{2\pi}{a}\times\frac{1}{2}$

에서 $a\ge2$이므로, 양수 a의 최솟값은 2이다.

즉, 함수 $f(x)$의 최소 주기의 절반이 $\frac{\pi}{2}$이므로

함수 $f(x)$는 닫힌 구간의 양 끝점에서 최댓값과 최솟값을 가진다. 즉, $f(\pi)=3$ 또는 $f(\pi)=-1$이고, 이때 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$의 값은 -1 또는 3으로 결정되므로 $f(\pi)$의 값만 살펴보면 충분하다. 따라서

$2\sin(2\pi-b)+1=3$ 또는 $2\sin(2\pi-b)+1=-1$

에서 $\sin b=\pm1$이고, 이를 만족시키는 $0<b<\pi$인 실수 b의 값은 $\frac{\pi}{2}$이다.

10. $\lim_{t\to\infty}v(t)=\infty$이므로 점 P가 출발 후 운동 방향을 바꾸지 않으려면 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 $v(t)\ge0$이어야 한다. 삼차함수의 비율관계에 의해 함수 $v(t)$는 $t=2$에서 극소이고, $t>0$인 범위에서 함수 $v(t)$는 $t=2$에서 최솟값을 가지므로

$v(2)=k-4\ge0$

에서 $k\ge4$이다. 한편 A(1)에서 출발한 점 P의 위치는

$x(t)=1+\int_0^t v(x)dx$

이므로

$x(4)=1+\int_0^4 v(x)dx$

$=1+\int_0^4(x^3-3x^2+k)dx$

$=1+\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+kx\right]_0^4$

$=1+4k\ge1+4\times4=17$

이다. 따라서 $x(4)$의 최솟값은 17이다.

11. $\cos(\angle\mathrm{BCD})=\frac{\sqrt{5}}{5}$에서 $\sin(\angle\mathrm{BCD})=\frac{2\sqrt{5}}{5}$이므로 $\tan(\angle\mathrm{BCD})=\frac{\sin(\angle\mathrm{BCD})}{\cos(\angle\mathrm{BCD})}=2$이다.

두 점 A, D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하자. $\overline{\mathrm{CQ}}=k$라 하면 $\overline{\mathrm{BP}}=k$이고,

$\tan(\angle\mathrm{BCD})=\frac{\overline{\mathrm{DQ}}}{\overline{\mathrm{CQ}}}=2$이므로 $\overline{\mathrm{DQ}}=2k$이다.

$\overline{\mathrm{AD}}=a$라 하면 $5\overline{\mathrm{AD}}=3\overline{\mathrm{BC}}$이므로

$5a=3(2k+a)$

$5a=6k+3a$

$2a=6k$

이므로 $a=\overline{\mathrm{AD}}=3k$이다.

즉, $\overline{\mathrm{BQ}}=4k$이고 $\overline{\mathrm{DQ}}=2\mathrm{k}$이므로 피타고라스 정리에 의해 $\overline{\mathrm{BD}}=2\sqrt{5}k$이다. 한편,

$\cos(\angle\mathrm{BAD})=\cos(\pi-\angle\mathrm{BCD})=-\cos(\angle\mathrm{BCD})$

이므로 $\sin(\angle\mathrm{BAD})=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$이다.

따라서 사인법칙에 의해

$\dfrac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin(\angle\mathrm{BAD})}=\dfrac{2\sqrt{5}k}{\frac{2\sqrt{5}}{5}}=10$에서 $k=2$이다.

즉, 사각형 ABCD의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{AD}}+\overline{\mathrm{BC}})\times\overline{\mathrm{AP}}$

$=\dfrac{1}{2}\times(3k+5k)\times 2k$

$=8k^2=32$

이다.

12. 조건 (가)에서 방정식을 풀면

$\{f(x)\}^2+4f(x)-t^2+4=0$

$\{f(x)\}^2+4f(x)+(2-t)(2+t)=0$

$\{f(x)+2-t\}\{f(x)+2+t\}=0$

$f(x)=-2+t$ 또는 $f(x)=-2-t$

이다. 즉 함수 $g(t)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 두 직선 $y=-2+t$, $y=-2-t$가 만나는 점의 개수와 같다. 한편 함수 $y=f(x)$의 그래프가 극대점 또는 극소점에서 직선과 접할 때 교점의 개수가 바뀌고, 이때 $g(t)$는 불연속이다. 함수 $f(x)$의 극댓값을 M, 극솟값을 m이라 하자. 음이 아닌 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y=g(t)$가 오직 한 점에서만 불연속이려면 $g(t)=-2+t$, $g(t)=-2-t$의 실근의 개수가 각각 1개 · 3개이거나 3개 · 1개이거나 2개 · 2개이어야 하는데, 1개 또는 3개인 경우는 $g(t)$가 불연속이 아니므로 2개 · 2개이다.

따라서 변곡점의 y좌표가 -2이고

$-2+t=M$, $-2-t=m$

이어야 한다. $g(t)$가 $t=3$에서 불연속이므로, 함수 $f(x)$의 극댓값은 $M=1$, 극솟값은 $m=-5$이다.

조건 (나)에 의해 함숫값이 같은 두 점에 대하여 두 점의 x좌표 차이의 최댓값이 $4\sqrt{3}$이다. 함수 $y=f(x)$와 직선 $y=c(-5<c<1)$가 만나는 세 점에 대하여 x좌표가 최소인 점을 $\mathrm{P_c}$, x좌표가 최대인 점을 $\mathrm{Q_c}$라 하고 c의 값에 따라 경우를 나누어 $\overline{\mathrm{P_cQ_c}}$가 최대일 때를 살펴보자.

(i) $-5<c<-2$인 경우

점 $\mathrm{P_c}$에서의 미분계수가 점 $\mathrm{Q_c}$에서의 미분계수보다 크므로, c값이 일정하게 증가함에 따라 점 $\mathrm{P_c}$의 x좌표 증가량보다 점 $\mathrm{Q_c}$의 x좌표 증가량이 더 크다. 즉 c가 -5부터 -2까지 증가하면 $\overline{\mathrm{P_cQ_c}}$가 증가한다.

(ii) $-2<c<1$인 경우

점 $\mathrm{P_c}$에서의 미분계수가 점 $\mathrm{Q_c}$에서의 미분계수보다 작으므로, c값이 일정하게 감소함에 따라 점 $\mathrm{P_c}$의 x좌표 감소량이 점 $\mathrm{Q_c}$의 x좌표 감소량보다 더 크다. 즉 c가 1부터 -2까지 감소하면 $\overline{\mathrm{P_cQ_c}}$가 증가한다.

(i), (ii)에서 $c=-2$일 때 $\overline{\mathrm{P_cQ_c}}=4\sqrt{3}$으로 최대이다. 조건 (나)에 의해 점 $\mathrm{P_c}$의 x좌표가 $-2\sqrt{3}$이므로, 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 p라 하면

$f(x)+2=px(x+2\sqrt{3})(x-2\sqrt{3})=p(x^3-12x)$

이다. $f'(x)=3x^2-12$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 가지므로 $f(2)=-5$에서 $p=\dfrac{3}{16}$이다.

따라서 $f(8)=\dfrac{3}{16}\times 8\times(8^2-12)-2=76$이다.

[다른 풀이]

조건 (나)에서 함수 $y=f(x+b)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$를 x축 방향으로 $-b$만큼 평행이동한 함수이다. 두 그래프가 교점을 갖도록 하는 가장 큰 양수 b에 대하여 두 함수 $y=f(x)$, $y=f(x+b)$의 그래프는 접한다. 조건 (나)에 의해 그 접점의 x좌표는 $-2\sqrt{3}$이고, 삼차함수의 대칭성에 의해 그 접점의 y좌표가 -2이다. 즉 $f(c)=-2$를 만족시키는 c의 값은 각각 $-2\sqrt{3}$, 0, $2\sqrt{3}$이다.

13. n이 홀수인 경우, 방정식

$(x^n+n)(x^n+n-1)(x^n+n-2)\cdots(x^n+n-k)=0$

의 서로 다른 실근의 개수는

$x=\sqrt[n]{-n}$, $\sqrt[n]{-n+1}$, $\sqrt[n]{-n+2}$, $\cdots$, $\sqrt[n]{-n+k}$

로 총 $(k+1)$개이다.

즉 n이 홀수일 때 $f(n)=k+1$이므로

$\displaystyle\sum_{n=1}^{5}f(2n-1)=\sum_{n=1}^{5}(k+1)=5k+5$

이다.

n이 짝수인 경우, 방정식

$(x^n+n)(x^n+n-1)(x^n+n-2)\cdots(x^n+n-k)=0$

의 서로 다른 실근의 개수는 다음과 같다.

(i) $k>n$인 경우

방정식 $(x^n+n)\cdots(x^n+1)=0$의 해의 개수는 0개,

방정식 $x^n=0$의 해의 개수는 1개,

방정식 $(x^n-1)\cdots(x^n+n-k)=0$의 해의 개수는 $2(k-n)$개로

총 $1+2(k-n)=2k-2n+1$개이다.

(ii) $k=n$인 경우

방정식 $(x^n+n)\cdots(x^n+1)=0$의 해의 개수는 0개,

방정식 $x^n=0$의 해의 개수는 1개로

총 1개이다.

(iii) $k<n$인 경우

방정식 $(x^n+n)\cdots(x^n+n-k)=0$은 실근을 갖지 않는다.

함수 $A(x)$를

$$A(x)=\begin{cases}x & (x\ge 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$

으로 정의하면

$\displaystyle\sum_{n=1}^{5}f(2n)$

$\displaystyle=\sum_{n=1}^{5}A(2k-2n+1)$

$=A(2k-3)+A(2k-7)+\cdots+A(2k-19)$

이라 할 수 있다. 따라서

$\displaystyle\sum_{n=1}^{10}f(n)=\sum_{n=1}^{5}f(2n-1)+\sum_{n=1}^{5}f(2n)$

$=5k+5+A(2k-3)+A(2k-7)+\cdots+A(2k-19)$

이다. 위 등식에서 k의 값이 커지면 우변의 값도 커지므로, k에 임의의 자연수를 대입한 뒤 우변의 값과 50의 대소 관계를 비교하면서 k의 범위를 좁혀 나갈 수 있다. 이러한 과정을 거치면 k의 값이 6임을 얻을 수 있다.

14.

ㄱ. 함수 $xg(x)$가 $x=0$에서 극값을 가지므로

$(xg(x))'=g(x)+xg'(x)$

에서 $g(0)+0\times g'(0)=0$이다. 즉 $g(0)=0$, $g(x)=x(x-\alpha)$이다. 함수 $xg(x)=x^2(x-\alpha)$가 $x=0$에서 극대이므로 $\alpha>0$이다. 따라서 $g'(0)=-\alpha<0$이다. (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극대이므로 함수 $f(x)$가 $x=-2k(k>0)$에서 극솟값 0을 가진다고 하면 삼차함수의 비율 관계에 의해

$f(x)=p(x+2k)^2(x-k)$

이다. 한편 절댓값 함수의 성질에 의해 함수 $|f(x)|$는 $x=k$에서, 함수 $|xg(x)|$는 $x=\alpha$에서 미분가능하지 않다. 이때 $k\ne\alpha$이면 함수 $|f(x)|-|xg(x)|$는 $x=k$, $x=\alpha$에서 미분가능하지 않으므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

즉 $k=\alpha$이고,

$$|f(x)|-|xg(x)|=\begin{cases}f(x)+xg(x) & (x<\alpha)\\ -f(x)-xg(x) & (x\ge\alpha)\end{cases}$$

...... ㉠

이다. 한편 함수 $|f(x)|-|xg(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $x=\alpha$에서 미분가능해야 하므로

$(f(x)+xg(x))'=f'(x)+g'(x)+xg'(x)$

에서 ㉠에 의해 $f'(\alpha)+g'(\alpha)+\alpha g'(\alpha)=0$이어야 한다. 즉

$(f(x)+xg(x))'$

$=\{p(x+2\alpha)^2(x-\alpha)+x^2(x-\alpha)\}'$

$=2p(x+2\alpha)(x-\alpha)+p(x+2\alpha)^2+2x(x-\alpha)+x^2$

에서

$2p(\alpha+2\alpha)(\alpha-\alpha)+p(\alpha+2\alpha)^2+2\alpha(\alpha-\alpha)+\alpha^2=0$

이다. 식을 정리하면 $p=-\dfrac{1}{9}$이므로, 함수 $|f(x)|-|xg(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 실수 p의 값은 $p=-\dfrac{1}{9}$로 오직 하나 존재한다. (참)

ㄷ. 방정식 $|f(x)|-|xg(x)|=0$의 실근은 ㉠에 의해 $f(x)+xg(x)=0$의 실근과 같다.

$f(x)+xg(x)=0$

$p(x+2\alpha)^2(x-\alpha)+x^2(x-\alpha)=0$

$(x-\alpha)((p+1)x^2+4p\alpha x+4p\alpha^2)=0$

에서 p의 값에 따라 경우를 나누어 실근의 개수를 살펴보자.

(i) $p=-1$인 경우

방정식 $(x-\alpha)(4p\alpha x+4p\alpha^2)=0$의 실근의 개수는 $x=\alpha$, $x=-\alpha$로 2개이다.

(ii) $p\neq-1$인 경우

이차방정식

$(p+1)x^2+4p\alpha x+4p\alpha^2=0$ …… ㉡

의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4p^2\alpha^2-(p+1)(4p\alpha^2)=-4p\alpha^2>0$

이므로, ㉡은 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다. 한편 ㉡이 $x=\alpha$를 해로 갖도록 하는 p의 값을 구하면

$(p+1)\alpha^2+4p\alpha\times\alpha+4p\alpha^2=0$

에서 $p=-\frac{1}{9}$이다. 따라서 방정식

$(x-\alpha)((p+1)x^2+4p\alpha x+4p\alpha^2)=0$

의 실근의 개수는 $p\neq-\frac{1}{9}$일 때 3개, $p=-\frac{1}{9}$일 때 2개이다.

(i), (ii)에서 함수 $h(p)$는 $p=-1$, $p=-\frac{1}{9}$에서 불연속이다. 이때 함수 $g(p-k)h(p)$가 $p=-1$, $p=-\frac{1}{9}$에서 연속이려면, 함수 $g(x)$의 식이 $g(x)=x(x-\alpha)$이므로 함수 $y=g(p-k)$의 두 x절편 k, $\alpha+k$의 값이 각각 -1과 $-\frac{1}{9}$이어야 한다. 즉 $k=-1$, $\alpha=\frac{8}{9}$이므로 $g(k)=k(k-\alpha)$의 값은 $\frac{17}{9}$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

15. $a_9=10$이므로, 다음 경우로 나눌 수 있다.

(i) a_7이 홀수

$a_7=5$이고, $a_7=2a_5$일 수 없으므로 $a_7=a_5+a_4$이고 a_5는 짝수이다. …… ㉠

$a_5=4$이면 $a_4=1$인데, a_4가 홀수이므로 ㉠과 같은 이유로 a_2는 짝수이다. 즉, $a_4=a_2+a_1=1$인데 a_1, a_2 모두 자연수이므로 모순이다. …… ㉡

$a_5=2$이면 $a_4=3$인데, a_4가 홀수이므로 ㉠과 같은 이유로 a_2는 짝수이다. 즉, $a_4=a_2+a_1=3$이고 a_2가 짝수이므로 $a_2=2$, $a_1=1$이다. a_3이 짝수라면 $a_5=a_3+a_2$인데 $a_5=a_3$이므로 $a_2=0$이 되어 모순이다. 따라서 a_3은 홀수이고, $a_5=2a_3$에서 $a_3=1$이다. 이 경우 수열 $\{a_n\}$은 1, 2, 1, 3, 2, 6, 5, 8, 10, 13, $\cdots$이므로 $a_{10}=13$이다.

(ii) a_7이 짝수

$a_9=a_7+a_6=10$이다.

$a_7=2$인 경우, a_5가 짝수라면 $a_5=a_3+a_2$이므로 $a_2=a_3=1$인데, 이는 a_3이 짝수라는 가정에 모순이다. 따라서 a_5는 홀수이고 $a_7=2a_5$이므로 $a_5=1$인데, a_5가 홀수이므로 ㉠과 같은 이유로 a_3은 짝수이다. 따라서 ㉡과 같은 이유로 모순이다.

$a_7=4$인 경우, a_5가 홀수라면 $a_5=2$이므로 모순이다. 따라서 a_5은 짝수이다. 즉, $a_7=a_5+a_4=4$이고 a_5, a_4가 모두 자연수이므로 $a_5=a_4=2$이다.

한편, a_3이 짝수라면 $a_5=a_3+a_2=2$이므로 $a_2=a_3=1$인데, 이는 a_3이 짝수라는 가정에 모순이므로 a_3은 홀수이다. 따라서 $a_5=2a_3$이므로 $a_3=1$인데, 이는 ㉡과 같은 이유로 모순이다. …… ㉢

$a_7=6$인 경우, a_5가 짝수라면 $a_7=a_5+a_4=6$이므로 $a_5=2$ 또는 $a_5=4$이다.

$a_5=2$이면 ㉢과 같은 이유로 모순이다.

따라서 $a_5=4$이다. a_3이 홀수라면 $a_5=2a_3$에서 $a_3=2$이므로 모순이다. 따라서 a_3은 짝수이다. 즉, $a_5=a_3+a_2=4$이므로 $a_2=a_3=2$이다. 한편 $a_9=a_7+a_6=10$에서 $a_6=4$인데, a_4가 홀수라면 $a_6=2a_4$에서 $a_4=2$이므로 모순이다. 따라서 a_4는 짝수이다.

즉, $a_6=a_4+a_3=4$이므로 $a_4=a_3=2$이다.

이때 a_2가 짝수이므로 $a_4=a_2+a_1=2$에서 $a_1=0$이므로 모순이다. 따라서 a_5는 홀수이다.

$a_7=2a_5$에서 $a_5=3$이고, a_5가 홀수이므로 ㉠과 같은 이유로 a_3은 짝수이다. 즉, $a_5=a_3+a_2=3$이고 a_3이 짝수이므로 $a_3=2$, $a_2=1$이다. 이 경우 수열 $\{a_n\}$은 a_1, 1, 2, 2, 3, 4, 6, 7, 10, 14, $\cdots$이므로 $a_{10}=14$이다.

$a_7=8$인 경우, $a_6=2$인데 이는 ㉢과 같은 이유로 모순이다.

따라서 가능한 모든 a_{10}의 값의 합은 $13+14=27$이다.

16. $\log_3 72+\frac{3}{\log_{\frac{1}{2}}3}$

$=\log_3 72+3\log_3\frac{1}{2}$

$=\log_3 72+\log_3\frac{1}{8}$

$=\log_3 9$

$=2$

17. $f'(x)=4x^3-24x^2+36x$에서 양변을 적분하면 $f(x)=x^4-8x^3+18x^2+C$이다. $f(0)=C=0$이므로, $f(3)=81-216+162+C=27$이다.

[다른 풀이]

삼차함수의 넓이 공식에 의해

$\int_0^3 f'(x)dx=\int_0^3 4x(x-3)^2dx=\frac{4}{12}\times3^4=27$

이므로, $f(3)=f(0)+\int_0^3 f'(x)dx=27$이다.

18. 모든 자연수 k에 대하여 $a_k=a_{k+10}$이므로

$\sum_{k=3}^{12}a_k=\sum_{k=1}^{10}a_k=7$

이다. 따라서 수열의 합의 기본 성질에 의하여

$\sum_{k=1}^{10}b_k=10$, $\sum_{k=11}^{20}b_k=30$

이다. 한편 등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r이라 하면

$\sum_{k=11}^{20}b_k=r^{10}\sum_{k=1}^{10}b_k=30$

에서 $r^{10}=3$이다. 따라서 $\sum_{k=31}^{40}b_k$의 값은

$\sum_{k=31}^{40}b_k=r^{30}\sum_{k=1}^{10}b_k=27\times10=270$

이다.

19. 두 함수의 그래프가 접선과 접하는 접점의 x좌표를 a라 하면 $f'(a)=g'(a)$이므로

$3a^2-8a-5=-2a+4$

에서 $a=-1$ 또는 $a=3$이다. $f(a)=g(a)$에서

$k=-a^3+3a^2+9a+3$

이고, $a=-1$일 때 $k=-2$, $a=3$일 때 $k=30$이다.

따라서 양수 k의 값은 30이다.

20. 함수 $f(x)$가 감소함수 또는 상수함수이므로, $m_1<m_2$인 두 정수 m_1, m_2에 대하여

$\int_{m_1}^{m_1+1}f(x)dx\geq\int_{m_2}^{m_2+1}f(x)dx$ …… ㉠

이다.

$\{\int_m^{m+1}f(x)dx \mid m\text{은 정수}\}=\{1,2,3\}$ …… ㉡

임을 고려하여 $\int_4^5 f(x)dx$의 값을 살펴보자.

(i) $\int_4^5 f(x)dx=1$인 경우

함수 $f(x)$가 감소하므로 $f(4)>1$, $f(5)<1$이다. 이때 $f(5)<1$에서 $\int_5^6 f(x)dx<1$이므로 ㉡을 만족시키지 않는다.

(ii) $\int_4^5 f(x)dx=2$인 경우

함수 $f(x)$가 감소하므로 $f(4)>2$, $f(5)<2$이다.

(iii) $\int_4^5 f(x)dx=3$인 경우

함수 $f(x)$가 감소하므로 $f(4)>3$, $f(5)<3$이다. 이때 $f(4)>3$에서 $\int_3^4 f(x)dx>2$이므로 ㉡을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $\int_4^5 f(x)dx=2$이고 $f(4)>2$, $f(5)<2$이다. 이때 ㉠에 의해

$\int_3^4 f(x)dx>2$, $\int_5^6 f(x)dx<2$

이므로, ㉡에 의해 $\int_3^4 f(x)dx=3$, $\int_5^6 f(x)dx=1$

이다. $f(4)$의 값을 살펴보자.

(i) $f(4)>3$인 경우

$\int_3^4 f(x)dx>3$이므로 ㉡을 만족시키지 않는다.

(ii) $2<f(4)<3$인 경우

$\int_3^4 f(x)dx=3$에서 $f(3)>3$이므로

$\int_2^3 f(x)dx>3$이다. 이는 ㉡을 만족시키지 않

수학 영역

는다.

(i), (ii)에서 $f(4)=3$이고, ㉡에 의해 $x \le 4$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=3$이다. 마찬가지로 $f(5)<1$ 또는 $1<f(5)<2$이면 조건을 만족시키지 않으므로 $f(5)=1$이고, $x \ge 5$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=1$이다.
$4 \le x \le 5$일 때 함수 $f(x)$의 그래프가 삼차함수의 그래프의 일부분이고 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로, 두 점 $(4, 3)$, $(5, 1)$은 각각 어떤 삼차함수의 극대점과 극소점이다. 즉 삼차함수의 대칭성에 의해 $f(\frac{9}{2})=\frac{3+1}{2}=2$이다. 따라서 $\int_2^9 f(x)dx+f(\frac{9}{2})$의 값은

$\int_2^9 f(x)dx+f(\frac{9}{2})$

$=(\int_2^4 f(x)dx+\int_4^5 f(x)dx+\int_5^9 f(x)dx)+f(\frac{9}{2})$

$=(3\times2+2+1\times4)+2$

$=14$

이다.

21. 삼각형 BCP의 넓이가 최대가 되기 위해서는 삼각형 BCP가 직각이등변삼각형이어야 한다. 이때 점 P가 점 A와 같으므로 삼각형 ABC는 직각이등변삼각형이다.

따라서 선분 AB와 선분 AC를 각각 빗변으로 하는 두 직각삼각형이 서로 합동이므로, …… ㉠
(점 A의 x좌표)$-$(점 C의 x좌표)
$=$(점 B의 y좌표)
이므로 점 C의 좌표를 (x, y)라 하면
점 B의 y좌표는 $-x+4$이고,
점 B는 곡선 $y=2^x$ 위의 점이므로
점 B의 x좌표는 $\log_2(-x+4)$이다.

삼각형 ABC는 $\angle BAC=90^\circ$인 직각이등변삼각형이므로 직선 AB와 직선 AC가 직교한다.
따라서
(직선 AB의 기울기)$\times$(직선 AC의 기울기)$=-1$

$\frac{-x+4}{\log_2(-x+4)-4}\times\frac{y}{x-4}=-1$

$y=\log_2(-x+4)-4$에서
$a=2$, $b=4$, $c=-4$이므로
$a^2+b^2+c^2=2^2+4^2+(-4)^2=36$이다.

[다른 풀이 1]
곡선 $y=2^x$ 위의 임의의 점 B에 대하여 삼각형 ABC가 직각이등변삼각형이므로, 선분 AC는 선분 AB를 반시계방향으로 90° 회전한 것이다.
따라서 점 C가 나타내는 도형의 방정식은 곡선 $y=2^x$을 반시계방향으로 90° 회전한 것과 같다.

점 (x, y)를 원점에 대하여 반시계방향으로 90° 회전이동한 점의 좌표는 $(-y, x)$이므로, 곡선 $y=2^x$를 원점에 대하여 반시계방향으로 90° 회전이동한 곡선의 방정식은 $-x=2^y$이다. 이를 이용하여 곡선 $y=2^{x+4}$을 원점에 대하여 반시계방향으로 90° 회전이동한 곡선의 방정식을 구하면
$-x=2^{y+4}$
$y=\log_2(-x)-4$
이다. 즉 곡선 $y=2^{x+4}$을 원점에 대하여 반시계방향으로 90° 회전이동한 곡선의 방정식이 $y=\log_2(-x)-4$이므로, 이들을 모두 x축의 양의 방향으로 4만큼 평행이동시키면 곡선 $y=2^x$를 점 $(4, 0)$에 대하여 반시계방향으로 90° 회전이동한 곡선의 방정식이 $y=\log_2(-x+4)-4$이다.
따라서 $a=2$, $b=4$, $c=-4$이다.

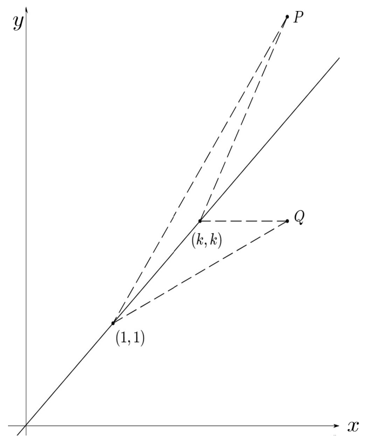
[다른 풀이 2]
점 B의 좌표를 $(t, 2^t)$라 하면 ㉠에 의해 점 C의 좌표는 $(4-2^t, t-4)$이다. 즉, 점 C가 나타내는 곡선을 $y=f(x)$라 하면
$f(4-2^t)=t-4$
이고, $4-2^t=x$로 치환하면
$2^t<0$이므로 $x=4-2^t<4$이고
$2^t=-x+4$
$t=\log_2(-x+4)$
이므로 $f(x)=\log_2(-x+4)-4$이다.
따라서 $a=2$, $b=4$, $c=-4$이다.

22. 조건 (가)에서

$\frac{f(x)-k}{x-k}\ge\frac{f(x)-1}{x-1}$

이다. 즉 $x>k$이면 두 점 $(x, f(x))$와 (k, k)를 이은 직선의 기울기는 두 점 $(x, f(x))$와 $(1, 1)$를 이은 직선의 기울기보다 항상 커야 한다. …… ㉠

두 점 (k, k), $(1, 1)$가 직선 $y=x$ 위의 점이므로 다음과 같은 개형을 떠올릴 수 있다.



만약 k보다 큰 실수 a에 대하여 $f(a)<a$인 a가 존재하면, 즉 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 Q를 지나면 ㉠을 만족시키지 않는다. 따라서 ㉠을 만족시키려면 $x>k$일 때 $f(x)\ge x$이어야 한다. 이러한 k의 최솟값이 2이므로 함수 $f(x)$는 $x>2$일 때 $f(x)\ge x$이고, 충분히 작은 양수 h에 대하여 $2-h<x<2$일 때 $f(x)<x$이다. 따라서 사잇값 정리에 의해 $f(2)=2$이다. 한편 $x>2$일 때 $f(x)\ge x$이고 $f(4)=4$이므로, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$와 점 $(4, 4)$에서 접한다. 따라서 함수 $f(x)$의 식은 $f(x)-x=(x-2)(x-4)^2$이고, $f(7)$의 값은 $f(7)=5\times3^2+7=52$이다.

미적분

23	⑤	24	②	25	④	26	①	27	②
28	④	29	6	30	30				

해설

23. $x-1=t$로 치환하면

$\lim_{x\to1}\frac{3^{x-1}-1}{\log_3 x}=\lim_{t\to0}\frac{3^t-1}{\log_3(t+1)}$

$=\lim_{t\to0}\{\frac{3^t-1}{t}\times\frac{t}{\log_3(t+1)}\}$

$=\lim_{t\to0}\frac{3^t-1}{t}\times\lim_{t\to0}\frac{t}{\log_3(t+1)}$

$=\ln3\times\frac{1}{\frac{1}{\ln3}}=(\ln3)^2$

24. $\lim_{x\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{kn}{n^2+k^2}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{kn}{n^2}}{\frac{n^2+k^2}{n^2}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$

에서 $\frac{k}{n}=x$, $\Delta x=\frac{1}{n}$로 두면

$\int_0^1\frac{2x}{1+x^2}dx=[\ln(1+x^2)]_0^1$
$=\ln2-\ln1=\ln2$

25. 주어진 급수가 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left\{a_n-\frac{8n^2+1}{n^2+3n}\right\}=0$

$\lim_{n\to\infty}a_n=8$

이다. 따라서 극한의 수렴 성질과 등비수열의 극한에 의해

$\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+2}-a_{2n}}{2^{2n}a_n+3^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{16\times4^n-a_{2n}}{4^n a_n+3^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{16-\frac{a_{2n}}{4^n}}{a_n+\left(\frac{3}{4}\right)^n}=\frac{16}{8}=2$

이다.

26. 정삼각형 $A_1B_1C_1$과 호 B_1C_1이 만나는 두 점을 각각 P_1, Q_1, 반원 O_1의 중심을 R이라 하자.

$\angle B_1RP_1=\angle P_1RQ_1=\angle Q_1RC_1=\frac{\pi}{3}$

이므로 활꼴 Q_1C_1의 넓이는 활꼴 P_1Q_1의 넓이와 같고, 삼각형 $A_1P_1Q_1$의 넓이는 삼각형 B_1RP_1의 넓이와 같다. 즉 구해야 하는 R_1의 넓이 S_1은
(활꼴 B_1P_1의 넓이 + 삼각형 $A_1P_1Q_1$의 넓이
+ 활꼴 Q_1C_1의 넓이)
= (부채꼴 B_1RP_1의 넓이)
이다. 따라서 $S_1=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$이다.
한편 정삼각형 $A_1B_1C_1$의 높이와 정삼각형 $A_2B_2C_2$

의 높이는 각각 $\sqrt{3}$, 1이다. 두 도형의 닮음비가 $\sqrt{3}:1$이므로 R_1과 R_2의 넓이의 비는 $3:1$이다.

따라서 구하는 $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은 $\dfrac{\frac{\pi}{6}}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{\pi}{4}$이다.

27. 원과 곡선이 제1사분면 위의 점 $(f(t),\ g(t))$에서 접하므로 $f(t)>0,\ g(t)>0$이고

$\{f(t)\}^2+\{g(t)\}^2=t^2$ ······ ㉠

또한 원과 곡선의 $x=f(t)$에서의 각각의 접선의 기울기가 같아야 한다.

원 $x^2+y^2=t^2$에서 음함수의 미분법에 의해

$2x+2y\dfrac{dy}{dx}=0$

$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$이므로 접선의 기울기는 $-\dfrac{f(t)}{g(t)}$ ······ ㉡

이고. 곡선 $y=\dfrac{1}{x}+k$를 미분하면

$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{x^2}$이므로 접선의 기울기는

$-\dfrac{1}{\{f(x)\}^2}$ ······ ㉢

이고, ㉡=㉢이므로 $g(t)=\{f(t)\}^3$이다.

이를 ㉠에 대입하면 $\{f(t)\}^2+\{f(t)\}^6=t^2$ ······ ㉣

이다. 시각 $t=\sqrt{2}$에서 $t=\sqrt{10}$까지

점 $\mathrm{P}(f(t),\ g(t))$가 움직인 거리는

$\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{10}}\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$

$=\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{10}}\sqrt{\{f'(t)\}^2+9\{f(t)\}^4\{f'(t)\}^2}\,dt$

$(\because g'(t)=3\{f(t)\}^2f'(t))$

$=\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{10}}\sqrt{\{f'(t)\}^2}\sqrt{1+9\{f(t)\}^4}\,dt$

$=\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{10}}f'(t)\sqrt{1+9\{f(t)\}^4}\,dt$

에서 $f(t)=x$로 치환하면 $f'(t)dt=dx$이고,

㉣에 $t=\sqrt{2}$를 대입하면

$\{f(\sqrt{2})\}^2+\{f(\sqrt{2})\}^6=2$이다.

$\{f(\sqrt{2})\}^2=A$로 치환하면

$A^3+A-2=0$

$(A-1)(A^2+A+1)=0$

에서 $A=\{f(\sqrt{2})\}^2=1$이고, $f(t)>0$이므로

$f(\sqrt{2})=1$이다.

또한 ㉣에 $t=\sqrt{10}$을 대입하면

$\{f(\sqrt{10})\}^2+\{f(\sqrt{10})\}^6=10$이다.

$\{f(\sqrt{10})\}^2=B$로 치환하면

$B^3+B-10=0$

$(B-2)(B^2+2B+5)=0$

에서 $B=\{f(\sqrt{10})\}^2=2$이고, $f(t)>0$이므로

$f(\sqrt{10})=2$이다. 따라서

$\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{10}}\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$

$=\displaystyle\int_{f(\sqrt{2})}^{f(\sqrt{10})}\sqrt{1+9x^4}\,dx$

$=\displaystyle\int_{1}^{\sqrt{2}}\sqrt{1+\{3x^2\}^2}\,dx$

이므로 이 길이는 곡선 $y=x^3\ (1\le x\le\sqrt{2})$의 길이와 같다. 따라서 $n=3$이다.

28. 반원의 중심을 O, 원 C_1의 중심을 $\mathrm{O_1}$, 원 C_2의 중심을 $\mathrm{O_2}$라 하자. 두 원 C_1, C_2의 반지름을 r이라 하면, 직각삼각형 $\mathrm{O_1AS}$에서 $\overline{\mathrm{AS}}=r\cot\dfrac{\theta}{2}$이므로

$\overline{\mathrm{OS}}=r\cot\dfrac{\theta}{2}-1$이다. 한편

$\overline{\mathrm{OO_2}}=\overline{\mathrm{OU}}-\overline{\mathrm{O_2U}}=1-r$

$\overline{\mathrm{ST}}=\overline{\mathrm{O_1O_2}}=2r$

이므로 삼각형 $\mathrm{OO_2T}$에서 피타고라스의 정리에 의해

$\overline{\mathrm{OT}}^2+\overline{\mathrm{O_2T}}^2=(\overline{\mathrm{OS}}+\overline{\mathrm{ST}})^2+\overline{\mathrm{O_2T}}^2=\overline{\mathrm{OO_2}}^2$

$(r\cot\dfrac{\theta}{2}-1+2r)^2+r^2=(1-r)^2$

이고, $r>0$임을 이용하여 식을 정리하면

$r^2\cot^2\dfrac{\theta}{2}+1+4r^2-2r\cot\dfrac{\theta}{2}-4r+4r^2\cot\dfrac{\theta}{2}+r^2$

$=r^2-2r+1$

$r\cot^2\dfrac{\theta}{2}+4r-2\cot\dfrac{\theta}{2}-2+4r\cot\dfrac{\theta}{2}=0$

이다. 따라서

$r=\dfrac{2\cot\frac{\theta}{2}+2}{\cot^2\frac{\theta}{2}+4\cot\frac{\theta}{2}+4}=\dfrac{\tan^2\frac{\theta}{2}(2\cot\frac{\theta}{2}+2)}{\tan^2\frac{\theta}{2}(\cot^2\frac{\theta}{2}+4\cot\frac{\theta}{2}+4)}$

$=\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}(\tan\frac{\theta}{2}+1)}{(2\tan\frac{\theta}{2}+1)^2}$

이고,

$\lim_{\theta\to0+}r=0,\ \lim_{\theta\to0+}\dfrac{r}{\theta}=1,\ \lim_{\theta\to0+}r\cot\dfrac{\theta}{2}=2$ ······ ㉠

이다. 선분 $\mathrm{AO_1}$이 원 C_1과 만나는 점을 X라 하면

$f(\theta)=2\times$(삼각형 $\mathrm{O_1AS}$의 넓이$-$부채꼴 $\mathrm{O_1XS}$의 넓이)

$=2\{\dfrac{1}{2}r\times r\cot(\dfrac{\theta}{2})-\dfrac{1}{2}r^2(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2})\}$

이므로 ㉠에 의해

$\lim_{\theta\to0+}\dfrac{f(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\dfrac{r^2\cot\frac{\theta}{2}-r^2(\frac{\pi-\theta}{2})}{\theta}=2$

이다. 한편

$g(\theta)=$(직사각형 $\mathrm{O_1STO_2}$의 넓이$-$부채꼴 $\mathrm{O_1SQ}$의 넓이$-$부채꼴 $\mathrm{O_2TQ}$의 넓이)

$=2r^2-\dfrac{\pi}{2}r^2$

이므로 ㉠에 의해

$\lim_{\theta\to0+}\dfrac{g(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\dfrac{r^2(2-\pi/2)}{\theta^2}=2-\dfrac{\pi}{2}$

이다. 따라서 $\lim_{\theta\to0+}\dfrac{f(\theta)g(\theta)}{\theta^3}$의 값은

$\lim_{\theta\to0+}\dfrac{f(\theta)g(\theta)}{\theta^3}$

$=\lim_{\theta\to0+}\dfrac{f(\theta)}{\theta}\times\lim_{\theta\to0+}\dfrac{g(\theta)}{\theta^2}$

$=2(2-\dfrac{\pi}{2})$

$=4-\pi$

이다.

29. (가)에서 로그의 진수 조건에 의하여 $f'(x)>0$이다. 양변을 미분하면

$2f(x)=\dfrac{f''(x)}{f'(x)}$

$2f(x)f'(x)=f''(x)$ ······ ㉠

㉠의 양변을 적분하면

$\{f(x)\}^2=f'(x)+C$ (C는 상수)이고

$x=0$을 대입하면

$0=\{f(0)\}^2=f'(0)+C=1+C$이므로 $C=-1$이다.

따라서 $\{f(x)\}^2+1=f'(x)$이다.

$\displaystyle\int_0^a f(x)\sqrt{f'(x)}\,dx$에서 $f'(x)=t$로 치환하면

$f''(x)dx=2f(x)f'(x)dx=dt$이고,

$f'(a)=\{f(a)\}^2+1=49$이므로

$\displaystyle\int_0^a f(x)\sqrt{f'(x)}\,dx=\int_1^{49}\dfrac{1}{2\sqrt{t}}dt=\left[\sqrt{t}\right]_1^{49}=6$

[다른 풀이]

(가)에서 $\displaystyle\int f(x)dx=F(x)$라고 하면

$2F(x)=\ln f'(x)$

$F(x)=\dfrac{1}{2}\ln f'(x)=\ln\sqrt{f'(x)}$ $(\because f'(x)>0)$이므로

$\sqrt{f'(x)}=e^{F(x)}$이다.

(나)에서 $\sqrt{f'(0)}=1=e^{F(0)}$이고

$\sqrt{f'(a)}=7=e^{F(a)}$이므로,

$\displaystyle\int_0^a f(x)\sqrt{f'(x)}\,dx$

$=\displaystyle\int_0^a F'(x)e^{F(x)}dx=\left[e^{F(x)}\right]_0^a=7-1=6$

30. 함수 $g(x)$를

$g(x)=f(x)e^{-x}$

라 하자. 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=x+t$가 접하도록 하는 실수 t의 값이 t_1뿐이려면, $g(x)$의 도함수 $g'(x)=\{f'(x)-f(x)\}e^{-x}$에 대하여 방정식 $g'(x)=1$의 실근이 $x=\alpha$로 유일하게 존재해야 한다. 이때

$\lim_{x\to-\infty}g'(x)=-\infty,\ \lim_{x\to\infty}g'(x)=0-$

이므로 $(\alpha,\ 1)$이 함수 $y=g'(x)$의 극점이고,

$g'(\alpha)=1,\ g''(\alpha)=0$

이다. 즉 직선 $y=x+t_1$은 곡선 $y=g(x)$의 변곡점 $(\alpha,\ g(\alpha))$에서의 접선임을 알 수 있다.

방정식

$f(x)=(x+t_1)(f'(x)-f(x))$ ······ ㉠

의 양변에 e^{-x}를 곱하면

$f(x)e^{-x}=(x+t_1)(f'(x)-f(x))e^{-x}$

$g(x)=(x+t_1)g'(x)$

이다. $x\neq-t_1$인 경우, 방정식

$\dfrac{g(x)}{x+t_1}=g'(x)$ ······ ㉡

의 실근은 점 $(-t_1,\ 0)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 접선과 곡선 $y=g(x)$이 만나는 접점의 x좌표와 같다. 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형에서 공통접선이 존재할 수 없으므로, ㉡의 서로 다른 실근의 개수는 ㉢점 $(-t_1,\ 0)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 접선의 개수로 이해할 수 있다. 이때 점 $(-t_1,\ 0)$은 직선 $y=x+t_1$ 위의 점임에 유의하자.

(ⅰ) $(-t_1,\ 0)$이 함수 $y=g(x)$의 그래프 위의 점이 아닌 경우

$x=-t_1$은 ㉠을 만족시키지 않으므로, ㉠의 서로 다른 실근의 개수는 ㉢의 개수와 같다. 곡선 $y=g(x)$의 개형에 관계없이 그 개수는 항상 2 이상임을 알 수 있고, 이는 문제의 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $(-t_1, 0)$이 함수 $y=g(x)$의 그래프 위의 점인 경우
$x=-t_1$은 ㉠을 만족시키는 실근이다. $x \neq -t_1$인 경우, ㉡의 서로 다른 실근의 개수는 ㉢의 개수와 같다. 곡선 $y=g(x)$의 개형에서 그 개수는 0임을 알 수 있고(직선 $y=x+t_1$의 존재성은 $x \neq -t_1$라는 전제에 의해 무시한다), 이는 문제의 조건을 만족시킨다.

함수 $g(x)$의 도함수와 이계도함수가 각각
$g'(x)=(f'(x)-f(x))e^{-x}$,
$g''(x)=(f(x)-2f'(x)+f''(x))e^{-x}$
이므로, 문제의 조건을 만족시키는 함수 $g(x)$에 대하여
$\alpha=-t_1$, $g(\alpha)=f(\alpha)e^{-\alpha}=0$,
$g'(\alpha)=(f'(\alpha)-f(\alpha))e^{-\alpha}=1$,
$g''(\alpha)=(f(\alpha)-2f'(\alpha)+f''(\alpha))e^{-\alpha}=0$
이다. $f(\alpha)e^{-\alpha}=0$에서 $f(\alpha)=0$이므로
$(f'(\alpha)-f(\alpha))e^{-\alpha}=1$
에서 $f'(\alpha)e^{-\alpha}=1$이다. 즉
$(f(\alpha)-2f'(\alpha)+f''(\alpha))e^{-\alpha}=0$
$-2f'(\alpha)e^{-\alpha}+f''(\alpha)e^{-\alpha}=0$
$f''(\alpha)e^{-\alpha}=2$
이다. $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로 $f''(\alpha)=2$이고, $e^{-\alpha}=1$에서 $\alpha=0$이므로 $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)e^{-\alpha}=1$에서 $f(0)=0$, $f'(0)=1$이다. 따라서 함수 $f(x)$의 식은 $f(x)=x(x+1)$이고, $f(5)$의 값은 30이다.