수2킬러 80제

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고2 11월 30

[출처] 2020 일반_시중교재 희망에듀 임정선 마플시너지

1. 삼차함수 $f(x)$ 와 실수 t 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=t$ 가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $g(t)$ 라 하자. 함수 $f(x)$, $g(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$ 는 $x=0$, $x=6$ 에서 불연속이다.
(나) 함수 $f(x)g(x)$ 는 모든 실수에서 연속이다.
(다) $f(5)f(7)<0$

$f(-4)$ 의 값을 구하시오.

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고2 09월 30

2. 최고차항의 계수가 1 이고 $f(0)=-20$ 인 삼차함수 $f(x)$ 가 있다. 실수 t 에 대하여 직선 $y=t$ 와 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 만나는 점의 개수 $g(t)$ 는

$$g(t)=\begin{cases} 1 & (t<-4 \text{ 또는 } t>0) \\ 2 & (t=-4 \text{ 또는 } t=0) \\ 3 & (-4<t<0) \end{cases}$$

이다. $f(9)$ 의 값을 구하시오.

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고2 11월 30

3. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2+ax+b & (x<1) \\ 2x & (x\geq 1) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $g(t)$ 를 $g(t)=\displaystyle\int_t^{t+1} f(x)dx$ 라 하자.

$g(0)+g(1)=\dfrac{7}{2}$ 일 때, 함수 $g(t)$ 의 최솟값은 k 이다. $120k$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 상수이다.)

[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 11월

4. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x \leq b$일 때, $f(x)=a(x-b)^2+c$이다.
(단, a, b, c는 상수이다.)

(나) 모든 실수 x에 대하여
$f(x)=\int_0^x \sqrt{4-2f(t)}\,dt$이다.

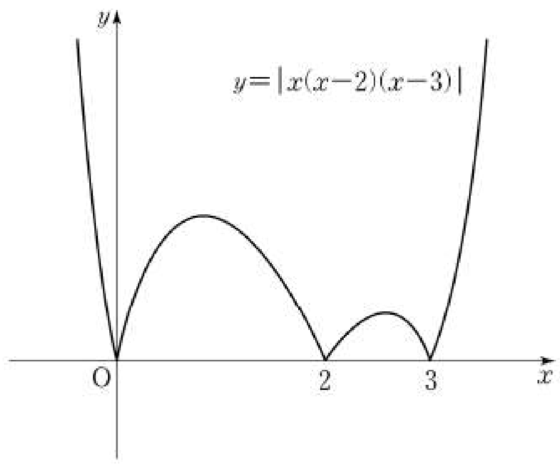
$\int_0^6 f(x)dx=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 09월 21

5. 다음 조건을 만족시키며 최고차항의 계수가 음수인 모든 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값은?

(가) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 0, 2, 3뿐이다.

(나) 실수 x에 대하여 $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$ 중 크지 않은 값을 $g(x)$라 할 때, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.



① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$

④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고2 11월 30

6. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 이차함수 $g(x)=2x^2-x-4$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 곡선 $y=f(x)-g(x)$는 x좌표가 2인 점에서 x축에 접한다.
>
> (나) 함수 $y=|f(x)-g(x)|$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$f'(0)=2$일 때, $f(1)$의 최댓값은 α이다. 40α의 값을 구하시오.

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고2 09월 30

7. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $1<x<2$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)<0$이고 $f'(x-1)f'(x+1)<0$이다.
>
> (나) 함수 $f(|x|)$는 모든 실수 x에서 미분가능하다.

$f(0)-f(-2)$의 값을 구하시오.

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고2 11월 30

8. 좌표평면에서 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 원점을 지나는 직선 $y=g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 27을 갖는다.
>
> (나) 함수 $|f(x)-g(x)|$는 $x=-3$에서만 미분가능하지 않다.
>
> (다) 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$는 서로 다른 두 점에서 만난다.

함수 $f(x)$의 극솟값을 구하시오.

[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 11월 30

9. 실수 k에 대하여 함수 $f(x)=x^3-3x^2+6x+k$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 방정식

$$4f'(x)+12x-18=(f'\circ g)(x)$$

가 닫힌 구간 $[0, 1]$에서 실근을 갖기 위한 k의 최솟값을 m, 최댓값을 M이라 할 때, m^2+M^2의 값을 구하시오.

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 07월 30

10. 다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^4}=1$
>
> (나) $f(1)=f'(1)=1$

$-1\le n\le 4$ 인 정수 n에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x-n)+n\,(n\le x<n+1)$$

이라 하자. 함수 $g(x)$가 열린구간 $(-1,\,5)$에서 미분가능할 때, $\int_0^4 g(x)dx=\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

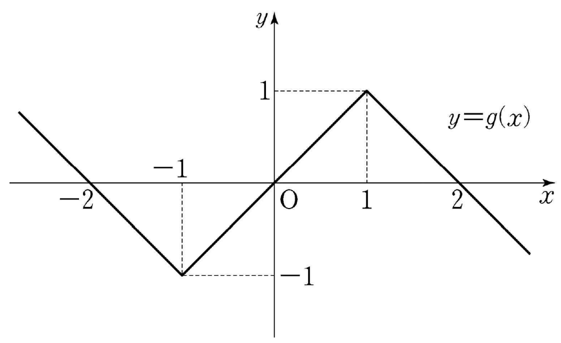
[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 09월 21

11. 실수 a, b, c와 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+a & (x<-1) \\ bx & (-1\le x<1), \\ x+c & (x\ge 1)\end{cases}$$

$$g(x)=|x+1|-|x-1|-x$$

에 대하여, 합성함수 $g\circ f$는 실수전체의 집합에서 정의된 역함수를 갖는다. $a+b+2c$의 값은?



① 2 ② 1 ③ 0

④ −1 ⑤ −2

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고2 09월 30

12. 세 정수 a, b, c에 대하여 이차함수

$$f(x)=a(x-b)^2+c$$

라 하고, 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\geq 0) \\ f(-x) & (x<0) \end{cases}$$

이라 하자. 실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 곡선 $y=g(x)$와 만나는 서로 다른 점의 개수를 $h(t)$라 할 때, 함수 $h(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $h(2)<h(-1)<h(0)$
>
> (나) 함수 $(t^2-t)h(t)$는 모든 실수 t에서 연속이다.

$80f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값을 구하시오.

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고2 06월 30

13. 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} kx^2+2kx+2 & (x\geq -2) \\ -3x-4 & (x<-2) \end{cases},\ g(x)=-x+a$$

가 있다. 양의 실수 a에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$의 모든 실근의 합을 $h(a)$라 할 때, 함수 $h(a)$가 항상 연속이 되도록 하는 상수 k의 최솟값을 p라 하자. $120\times\frac{1}{p^2}$의 값을 구하시오.

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 06월 30

14. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(\alpha)=g(\alpha)$이고 $f'(\alpha)=g'(\alpha)=-16$인 실수 α가 존재한다.
>
> (나) $f'(\beta)=g'(\beta)=16$인 실수 β가 존재한다.

$g(\beta+1)-f(\beta+1)$의 값을 구하시오.

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 10월 30

15. 함수 $f(x)=|3x-9|$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 는

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{2}f(x+k) & (x<0) \\ f(x) & (x\geq 0) \end{cases}$$

이다. 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $h(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, 모든 $h(k)$ 의 값의 합을 구하시오. (단, $k>0$)

> (가) 함수 $g(x)h(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
>
> (나) $h'(3)=15$

[출처] 2017 모의_공공 사관학교 고3 07월 30

16. $a\leq 35$인 자연수 a와 함수

$f(x)=-3x^4+4x^3+12x^2+4$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=|f(x)-a|$$

라 할 때, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=b(b>0)$이 서로 다른 4개의 점에서 만난다.
>
> (나) 함수 $|g(x)-b|$가 미분가능하지 않은 실수 x의 개수는 4이다.

두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

[출처] 2017 모의_공공 사관학교 고3 07월 21

17. 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$를 $f(x)=x^2+\frac{1}{n}$이라 하고 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases}(x-1)f(x) & (x\geq 1)\\ (x-1)^2 f(x) & (x<1)\end{cases}$$

이라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\lim_{x\to 1-}\frac{g(x)}{x-1}=0$

ㄴ. $n=1$일 때, 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

ㄷ. 함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수가 1인 n의 개수는 5이다

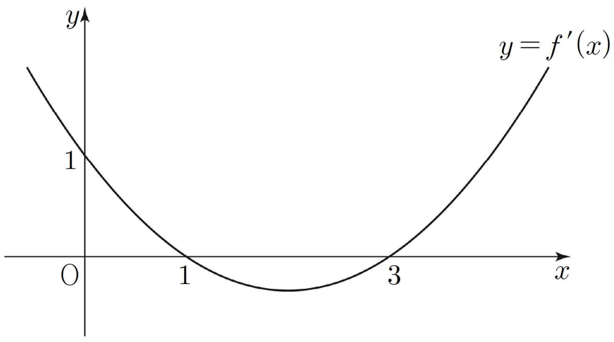
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고2 11월 30

18. 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$에서 x의 값이 1에서 $t\,(t>1)$까지 변할 때의 평균변화율을 $g(t)$라 정의할 때, 함수 $g(t)$는 $t=2$에서 극댓값 0을 갖는다.
함수 $g(t)$의 최솟값이 존재할 때, 방정식 $f(x)=f(1)$의 서로 다른 실근의 합의 최솟값을 구하시오.

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고2 09월 21

19. $f(0)=0$ 인 삼차함수 $f(x)$ 의 도함수 $y=f'(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



실수 k 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=\begin{cases}(x-k)+f(k) & (x \le k)\\ f(x) & (x > k)\end{cases}$$

라 하자. $x \le k$ 에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $h(k)$ 라 할 때, $\sum_{k=1}^{7} h(k)$ 의 값은? (단, $f'(0)=1$, $f'(1)=f'(3)=0$)

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고2 09월 30

20. 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$ 와 양수 k 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=\frac{f(x)+|f(x)-k|}{2}$$

라 하자. 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서만 미분가능하지 않다.
(나) $g(0)=g(2)$
(다) $\int_{0}^{2}\|f(x)-g(x)\|dx=8$

$g(1)+g(-1)$ 의 값을 구하시오.

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 09월 30

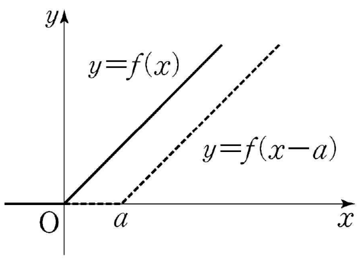
21. 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (x \le 0) \\ x & (x > 0) \end{cases},\ g(x)=\begin{cases} x(2-x) & (|x-1| \le 1) \\ 0 & (|x-1| > 1) \end{cases}$$

이다. 양의 실수 k, a, $b\,(a<b<2)$에 대하여, 함수 $h(x)$를

$$h(x)=k\{f(x)-f(x-a)-f(x-b)+f(x-2)\}$$

라 정의하자. 모든 실수 x에 대하여 $0 \le h(x) \le g(x)$일 때, $\int_0^2 \{g(x)-h(x)\}dx$의 값이 최소가 되게 하는 k, a, b에 대하여 $60(k+a+b)$의 값을 구하시오.



[출처] 2018 모의_공공 교육청 고2 06월 30

22. 이차함수 $f(x)=x^2+\frac{1}{2}x$에 대하여 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0 \le x < \frac{1}{2}$일 때, $g(x)=f(x)$이다.
>
> (나) $n-\frac{1}{2} \le x < n+\frac{1}{2}$일 때,
>
> $g(x)=f(x-n)+\frac{n}{2}$이다. (단, n은 자연수이다.)
>
> (다) 모든 실수 x에 대하여 $g(-x)=g(x)$이다.

실수 t에 대하여 함수 $y=g(x)$의 그래프와 함수 $y=|x|-t$의 그래프가 만나는 점의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$가 $t=\alpha$에서 불연속인 α의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 α_1, α_2, α_3, $\cdots$ 라 할 때, $16\alpha_{20}$의 값을 구하시오.

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고2 06월 30

23. 양의 실수 k와 함수 $f(x)=ax(x-b)$ (a, b는 자연수)에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<b) \\ kf(x-b) & (x \geq b) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $g(6)=-8$
>
> (나) 방정식 $|g(x)|=b$의 서로 다른 실근의 개수는 5이다.

실수 m에 대하여 직선 $y=mx-1$이 함수 $y=|g(x)|$의 그래프와 만나는 점의 개수를 $h(m)$이라 하자.
함수 $h(m)$에 대하여 $\lim\limits_{m \to t-} h(m)+\lim\limits_{m \to t+} h(m)=6$을 만족시키는 모든 실수 t의 값의 합은 $p+q\sqrt{14}$이다.
$12(p+q)$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.)

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 04월 30

24. 두 실수 a, b에 대하여 정의역이 $\{x \mid x \geq 0\}$인 함수

$$f(x)=\frac{-ax-b+1}{ax+b} \ (ab>0)$$

이 있다. 실수 k에 대하여 정의역이 $\{x \mid x \geq 0\}$인 함수

$$g(x)=\begin{cases} 2k-f(x) & (f(x)<k) \\ f(x) & (f(x) \geq k) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim\limits_{x \to \infty} |g(x)|=\frac{1}{2}$
>
> (나) $|g(0)|=1$
>
> (다) 함수 $y=|g(x)|$의 그래프와 직선 $y=-k$는 두 점 $\left(\frac{1}{28}, -k\right)$, $(\alpha, -k)$에서만 만난다.
>
> (단, $\alpha>\frac{1}{28}$)

직선 $y=m(x-4\alpha)+\frac{3}{4}$이 함수 $y=|g(x)|$의 그래프와 만나는 서로 다른 점의 개수를 $h(m)$이라 할 때, 함수 $h(m)$이 불연속이 되는 모든 실수 m의 값의 합은 M이다.
$252M$의 값을 구하시오.

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고2 09월 30

25. 양수 a와 실수 b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} -3x(x+2) & (x<0) \\ |ax^2+bx| & (x \geq 0) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 $f(x)=t$인 모든 x를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을

$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_m$ (m은 자연수)

라 할 때, 함수 $g(t)$를 $g(t)=x_1$이라 하자. 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(t)$는 $t=3,\ t=4$ 에서만 불연속이다.
>
> (나) $\lim_{t \to 3+} g(t)=\frac{2}{3}$

$30 \times g(4)$의 값을 구하시오.

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 06월 30

26. 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족한다.

> (가) 5 이하의 모든 자연수 n에 대하여
>
> $\sum_{k=1}^{n} f(k)=f(n)f(n+1)$이다.
>
> (나) $n=3,\ 4$일 때, $f(x)$에서 x의 값이 n에서 $n+2$까지 변할 때의 평균변화율은 양수가 아니다.

$128 \times f\left(\frac{5}{2}\right)$의 값을 구하시오.

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 10월 30

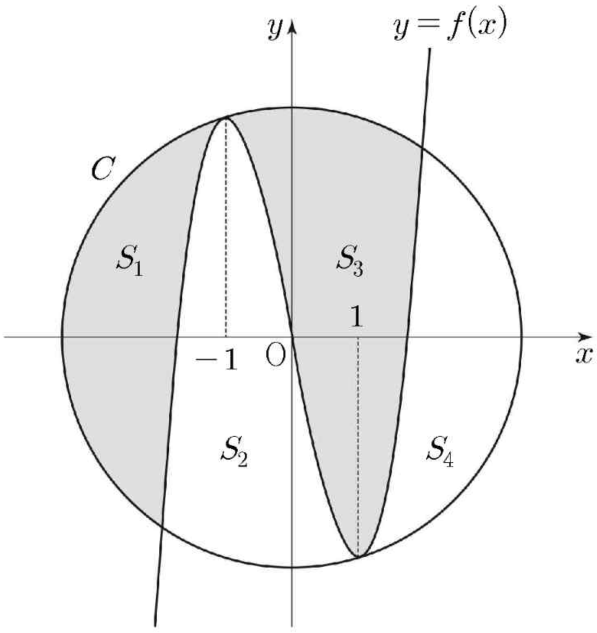
27. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t가 다음 조건을 만족시킨다.

> 등식 $f(a)+1=f'(a)(a-t)$를 만족시키는 실수 a의 값이 6 하나뿐이기 위한 필요충분조건은 $-2<t<k$이다.

$f(8)$의 값을 구하시오. (단, k는 -2보다 큰 상수이다.)

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고2 11월 30

28. 3보다 큰 자연수 n에 대하여 원 $C : x^2+y^2=n$이 있다. 삼차함수 $y=f(x)$가 $x=-1$에서 극대, $x=1$에서 극소이고, 두 점 $(-1, f(-1))$, $(1, f(1))$이 모두 원 C 위에 있을 때, 그림과 같이 원 C의 내부는 곡선 $y=f(x)$에 의해 4개의 영역 S_1, S_2, S_3, S_4로 나누어진다. 각 영역 $S_k(k=1, 2, 3, 4)$의 내부의 점들 중 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 $g_k(n)$이라 할 때, $g_1(n)>g_3(n)$을 만족시키는 n의 최솟값은 a이다. $a+\{g_1(a)\times g_3(a)\}$의 값을 구하시오. (단, 각 영역은 경계선을 포함하지 않는다.)



[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 07월 30

29. 함수 $f(x)=x^3-12x$와 실수 t에 대하여 점 $(a, f(a))$를 지나고 기울기가 t인 직선이 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $g(t)$가 $t=k$에서 불연속이 되는 k의 값 중에서 가장 작은 값은 0이다.

$\sum_{n=1}^{36} g(n)$의 값을 구하시오.

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 06월 21

30. 상수 a, b에 대하여 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(-1)>-1$
(나) $f(1)-f(-1)>8$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄴ. $-1<x<1$일 때, $f'(x)\geq 0$이다.

ㄷ. 방정식 $f(x)-f'(k)x=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k의 개수는 4이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고2 09월 30

31. 최고차항의 계수의 부호가 서로 다른 두 삼차다항식 $f(x)$, $g(x)$가

$$|f(x)|=\begin{cases} g(x)-4x-26 & (x\leq a) \\ g(x)+2x^3-14x^2+12x+6 & (x>a) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, 방정식 $f(x)+a(x-k)^2=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 모든 자연수 k의 값의 합을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 09월 30

32. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 방정식

$$(f\circ f)(x)=x$$

의 모든 실근이 0, 1, a, 2, b이다.

$$f'(1)<0,\ f'(2)<0,\ f'(0)-f'(1)=6$$

일 때, $f(5)$의 값을 구하시오. (단, $1<a<2<b$)

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 11월 30

33. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 -1인 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ 0)$에서의 접선은 모두 x축이다.
>
> (나) 점 $(2,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 개수는 2이다.
>
> (다) 방정식 $f(x)=g(x)$는 오직 하나의 실근을 가진다.

$x>0$인 모든 실수 x에 대하여

$$g(x)\le kx-2\le f(x)$$

를 만족시키는 실수 k의 최댓값과 최솟값을 각각 $\alpha,\ \beta$라 할 때, $\alpha-\beta=a+b\sqrt{2}$이다. a^2+b^2의 값을 구하시오.
(단, $a,\ b$는 유리수이다.)

[출처] 2018 모의_공공 사관학교 고3 07월 30

34. 최고차항의 계수가 1이고 $f'(0)=0$인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $f(x)=t$의 실근이 존재하지 않을 때, $g(t)=0$이다.
>
> (나) 방정식 $f(x)=t$의 실근이 존재할 때, $g(t)$는 $f(x)=t$의 실근의 최댓값이다.

함수 $g(t)$가 $t=k,\ t=30$에서 불연속이고

$$\lim_{t\to k+} g(t)=-2,\quad \lim_{t\to 30+} g(t)=1$$

일 때, 실수 k의 값을 구하시오. (단, $k<30$)

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 09월 21

35. 사차함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$에 대하여 $x \geq 0$에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_{-x}^{2x}\{f(t)-|f(t)|\}dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0<x<1$에서 $g(x)=c_1$ (c_1은 상수)
(나) $1<x<5$에서 $g(x)$는 감소한다.
(다) $x>5$에서 $g(x)=c_2$ (c_2는 상수)

$f(\sqrt{2})$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 40 ② 42 ③ 44
④ 46 ⑤ 48

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고2 11월 30

36. 좌표평면에서 실수 m에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & (x<m) \\ \frac{1}{4}(x-3) & (x \geq m) \end{cases}$$

의 그래프가 직선 $y=mx$와 만나는 점의 개수를 $g(m)$이라 하자. $m \leq 0$에서 함수 $g(m)$이 연속이 되도록 하는 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고2 11월 29

37. 상수 a와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=(x^2-x+a)f(x)$라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-f(x)}{x-1}=0$
(나) $g'(1)\neq 0$
(다) $f(\alpha)=f'(\alpha)$이고 $g'(\alpha)=2f'(\alpha)$인 실수 α가 존재한다.

$g(\alpha+4)=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 09월 30

38. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 네 개의 수 $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$가 이 순서대로 등차수열을 이루고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, f(-1))$에서의 접선과 점 $(2, f(2))$에서의 접선이 점 $(k, 0)$에서 만난다.
$f(2k)=20$일 때, $f(4k)$의 값을 구하시오.
(단, k는 상수이다.)

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 07월 21

39. 좌표평면 위의 점 $(0,\ t)$를 지나고 곡선

$$y=x^3-ax^2+3x-5\ (a\text{는 자연수})$$

에 접하는 서로 다른 모든 직선의 개수를 $f(t)$라 할 때, 함수 $f(t)$에 대하여 합성함수 $g(t)=(f\circ f)(t)$라 하자. 다음 조건을 만족시키는 a의 최솟값을 m이라 할 때, $m+g(m)$의 값은?

(가) 모든 실수 t에 대하여 $g(t)>1$이다.

(나) 함수 $g(t)$의 치역의 원소의 개수는 1이다.

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 06월 30
[출처] 2020 일반_시중교재 희망에듀 임정선 마플시너지
[출처] 2022 모의_사설 이투스 고3 ASAP10모의고사시즌2워크북

40. 최고차항의 계수가 1이고 $f(2)=3$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{ax-9}{x-1} & (x<1)\\ f(x) & (x\geq 1)\end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 서로 다른 두 점에서만 만나도록 하는 모든 실수 t의 값의 집합은 $\{t\,|\,t=-1\ \text{또는}\ t\geq 3\}$이다.

$(g\circ g)(-1)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 10월 30

41. 양수 a에 대하여 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(0)=g(0)$
>
> (나) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$, $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{x-a}=0$
>
> (다) $\int_0^a \{g(x)-f(x)\}dx=36$

$3\int_0^a |f(x)-g(x)|dx$의 값을 구하시오.

[출처] 2019 모의_공공 사관학교 고3 07월 30

42. 두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $h(x)$가 $0\le x<4$에서

$$h(x)=\begin{cases} x & (0\le x<2) \\ f(x) & (2\le x<3) \\ g(x) & (3\le x<4) \end{cases}$$

이고, 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $h(x)=h(x-4)+k$ (k는 상수)이다.
>
> (나) 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
>
> (다) $\int_0^4 h(x)dx=6$

$h\left(\frac{13}{2}\right)=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 07월 30

43. $x=-3$과 $x=a(a>-3)$에서 극값을 갖는 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-3) \\ \int_0^x |f'(t)|dt & (x\geq -3) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(-3)=-16$, $g(a)=-8$

(나) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(다) 함수 $g(x)$는 극솟값을 갖는다.

$\left|\int_a^4 \{f(x)+g(x)\}dx\right|$의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 09월 30

44. 이차함수 $f(x)=x^2+2x+2$와 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<0) \\ |f(-x)-t| & (x\geq 0) \end{cases}$$

이다. 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{t}{3}$가 만나는 서로 다른 모든 점의 개수를 $h(t)$라 하자.

$$\lim_{t\to\alpha-} h(t) \neq \lim_{t\to\alpha+} h(t)$$

인 모든 실수 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ (m은 자연수)라 할 때, $\sum_{k=1}^{m}\{4\alpha_k \times h(\alpha_k)\}$의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 21

45. 좌표평면에 세 점 O(0, 0), A($\sqrt{2}$, 0), B(0, $\sqrt{2}$)가 있다.
점 O를 중심으로 하는 원 C의 반지름의 길이가 t일 때, 삼각형 ABP의 넓이가 자연수인 원 C 위의 점 P의 개수를 함수 $f(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, 점 P는 직선 AB 위에 있지 않다.)

<보 기>

ㄱ. $f\left(\frac{1}{2}\right)=2$

ㄴ. $\lim_{t \to 1+} f(t) \neq f(1)$

ㄷ. $0<a<4$인 실수 a에 대하여 함수 $f(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 개수는 3이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 30

46. 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, 함수 $g(x)$는 일차함수이다. 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases} |f(x)-g(x)| & (x<1) \\ f(x)+g(x) & (x \geq 1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, $h(0)=0$, $h(2)=5$일 때, $h(4)$의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 30

47. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=f(3)=0$
(나) 집합 $\{x \mid x \geq 1$이고 $f'(x)=0\}$의 원소의 개수는 1이다.

상수 a에 대하여 함수 $g(x)=|f(x)f(a-x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $\dfrac{g(4a)}{f(0) \times f(4a)}$의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 30

48. 양의 실수 t와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(t)=\frac{f(t)-f(0)}{t}$$

이라 하자. 두 함수 $f(x)$와 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(t)$의 최솟값은 0이다. (나) x에 대한 방정식 $f'(x)=g(a)$를 만족시키는 x의 값은 a와 $\frac{5}{3}$이다. (단, $a>\frac{5}{3}$인 상수이다.)

자연수 m에 대하여 집합 A_m을

$$A_m=\{x \mid f'(x)=g(m),\ 0<x\le m\}$$

이라 할 때, $n(A_m)=2$를 만족시키는 모든 자연수 m의 값의 합을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 30

49. 이차함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고, 삼차함수 $g(x)$는 이차항의 계수가 0이다. 함수

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x\le 0) \\ g(x) & (x>0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킬 때, $h'(-3)+h'(4)$의 값을 구하시오.

(가) 방정식 $h(x)=h(0)$의 모든 실근의 합은 1이다. (나) 닫힌구간 $[-2,\ 3]$에서 함수 $h(x)$의 최댓값과 최솟값의 차는 $3+4\sqrt{3}$이다.

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 30

50. 최고차항의 계수가 4인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_t^x f(s)ds$$

라 하자. 상수 a에 대하여 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(a)=0$
(나) 함수 $\lvert g(x)-g(a)\rvert$가 미분가능하지 않은 x의 개수는 1이다.

실수 t에 대하여 $g(a)$의 값을 $h(t)$라 할 때, $h(3)=0$이고 함수 $h(t)$는 $t=2$에서 최댓값 27을 가진다.
$f(5)$의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 30

51. 함수 $f(x)=\begin{cases} -3x^2 & (x<1) \\ 2(x-3) & (x \geq 1) \end{cases}$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x (t-1)f(t)dt$$

라 할 때, 실수 t에 대하여 직선 $y=t$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $h(t)$라 하자.

$$\left|\lim_{t\to a+} h(t)-\lim_{t\to a-} h(t)\right|=2$$

를 만족시키는 모든 실수 a에 대하여 $\lvert a\rvert$의 값의 합을 S라 할 때, $30S$의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 30

52. $t \geq 6-3\sqrt{2}$ 인 실수 t에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2+tx & (x<0) \\ -3x^2+tx & (x \geq 0) \end{cases}$$

일 때, 다음 조건을 만족시키는 실수 k의 최솟값을 $g(t)$라 하자.

(가) 닫힌구간 $[k-1,\ k]$에서 함수 $f(x)$는 $x=k$에서 최댓값을 갖는다. (나) 닫힌구간 $[k,\ k+1]$에서 함수 $f(x)$는 $x=k+1$에서 최솟값을 갖는다.

$3\int_2^4 \{6g(t)-3\}^2 dt$의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 경찰대 고3 07월 18

53. 두 함수 $f(x)=x^4(x-a)$, $g(x)=k(x-1)(x-b)$의 그래프가 직선 $y=x-1$에 접한다. 함수 $f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 함수 $g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같을 때, 세 상수 a, b, k에 대하여 abk의 값은? (단, $b>1$)

① $-2-\sqrt{5}$ ② $-1-\sqrt{5}$ ③ $-\sqrt{5}$
④ $1-\sqrt{5}$ ⑤ $2-\sqrt{5}$

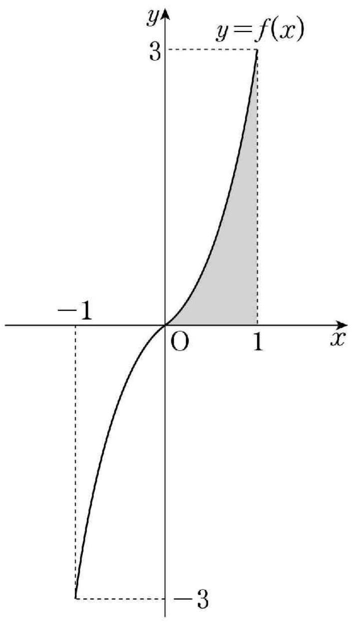
[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 30

54. 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 정의된 연속함수 $f(x)$는

정의역에서 증가하고 모든 실수 x에 대하여
$f(-x)=-f(x)$가 성립할 때, 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 $g(x)=f(x)$이다.
> (나) 닫힌구간 $[2n-1,\ 2n+1]$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $2n$만큼, y축의 방향으로 $6n$만큼 평행이동한 그래프이다. (단, n은 자연수이다.)

$f(1)=3$이고 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=1$일 때, $\displaystyle\int_3^6 g(x)dx$의 값을 구하시오.



[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 09월 30

55. 세 실수 $a(a\neq 0)$, b, k에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+(2b-3)x+a^2-3 & (x<k) \\ -\dfrac{1}{3}ax^2+(b+5)x+a^2-1 & (x\geq k) \end{cases}$$

라 하자. 함수

$$g(x)=\lim_{t\to x+}\frac{|f(t)|}{f(t)}-\lim_{t\to x-}\frac{|f(t)|}{f(t)}$$

에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 임의의 실수 α에 대하여 $\displaystyle\lim_{x\to\alpha}f(x)$가 존재한다.
> (나) 두 함수 $y=g(x)$와 $y=-4\left|\log_2\dfrac{x}{2}\right|+2$의 그래프의 서로 다른 교점의 개수는 5이다.

$k=p+q\sqrt{17}$일 때, $16(p+q)$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 유리수이다.)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 11월 30

56. 두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=x^2-2ax+b$라 할 때, 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x+a) & (x \le a) \\ |f(x)| & (x > a) \end{cases}$$

라 하자. 실수 t에 대하여 직선 $y=t$와 함수 $y=g(x)$의 그래프가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $h(t)$라 할 때, 함수 $h(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

$k \ge 24$인 임의의 실수 k에 대해서만 함수 $\{h(t)-2\}h(t-k)$가 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$10a+b$의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 22

57. 양수 a에 대하여 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $\lvert x(x-2)\rvert g(x)=x(x-2)(\lvert f(x)\rvert-a)$ 이다. (나) 함수 $g(x)$는 $x=0$과 $x=2$에서 미분가능하다.

$g(3a)$의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 22

58. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=f(x-3)\times\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하시오.

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (나) 방정식 $g(x)=0$은 서로 다른 네 실근 α_1, α_2, α_3, α_4를 갖고 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=7$이다.

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 공통범위 22

59. 함수

$$f(x)=x^3-3px^2+q$$

가 다음 조건을 만족시키도록 하는 25 이하의 두 자연수 p, q의 모든 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수를 구하시오.

> (가) 함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 실수 a의 개수는 5이다.
> (나) 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값과 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값은 같다.

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 22

60. 삼차함수 $f(x)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x(x-3)(x+3)$에 대하여 $x\ge-3$에서 정의된 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (-3\le x\le 3) \\ \dfrac{1}{k+1}f(x-6k) & (6k-3\le x<6k+3) \end{cases}$$

(단, k는 모든 자연수)

이다. 자연수 n에 대하여 직선 $y=n$과 함수 $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{12}a_n$의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 22

61. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
> (나) 방정식 $f(x-f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$f(1)=4$, $f'(1)=1$, $f'(0)>1$일 때, $f(0)=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 22

62. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 방정식 $f'(x)=0$이 닫힌구간 $[t,\ t+2]$에서 갖는 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{t\to a+} g(t)+\lim_{t\to a-} g(t)\le 2$이다.
>
> (나) $g(f(1))=g(f(4))=2,\ \ g(f(0))=1$

$f(5)$의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 공통범위 22

63. 양수 a와 일차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_0^x (t^2-4)\{|f(t)|-a\}\,dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 극값을 갖지 않는다.
>
> (나) $g(2)=5$

$g(0)-g(-4)$의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 22

64. 일차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x (x-2)f(s)ds$$

라 하자. 실수 t에 대하여 직선 $y=tx$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 점의 개수를 $h(t)$라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $g(x)$에 대하여 $g(4)$의 값의 합을 구하시오.

> $g(k)=0$을 만족시키는 모든 실수 k에 대하여 함수 $h(t)$는 $t=-k$에서 불연속이다.

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 22

65. 실수 a에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

$$f(x)=3x+a,\ g(x)=\int_{2}^{x}(t+a)f(t)dt$$

라 하자. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $h(-1)$의 최솟값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

> (가) 곡선 $y=h(x)$ 위의 어떤 점에서의 접선이 x축이다.
>
> (나) 곡선 $y=|h(x)|$가 x축과 평행한 직선과 만나는 서로 다른 점의 개수의 최댓값은 4이다.

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 15

66. 최고차항의 계수가 4이고 $f(0)=f'(0)=0$을 만족시키는 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_{0}^{x}f(t)\,dt+5 & (x<c)\\ \left|\displaystyle\int_{0}^{x}f(t)\,dt-\frac{13}{3}\right| & (x\geq c)\end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 c의 개수가 1일 때, $g(1)$의 최댓값은?

① 2 ② $\frac{8}{3}$ ③ $\frac{10}{3}$ ④ 4 ⑤ $\frac{14}{3}$

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 09월 29

67. 양수 m과 0이 아닌 실수 a에 대하여 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+(a-1)x-a^2+2 & (x\le 2m) \\ -3x+4a & (x>2m) \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} ax-a & (x\le m+1) \\ x-a+1 & (x>m+1) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim\limits_{x\to\alpha-} f(x) \ne \lim\limits_{x\to\alpha+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\beta-} g(x) \ne \lim\limits_{x\to\beta+} g(x)$인 실수 α, β가 존재한다.

(나) 모든 실수 k에 대하여 $\lim\limits_{x\to k}\dfrac{f(x)}{g(x)}$의 값이 존재한다.

$m+g(a^2)$의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월 공통범위 22

68. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오.

(가) 모든 실수 x에 대하여
$f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$이다.

(나) 함수 $g(x)$의 최솟값은 $\dfrac{5}{2}$이다.

(다) $f(0)=-3$, $f(g(1))=6$

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 22

69. 두 양수 a, $b(b>3)$과 최고차항의 계수가 1인

이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}(x+3)f(x) & (x<0) \\ (x+a)f(x-b) & (x\geq 0)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킬 때, $g(4)$의 값을 구하시오.

$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{\lvert g(x)\rvert+\{g(t)\}^2}-\lvert g(t)\rvert}{(x+3)^2}$의 값이 존재하지 않는 실수 t의 값은 -3과 6뿐이다.

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월 공통범위 14

70. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 다음과 같이

정의한다.

$$g(x)=\begin{cases}x & (x<-1 \text{ 또는 } x>1) \\ f(x) & (-1\leq x\leq 1)\end{cases}$$

함수 $h(x)=\lim\limits_{t\to 0+}g(x+t)\times\lim\limits_{t\to 2+}g(x+t)$에 대하여

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $h(1)=3$

ㄴ. 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 감소하고 $g(-1)=-2$이면 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 최솟값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

[출처] 2022 모의_공공 경찰대 고3 07월 20

71. 곡선 $y=x^3-x^2$ 위의 제1사분면에 있는 점 A에서의 접선의 기울기가 8이다. 점 $(0, 2)$를 중심으로 하는 원 S가 있다. 두 점 $\mathrm{B}(0, 4)$와 원 S 위의 점 X에 대하여 두 직선 OA와 BX가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\overline{\mathrm{BX}}\sin\theta$의 최댓값이 $\frac{6\sqrt{5}}{5}$가 되도록 하는 원 S의 반지름의 길이는? (단, O는 원점이다.)

① $\frac{3\sqrt{5}}{4}$ ② $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{17\sqrt{5}}{20}$ ④ $\frac{9\sqrt{5}}{10}$ ⑤ $\frac{19\sqrt{5}}{20}$

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 22

72. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 할 때, 함수 $h(x)$를

$$h(x)=|f(x)|+g(x)$$

라 하자. 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 곡선 $y=h(x)$ 위의 점 $(k, 0)(k\neq 0)$에서의 접선의 방정식은 $y=0$이다.
> (나) 방정식 $h(x)=0$의 실근 중에서 가장 큰 값은 12이다.

$h(3)=-\frac{9}{2}$일 때, $k\times\{h(6)-h(11)\}$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.)

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 22

73. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 구간 $(-\infty, t]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값을 m_1이라 하고, 구간 $[t, \infty)$에서 함수 $f(x)$의 최솟값을 m_2라 할 때,

$$g(t)=m_1-m_2$$

라 하자. $k>0$인 상수 k와 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$g(t)=k$를 만족시키는 모든 실수 t의 값의 집합은 $\{t \mid 0 \le t \le 2\}$이다.

$g(4)=0$일 때, $k+g(-1)$의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 20

74. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킨다. 양수 t에 대하여 좌표평면 위의 네 점 $(t, 0)$, $(0, 2t)$, $(-t, 0)$, $(0, -2t)$를 꼭짓점으로 하는 마름모가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 $t=\alpha$, $t=8$에서 불연속이다. $\alpha^2 \times f(4)$의 값을 구하시오.
(단, α는 $0<\alpha<8$인 상수이다.)

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 22

75. 최고차항의 계수가 1이고 $x=3$에서 극댓값 8을 갖는 삼차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \ge t) \\ -f(x)+2f(t) & (x<t) \end{cases}$$

라 할 때, 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값이 두 개일 때, $f(8)$의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 22

76. 최고차항의 계수가 정수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)=1$, $f'(1)=0$이다. 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)+|f(x)-1|$$

이라 할 때, 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 함수 $f(x)$의 개수를 구하시오.

(가) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 모든 교점의 x좌표의 합은 3이다.

(나) 모든 자연수 n에 대하여

$n<\int_0^n g(x)dx<n+16$이다.

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 22

77. 양수 a와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x \{f'(t+a)\times f'(t-a)\}dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $g(x)$는 $x=\frac{1}{2}$과 $x=\frac{13}{2}$에서만 극값을 갖는다

$f(0)=-\frac{1}{2}$일 때, $a\times f(1)$의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 15

78. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x+2) & (x<0) \\ \displaystyle\int_0^x tf(t)dt & (x \ge 0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. 실수 a에 대하여 함수 $h(x)$를

$$h(x)=|g(x)-g(a)|$$

라 할 때, 함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 모든 a의 값의 곱은?

① $-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ ② $-\dfrac{7\sqrt{3}}{6}$ ③ $-\sqrt{3}$

④ $-\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$ ⑤ $-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 공통범위 22

79. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1이고 상수항이 0인 삼차함수 $g(x)$가 있다. 양의 상수 a에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $x|g(x)|=\displaystyle\int_{2a}^{x}(a-t)f(t)dt$이다.

(나) 방정식 $g(f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

$\displaystyle\int_{-2a}^{2a}f(x)dx$의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 경찰대 고3 07월 25

80. 세 집합 A, B, C는

$$A=\left\{(2+2\cos\theta,\ 2+2\sin\theta)\ \middle|\ -\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{\pi}{3}\right\},$$

$$B=\left\{(-2+2\cos\theta,\ 2+2\sin\theta)\ \middle|\ \frac{2\pi}{3}\le\theta\le\frac{4\pi}{3}\right\},$$

$$C=\left\{(a,\ b)\ \middle|\ -3\le a\le 3,\ b=2\pm\sqrt{3}\right\}$$

이다. 좌표평면에서 집합 $A\cup B\cup C$의 모든 원소가 나타내는 도형을 X라 하고, 도형 X와 곡선 $y=-\sqrt{3}x^2+2$가 만나는 점의 y좌표를 c라 하자. 집합 X로 둘러싸인 부분의 넓이를 α, 곡선 $y=-\sqrt{3}x^2+2$와 직선 $y=c$로 둘러싸인 부분의 넓이를 β라 하자. $\alpha-\beta=\dfrac{p\pi+q\sqrt{3}}{3}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 정수이다.)

수2킬러 80제(빠른 정답)

프로젝트 2023.01.03

2. [정답] 196
3.[정답] **20**
4. [정답] **35**
5. [정답] ②

6. [정답] **130**
7. [정답] **20**
8. [정답] **23**
9. [정답] **65**
10. [정답] **137**

11. [정답] ②
12. [정답] **60**
13. [정답] 480
14. [정답] 243
15. [정답] **64**

16. [정답] 36
17. [정답] ②
18. [정답] **8**
19. [정답] ⑤
20. [정답] 9

21. [정답] **200**
22. [정답] 73
23. [정답] 219
24. [정답] 19
25. [정답] 40

26. [정답] 65
27. [정답] 39
28. [정답] **134**
29. [정답] **82**
30. [정답] ③

31. [정답] **11**
32. [정답] **40**
33. [정답] **5**
34. [정답] 21
35. [정답] ④

36. [정답] **48**
37. [정답] 61
38. [정답] 42
39. [정답] ④
41. [정답] **340**
42. [정답] 21
43. [정답] **80**
44. [정답] 141
45. [정답] ⑤

46. [정답] **39**
47. [정답] 105
48. [정답] 35
49. [정답] 38
50. [정답] 432

51. [정답] **80**
52. [정답] 37
53. [정답] ②
54. [정답] 41
55. [정답] **28**

56. [정답] 44
57. [정답] 108
58. [정답] **108**
59. [정답] 14
60. [정답] **64**

61. [정답] **61**
62. [정답] 9
63. [정답] 16
64. [정답] **56**
65. [정답] 251

66. [정답] ⑤
67. [정답] 4
68. [정답] 13
69. [정답] 19
70. [정답] ①

71. [정답] ②
72. [정답] 121
73. [정답] 82
74. [정답] 240
75. [정답] 58

76. [정답] 11
77. [정답] 30
78. [정답] ①
79. [정답] ④
80. [정답] 34

수2킬러 80제(해설)

프로젝트 2023.01.03

1)

2) [정답] 196

[해설]

주어진 조건에 의하여 함수 $f(x)$의

극댓값은 0, 극솟값은 -4

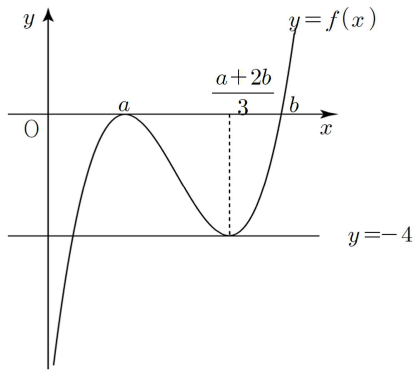
함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의

x좌표를 a, b라 하면

$f(x)=(x-a)^2(x-b)$

$f'(x)=2(x-a)(x-b)+(x-a)^2$

$=(x-a)(3x-a-2b)$



$f\left(\frac{a+2b}{3}\right)=\frac{4}{27}(a-b)^3=-4$

이므로 $b=a+3$

$f(0)=-a^2b=-a^2(a+3)=-20$,

$a=2$, $b=5$

$f(x)=(x-2)^2(x-5)$

따라서 $f(9)=196$

[다른풀이]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가

$x=a$에서 극댓값 0을 갖는다고 하고 함수 $f(x)$를 x축의 음의 방향으로 a만큼 평행이동하여 얻은 함수를 $h(x)=f(x+a)$라 하고 함수 $y=h(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표를 $\alpha\,(\alpha \neq 0)$라 하자.

$h(x)=x^2(x-\alpha)$

$h'(x)=2x(x-\alpha)+x^2=x(3x-2\alpha)=0$

함수 $y=h(x)$는 $x=\frac{2\alpha}{3}$에서 극솟값 -4를

가지므로

$\left(\frac{2\alpha}{3}\right)^2\left(\frac{2\alpha}{3}-\alpha\right)=-\frac{4\alpha^3}{27}=-4$

$\alpha=3$이고 $f(x+a)=x^2(x-3)$

$f(x)=(x-a)^2(x-a-3)$

$f(0)=-20$이므로

$a^2(a+3)=20=2^2\times 5$

$a=2$이므로

$f(x)=(x-2)^2(x-5)$

따라서 $f(9)=196$

3)[정답] **20**

[해설]

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1-}(3x^2+ax+b)=\lim_{x\to 1+}2x$

$a+b=-1$

$g(0)+g(1)=\int_0^1(3x^2+ax+b)dx+\int_1^2 2xdx$

$=\left[x^3+\frac{1}{2}ax^2+bx\right]_0^1+\left[x^2\right]_1^2$

$=\frac{1}{2}a+b+4=\frac{7}{2}$

$\therefore\ a=-1,\ b=0$

$g(t)=\int_t^{t+1}f(x)dx$에서

(ⅰ) $t<0$일 때

$g(t)=\int_t^{t+1}(3x^2-x)dx=\left[x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_t^{t+1}$

$=3t^2+2t+\frac{1}{2}$

(ⅱ) $0\le t<1$일 때

$g(t)=\int_t^1(3x^2-x)dx+\int_1^{t+1}2xdx$

$= \left[x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_t^1 + \left[x^2\right]_1^{t+1}$

$= -t^3 + \frac{3}{2}t^2 + 2t + \frac{1}{2}$

(iii) $t \geq 1$일 때

$g(t) = \int_t^{t+1} 2x\,dx = \left[x^2\right]_t^{t+1} = 2t+1$

$$\therefore g(t) = \begin{cases} 3t^2 + 2t + \frac{1}{2} & (t<0) \\ -t^3 + \frac{3}{2}t^2 + 2t + \frac{1}{2} & (0 \leq t < 1) \\ 2t+1 & (t \geq 1) \end{cases}$$

$$g'(t) = \begin{cases} 6t+2 & (t<0) \\ -3t^2+3t+2 & (0<t<1) \\ 2 & (t>1) \end{cases}$$

$g'(t)=0$인 t의 값은 $-\frac{1}{3}$이다.

함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$
$g(t)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $g(t)$는 $t = -\frac{1}{3}$에서 최솟값을 가지므로

따라서 $g\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$이고 $120k = 20$

4) [정답] **35**

[해설]

(나)에 주어진 등식에 $x=0$을 대입하면

$f(0)=0$ …… ㉠

(나)에 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x) = \sqrt{4-2f(x)}$

$\therefore \{f'(x)\}^2 = 4-2f(x)$(단, $f'(x) \geq 0$, $f(x) \geq 2$)…… ㉡

$x \leq b$일 때

$f'(x) = 2a(x-b)$이므로 ㉡에서

$4a^2(x-b)^2 = 4-2\{a(x-b)^2+c\}$ …… ㉢

㉢이 $x \leq b$인 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$4a^2 = -2a$이고 $4-2c=0$이다.

$\therefore a = -\frac{1}{2}$, $c=2$

따라서 $x \leq b$일 때

$f(x) = -\frac{1}{2}(x-b)^2+2$

이때 $b<0$이면 $f(b)=2$이고 ㉠에서 $f(0)=0$이므로

모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \geq 0$이라는 ㉡의 조건에 모순이다.

$\therefore b \geq 0$

㉠에서 $f(0)=0$이므로

$f(0) = -\frac{1}{2}b^2+2=0$

$\therefore b^2=4$

$\therefore b=2(\because b \geq 0)$

이때 ㉡에서 $f'(x) \geq 0$이고 $f(x) \leq 2$이므로

$x>b$일 때 $f(x)=2$이다.

따라서

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x-2)^2+2 & (x \leq 2) \\ 2 & (x>2) \end{cases}$$

이므로

$\int_0^6 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx$

$= \int_0^2 \left\{-\frac{1}{2}(x-2)^2+2\right\}dx + \int_2^6 2dx$

$= \left[-\frac{1}{6}(x-2)^3+2x\right]_0^2 + \left[2x\right]_2^6$

$= \left(4-\frac{8}{6}\right)+(12-4)$

$= 12-\frac{4}{3} = \frac{32}{3}$

$\therefore p+q=3+32=35$

5) [정답] ②

[해설]

$h(x) = x(x-2)(x-3)$이라 하면

$h'(x) = (x-2)(x-3)+x(x-3)+x(x-2)$

이므로 $h'(0)=6$, $h'(2)=-2$, $h'(3)=3$

$f'(0)>6$ 또는 $f'(2)<-2$ 또는 $f'(2)>2$ 또는 $f'(3)<-3$이면

$h(x)$와 $f(x)$의 그래프가 교점이 생기게 되어 교점 좌우에서 대소관계가 뒤바뀌며 $g(x)$가 미분가능하다는 조건을 만족시키지 못한다.

$\therefore\ f'(0)\le 6,\ -2\le f'(2)\le 2,\ f'(3)\ge -3$

따라서 위 조건을 만족하는 $f(x)$의 개형은 다음과 같다.

(i) $f(x)=ax(x-2)^2(x-3)$에서

$f'(x)=a(4x^3-21x^2+32x-12)$

$\therefore\ f'(0)=-12a\le 6$

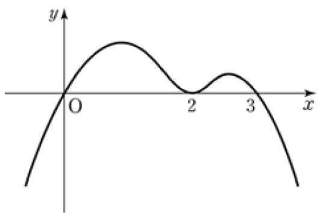
$\therefore\ a\ge -\dfrac{1}{2}$

$f'(3)=3a\ge -3$

$\therefore\ -\dfrac{1}{2}\le a<0$

$\therefore\ 0<f(1)=-2a\le 1$

$\therefore$ (최댓값)$=1$



(ii) $f(x)=ax(x-2)(x-3)^2$에서

$f'(x)=a(4x^3-24x^2+42x-18)$

$\therefore\ f'(0)=-18a\le 6$

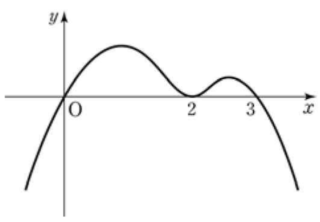
$\therefore\ a\ge -\dfrac{1}{3}$

$f'(2)=2a\ge -2,\ a\ge -1$

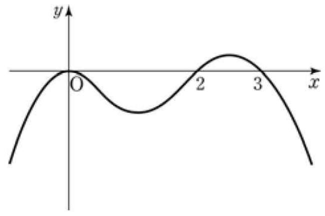
$\therefore\ -\dfrac{1}{3}\le a<0$

$\therefore\ 0<f(1)=-4a\le \dfrac{4}{3}$

$\therefore$ (최댓값)$=\dfrac{4}{3}$



(iii) $f(1)$은 음수이므로 최댓값이 아니다.



따라서 (i), (ii), (iii)을 비교하면 최댓값은 $\dfrac{4}{3}$이다.

6) [정답] **130**

[해설]

조건 (가)에서 $y=f(x)-g(x)$는 x좌표가 2인 점에서 x축에 접하므로

$f(2)-g(2)=0,\ f'(2)-g'(2)=0$

$f(x)-g(x)$는 $(x-2)^2$을 인수로 갖는다. …… $(*)$

$f(x)-g(x)=(x-2)^2(x^2+ax+b)$라 하자.

조건 (나)에서 $y=|f(x)-g(x)|$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $y=f(x)-g(x)\ge 0$

$(x-2)^2\ge 0$이므로

모든 실수 x에 대하여 $x^2+ax+b\ge 0$

판별식 $D=a^2-4b\le 0$ …… ㉠

$f(x)=(x-2)^2(x^2+ax+b)+g(x)$

$f'(x)=2(x-2)(x^2+ax+b)+(x-2)^2(2x+a)+g'(x)$

$g'(x)=4x-1$이므로

$f'(0)=-4b+4a-1=2$

$b=a-\dfrac{3}{4}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a^2-4a+3\le 0$

$\therefore 1\le a\le 3$

$f(1)=(1+a+b)+g(1)=a+b-2=2a-\dfrac{11}{4}$

$f(1)$은 $a=3$일 때 최댓값 $\dfrac{13}{4}$을 갖는다.

따라서 $\alpha=\dfrac{13}{4}$이고 $40\alpha=130$

[참고]

$(*)$에서 $f(2)-g(2)=0$이므로

$f(x)-g(x)$는 $x-2$를 인수로 갖는다.

$f(x)-g(x)=(x-2)Q(x)$라 하면

$f'(x)-g'(x)=Q(x)+(x-2)Q'(x)$

$f'(2)-g'(2)=Q(2)=0$

$\therefore Q(x)$는 $x-2$를 인수로 갖는다.

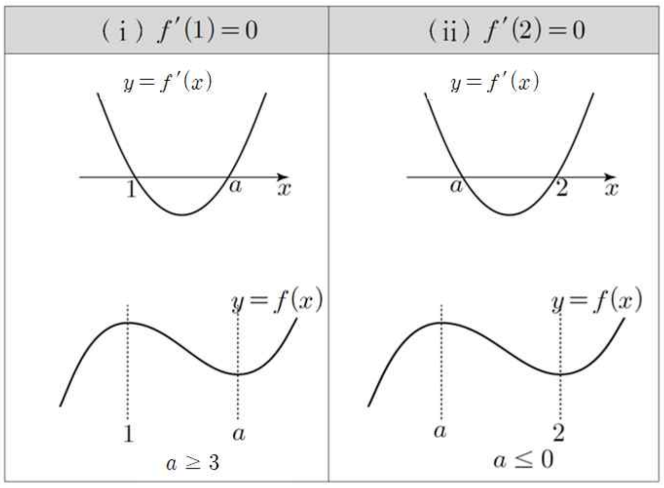
따라서 $f(x)-g(x)$는 $(x-2)^2$을 인수로 갖는다.

7) [정답] 20

[해설]

$1<x<2$인 모든 실수 x에 대하여
$f'(x)<0$이고 $f'(x-1)f'(x+1)<0$이므로

두 함수 $y=f'(x)$와 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음의 두 가지 경우이다.



함수 $g(x)=\begin{cases} f(-x) & (x<0) \\ f(x) & (x \geq 0) \end{cases}$라 하자.

함수 $g(x)$는 모든 실수 x에서 미분가능하므로

$g'(0)$가 존재해야 한다.

$\lim_{h\to 0-}\dfrac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\dfrac{f(-h)-f(0)}{h}$

$=-f'(0)$

$\lim_{h\to 0+}\dfrac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$

$=f'(0)$

$-f'(0)=f'(0)$이므로 $f'(0)=0$

위의 그래프의 개형 중 (ii)에 해당되므로

$f'(x)=3x(x-2)$

$f(x)=x^3-3x^2+C$ (단, C는 적분상수이다.)

$f(0)-f(-2)=20$

8) [정답] 23

[해설]

조건 (가)에서 $f(0)=27$, $f'(0)=0$

함수 $h(x)=f(x)-g(x)$라 할 때,
조건 (나), (다)에서
함수 $h(x)$의 그래프는 점 $(-3, 0)$을 지나고
$x=a(a\neq -3)$에서 x축과 접한다.
따라서

$h(x)=(x+3)(x-a)^2$

$f(0)=27$, $g(0)=0$이므로

$h(0)=f(0)-g(0)$

$3a^2=27$, $a=3$ ($\because a\neq -3$)

$\therefore h(x)=f(x)-g(x)=(x+3)(x-3)^2$

$=x^3-3x^2-9x+27$

$h'(x)=f'(x)-g'(x)=3x^2-6x-9$

$f'(0)=0$이므로

$f'(0)-g'(0)=-9$

$\therefore g'(0)=9$

$y=g(x)$는 원점을 지나는 직선이므로 $g(x)=9x$

$f(x)-g(x)=x^3-3x^2-9x+27$에서

$f(x)=x^3-3x^2+27$

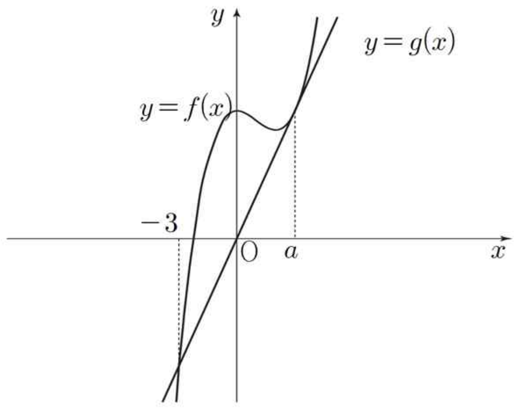
$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	27	↘	23	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값 23을 갖는다.

[참고]



9) [정답] **65**

[해설]

$f'(x)=3x^2-6x+6$ 이므로

$4(3x^2-6x+6)+12x-18=f'(g(x))$

$12x^2-12x+6=3\{g(x)\}^2-6g(x)+6$

$\{g(x)\}^2-2g(x)=4x^2-4x$

$\{g(x)\}^2-4x^2-2g(x)+4x=0$

$(g(x)-2x)(g(x)+2x)-2(g(x)-2x)=0$

$(g(x)-2x)(g(x)+2x-2)=0$

따라서,

$g(x)-2x=0$ 또는 $g(x)+2x-2=0$

(i) $g(x)-2x=0$일 때,

즉 $g(x)=2x$ 이면 $f(2x)=x$ 이므로

$8x^3-12x^2+12x+k=x$

$k=-8x^3+12x^2-11x$ ...... ㉠

따라서, $h_1(x)=-8x^3+12x^2-11x$ 라 하면

$h_1{}'(x)=-24x^2+24x-11<0$

이므로 닫힌 구간 $[0,\ 1]$ 에서 $-7\le h_1(x)\le 0$

즉, 방정식 ㉠이 닫힌 구간 $[0,\ 1]$ 에서 실근이 존재하기

위해서는 $-7\le k\le 0$

(ii) $g(x)+2x-2=0$ 일 때,

즉 $g(x)=-2x+2$ 이면 $f(-2x+2)=x$ 이므로

$(-2x+2)^3-3(-2x+2)^2+6(-2x+2)+k=x$

$-8x^3+12x^2-13x+8+k=0$

$k=8x^3-12x^2+13x-8$ ...... ㉡

따라서 $h_2(x)=8x^3-12x^2+13x-8$ 라 하면

$h_2{}'(x)=24x^2-24x+13>0$

이므로 닫힌 구간 $[0,\ 1]$ 에서

$-8\le h_2(x)\le 1$

즉, 방정식 ㉡이 닫힌 구간 $[0,\ 1]$ 에서 실근이 존재하기

위해서는 $-8\le k\le 1$

(i), (ii)에 의하여 $-8\le k\le 1$ 이므로 $m=-8,\ M=1$

따라서 $m^2+M^2=(-8)^2+1^2=65$

10) [정답] **137**

[해설]

함수 $g(x)$ 는

$$g(x)=\begin{cases} f(x+1)-1 & (-1\le x<0) \\ f(x) & (0\le x<1) \\ f(x-1)+1 & (1\le x<2) \\ \quad\vdots & \\ f(x-4)+4 & (4\le x<5) \end{cases}$$

이다. 함수 $g(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$g(1)=\lim\limits_{x\to1-}g(x)$

$g(1)=f(0)+1$ 이고

$\lim\limits_{x\to1-}g(x)=\lim\limits_{x\to1-}f(x)=f(1)=1$이므로

$f(0)+1=1$에서 $f(0)=0$ ...... ㉠

함수 $g(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하므로

$\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}$ 이다.

$\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{f(x-1)+1-g(1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{f(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{f(x)}{x}=f'(0)$

이고

$\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=1$

이므로

$f'(0)=1$ ...... ㉡

$f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1 인 사차함수이므로

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ 라 하자.

㉠, ㉡에 의하여

$c=1,\ d=0$

조건 (나)에 의하여

$f(1)=1+a+b+1=1$ …… ㉢

$f'(1)=4+3a+2b+1=1$ …… ㉣

㉢, ㉣에 의하여

$a=-2,\ b=1$

$f(x)=x^4-2x^3+x^2+x$

$$\int_0^4 g(x)dx = \int_0^1 g(x)dx + \int_1^2 g(x)dx$$

$$+\int_2^3 g(x)dx + \int_3^4 g(x)dx$$

$$=\frac{8}{15}+\left(\frac{8}{15}+1\right)+\left(\frac{8}{15}+2\right)+\left(\frac{8}{15}+3\right)$$

$$=\frac{122}{15}$$

그러므로 $p=15,\ q=122$

따라서 $p+q=137$

11) [정답] ②

[해설]

합성함수 $g\circ f$가 실수 전체의 집합에서 정의된 역함수를 가지려면

$g(-3)=1,\ g(3)=-1$

이므로

$f(-1)=1,\ \lim_{x\to 1-} f(x)=-1$

$\lim_{x\to -1-} f(x)=-3,\ f(1)=3$

이어야 한다.

$f(-1)=-b=1$에서 $b=-1$

$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-} bx=b=-1$

$\lim_{x\to -1-} f(x)=\lim_{x\to -1-}(x+a)=-1+a=-3$에서

$f(1)=1+c=3$에서

$a=-2,\ c=2$

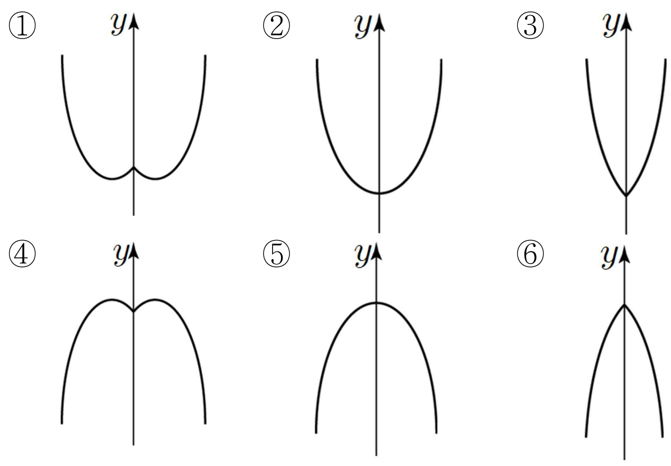
따라서

$a+b+2c=-2+(-1)+2\times2=1$

12) [정답] 60

[해설]

함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $x\ge 0$인 부분에서의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동시킨 그래프이므로 다음과 같은 6가지 경우의 그래프의 개형을 갖는다.

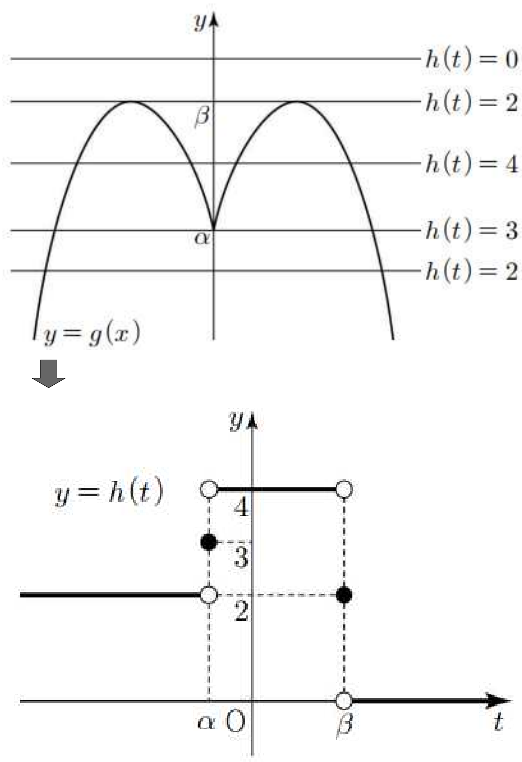


함수 $h(t)$가 조건 (가)의 $h(2)<h(-1)<h(0)$을 만족시키는 경우는 다음의 4가지이다.

$h(2)$	$h(-1)$	$h(0)$
2	3	4
0	3	4
0	2	4
0	2	3

즉, 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 ④의 경우가 유일하다.

$h(t)=3$을 만족시키는 t를 α, $h(t)=2$를 만족시키는 t를 $\beta(\alpha<\beta)$라 하면, 함수 $y=g(x)$의 그래프와 함수 $y=h(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



(단, $-1\le\alpha\le 0,\ 0<\beta\le 2$)

조건 (나)에서 함수 $(t^2-t)h(t)$가 모든 실수 t에서 연속이려면 $t=\alpha$, $t=\beta$에서 연속이어야 한다.

$t=\alpha$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{t\to\alpha+}(t^2-t)h(t)=\lim_{t\to\alpha-}(t^2-t)h(t)$$
$$=(\alpha^2-\alpha)h(\alpha)$$

에서 $\alpha^2-\alpha=0$, 즉 $\alpha=0,\ 1$

또, $t=\beta$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{t\to\beta+}(t^2-t)h(t)=\lim_{t\to\beta-}(t^2-t)h(t)$$
$$=(\beta^2-\beta)h(\beta)$$

에서 $\beta^2-\beta=0$, 즉 $\beta=0,\ 1$

$\alpha=0$, $\beta=1$이므로 함수 $h(t)$는 다음과 같다.

$$h(t)=\begin{cases}0 & (t>1)\\ 2 & (t=1)\\ 4 & (0<t<1)\\ 3 & (t=0)\\ 2 & (t<0)\end{cases}$$

이를 만족시키는 이차함수 $f(x)$는 원점을 지나고 제1사분면에서 최댓값이 1인 위로 볼록한 함수이다.

즉 $f(x)=a(x-b)^2+1\ (a<0,\ b>0)$

$f(0)=0$이므로 $ab^2=-1$

$a=-\dfrac{1}{b^2}$이고 a는 정수이므로 $b^2=1$

즉 $b=1$이므로 $a=-1$

$f(x)=-(x-1)^2+1=-x^2+2x$

따라서 $80f\left(\dfrac{1}{2}\right)=80\times\dfrac{3}{4}=60$

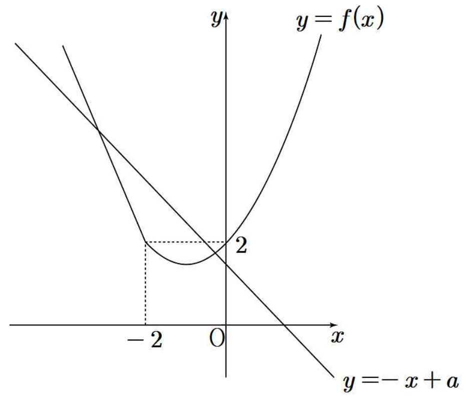
13) [정답] 480

[해설]

$x<-2$일 때 모든 양의 실수 a에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$의 근을 구하면 $-3x-4=-x+a$에서 $x=\dfrac{-a-4}{2}$이다.

$x\geq-2$일 때 방정식 $f(x)=g(x)$의 근은 아래와 같이 세 가지의 경우로 나누어서 구할 수 있다.

(i) $k>0$일 때



$x\geq-2$에서 곡선 $y=kx^2+2kx+2$의 그래프와 직선 $y=-x+a$가 만나는 점의 x좌표는 다음과 같이 구할 수 있다.

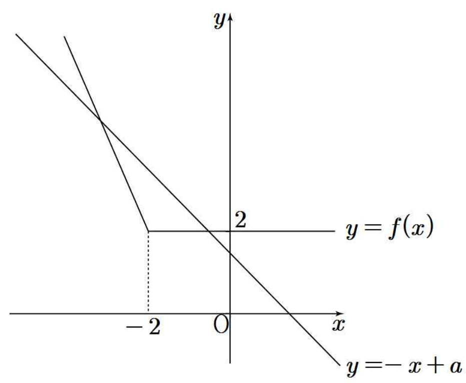
$$kx^2+2kx+2=-x+a$$
$$kx^2+(2k+1)x+2-a=0$$
$$x=\frac{-(2k+1)+\sqrt{(2k+1)^2-4k(2-a)}}{2k}$$
$$x=\frac{-(2k+1)+\sqrt{(2k-1)^2+4ak}}{2k}$$

따라서 모든 양수 a에 대하여

$$h(a)=\frac{-a-4}{2}+\frac{-(2k+1)+\sqrt{4ka+(2k-1)^2}}{2k}$$

이고 두 연속함수의 합은 연속이므로 함수 $h(a)$는 연속이다.

(ii) $k=0$일 때



$x\geq-2$에서 직선 $y=2$의 그래프와 직선 $y=-x+a$가 만나는 점의 x좌표는 $-x+a=2$에서 $x=a-2$이다.

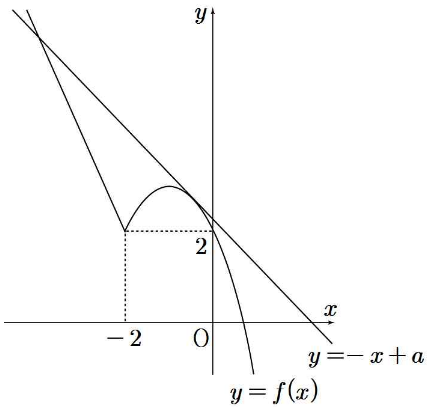
따라서 모든 양의 실수 a에 대하여

$$h(a)=\frac{-a-4}{2}+(a-2)=\frac{a}{2}-4$$

이고 함수 $h(a)$는 연속이다.

(iii) $k<0$일 때

그림과 같이 $x>-2$인 부분에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+a$가 접할 때 판별식을 이용하여 a의 값을 k에 관하여 나타내면 다음과 같다.



$kx^2+2kx+2=-x+a$

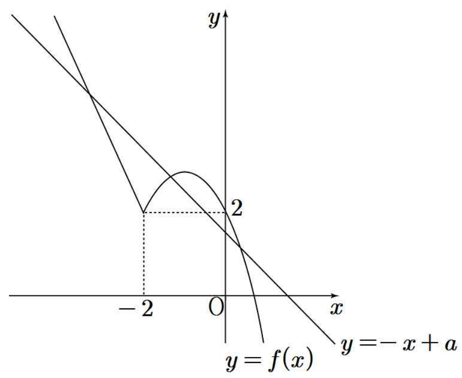
$kx^2+(2k+1)x+2-a=0$ $\cdots\cdots(*)$

$D=(2k+1)^2-4k(2-a)=0$에서

$a=2-\dfrac{(2k+1)^2}{4k}=1-k-\dfrac{1}{4k}$

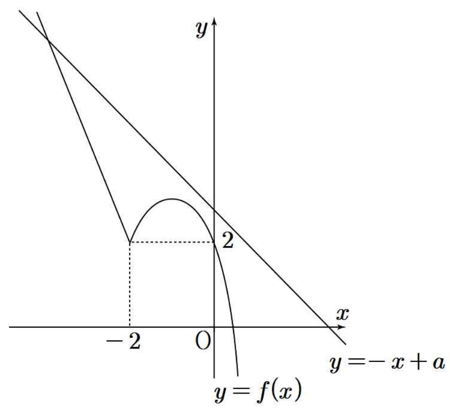
따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+a$의 위치 관계는 다음 그림과 같다.

① $0<a\le 1-k-\dfrac{1}{4k}$일 때



$x\ge -2$에서 방정식 $f(x)=g(x)$는 실근을 갖고 $(*)$에서 두 실근의 합은 $-\dfrac{2k+1}{k}$이다.

② $a>1-k-\dfrac{1}{4k}$일 때



$x\ge -2$에서 방정식 $f(x)=g(x)$는 실근을 갖지 않는다.

①, ②에 의해 양의 실수 a에 대하여 $h(a)$는 다음과 같다.

$$h(a)=\begin{cases}\dfrac{-a-4}{2}-\dfrac{2k+1}{k} & \left(0<a\le 1-k-\dfrac{1}{4k}\right)\\[2mm] \dfrac{-a-4}{2} & \left(a>1-k-\dfrac{1}{4k}\right)\end{cases}$$

$h(a)$가 모든 양의 실수 a에 대하여 연속이기 위해서는 함숫값과 극한값이 같아야 하므로 $\dfrac{2k+1}{k}=0$에서

$k=-\dfrac{1}{2}$

(i), (ii), (iii)에 의해 모든 양의 실수 a에 대하여 $h(a)$가 항상 연속이 되도록 하는 상수 k의 값의 범위는

$k=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $k\ge 0$

이다. 따라서 최솟값은 $k=-\dfrac{1}{2}$이므로 $p^2=\dfrac{1}{4}$이다.

그러므로 $120\times\dfrac{1}{p^2}=120\times 4=480$이다.

14) [정답] 243

[해설]

조건 (가)에 의하여 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프와 이차함수 $y=g(x)$의 그래프는 $x=\alpha$인 점에서 만나고 그 점에서 접선의 기울기가 같으므로

방정식 $f(x)-g(x)=0$은 $x=\alpha$를 중근으로 갖는다.

따라서 또 다른 한 근을 γ라 하면

$f(x)-g(x)=(x-\alpha)^2(x-\gamma)$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변을 미분하면

$f'(x)-g'(x)=2(x-\alpha)(x-\gamma)+(x-\alpha)^2$

따라서 조건 (나)에 의하여

$f'(\beta)-g'(\beta)=2(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)+(\beta-\alpha)^2=0$

$\alpha\ne\beta$이므로

$2(\beta-\gamma)+\beta-\alpha=0$

$\gamma=\dfrac{3\beta-\alpha}{2}$

즉, ㉠에 대입하면

$f(x)-g(x)=(x-\alpha)^2\left(x-\dfrac{3\beta-\alpha}{2}\right)$ $\cdots\cdots$ ㉡

또한, 이차함수 $y=g(x)$의 그래프의 대칭축은 $g'(\alpha)=-16$, $g'(\beta)=16$에서 $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$이므로

$g(x)=2\left(x-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2+k$ (k는 상수)

라 놓으면

$g'(x)=4\left(x-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$

따라서

$$g'(\alpha)=4\left(\alpha-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=4\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=2(\alpha-\beta)=-16$$

에서 $\alpha-\beta=-8$이다.

㉡에 $\beta+1$을 대입하면

$$f(\beta+1)-g(\beta+1)=(\beta+1-\alpha)^2\left(\beta+1-\frac{3\beta-\alpha}{2}\right)$$
$$=(\alpha-\beta-1)^2\left(\frac{\alpha-\beta+2}{2}\right)$$
$$=(-8-1)^2\left(\frac{-8+2}{2}\right)$$
$$=81\times(-3)=-243$$

따라서 $g(\beta+1)-f(\beta+1)=243$이다.

15) [정답] 64

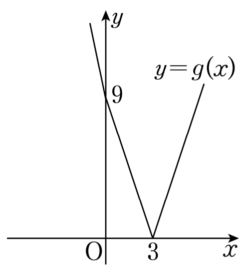
[해설]

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이면

$\lim\limits_{x\to0+}g(x)=9,\ \lim\limits_{x\to0-}g(x)=\frac{3}{2}|3k-9|$ 이므로

$9=\frac{3}{2}|3k-9|\ |k-3|=2k=1$ 또는 $k=5$

(ⅰ) $k=1$인 경우



함수 $g(x)h(x)$가 $x=3$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to3+}\frac{g(x)h(x)-g(3)h(3)}{x-3}=\lim_{x\to3+}\frac{(3x-9)h(x)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3+}3h(x)=3h(3)$$
$$\lim_{x\to3-}\frac{g(x)h(x)-g(3)h(3)}{x-3}=\lim_{x\to3-}\frac{(9-3x)h(x)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3-}\{-3h(x)\}=-3h(3)$$

$3h(3)=-3h(3)$ 이므로 $h(3)=0$ …… ㉠

함수 $g(x)h(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to0+}\frac{g(x)h(x)-g(0)h(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{(9-3x)h(x)-9h(0)}{x}$$
$$=9h'(0)-3h(0)$$

$$\lim_{x\to0-}\frac{g(x)h(x)-g(0)h(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{\frac{3}{2}(6-3x)h(x)-9h(0)}{x}$$
$$=9h'(0)-\frac{9}{2}h(0)$$

$9h'(0)-3h(0)=9h'(0)-\frac{9}{2}h(0),\ h(0)=0$…… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $h(x)=x(x-3)(x+\alpha)$

(단, α는 상수)이고, 조건 (나)에 의해

$h'(3)=27+6(\alpha-3)-3\alpha=15$,

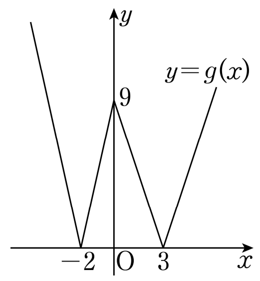
$3\alpha=6$,

$\alpha=2$

$h(x)=x(x-3)(x+2)=x^3-x^2-6x$

그러므로 $k=1$일 때 $h(1)=-6$

(ⅱ) $k=5$인 경우



(ⅰ)과 같은 방법으로

$h(3)=h(0)=h(-2)=0$이고

$h(x)=x^3-x^2-6x$

그러므로 $k=5$일 때 $h(5)=70$

(ⅲ) $k\neq1,\ k\neq5$인 경우

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이 아니고

함수 $g(x)h(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to0-}g(x)h(x)=g(0)h(0)$

$\frac{3}{2}|3k-9|\times h(0)=9h(0)h(0)=0$ …… ㉢

함수 $g(x)h(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to0-}\frac{g(x)h(x)-g(0)h(0)}{x-0}=\frac{3}{2}|3k-9|\times h'(0)$$
$$\lim_{x\to0+}\frac{g(x)h(x)-g(0)h(0)}{x-0}=9h'(0)$$

$\frac{3}{2}|3k-9|\times h'(0)=9h'(0)$이므로 $h'(0)=0$ …… ㉣

함수 $g(x)h(x)$가 $x=3$에서 미분가능하므로

㉠과 같은 방법으로 $h(3)=0$ …… ㉤

㉢, ㉣, ㉤에 의하여 $h(x)$는 x^2과 $x-3$을 인수로

가지므로 $h(x)=x^2(x-3)$, $h'(3)=9$

조건 (나)를 만족시키지 않으므로 $h(x)$는 존재하지 않는다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해 모든 $h(k)$의 값의

합은 $(-6)+70=64$

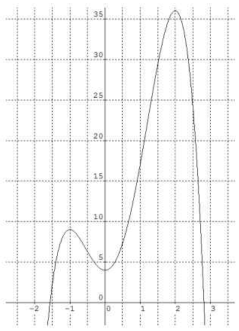
16) [정답] 36

[해설]

$f(x)=-3x^4+4x^3+12x+4$에서

$f'(x)=-12x^3+12x^2+12=-12x(x+1)(x-2)$

도함수의 부호와 함수의 증감으로부터 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



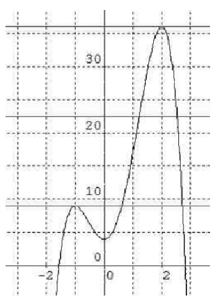
이제 $g(x)=|f(x)-a|$, $y=f(x)$의 그래프를 $y=a$에서 접어 올린다음 $y=a$를 x축으로 본 그래프와 같다.

이때 $y=a$와 $y=f(x)$의 교점이 $y=f(x)$의 극점이 아니면 접힌 점은 모두 꺾이게 되어 미분가능하지 않다.

마찬가지로, $y=g(x)$에서 $y=b$에서 접어 올린다음 $y=b$를 x축으로 본 그래프가 $y=|g(x)-b|$인데, 것은 $y=f(x)$의 그래프를 $y=a$, $y=a+b$, $y=a-b$라는 3곳에서 접은 것과 같다. 따라서 (가)에서 $y=a+b$, $y=a-b$와 $y=f(x)$는 교점이 4개이고, (나)에서 $y=a$, $y=a+b$, $y=a-b$와 $y=f(x)$의 교점 중 4곳만 꺾어져서 미분가능하지 않은 점이라야 하고, 다른 점은 $y=f(x)$의 극점이다.

위의 결과를 다 만족하는 경우는 다음과 같은 두 가지이다.

ㄱ.



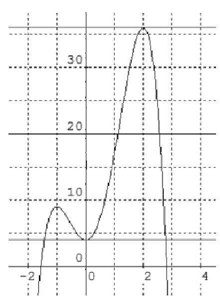
$a+b=36$, $a-b=9$

$a=\dfrac{45}{2}$ ($\neq$자연수)

$b=\dfrac{27}{2}$

$\therefore$ 성립안함

ㄴ.



$a+b=36$, $a-b=4$

$a=20$ (자연수)

$b=16$

$\therefore$ 성립함

ㄴ에서 $a+b=36$

17) [정답] ②

[해설]

ㄱ. $\displaystyle\lim_{x\to1-}\frac{g(x)}{x-1}=\lim_{x\to1-}(x-1)f(x)=0$

ㄴ. $n=1$이면 $f(x)=x^2+1$이므로

$$g(x)=\begin{cases}(x-1)(x^2+1) & (x\geq1)\\(x-1)^2(x^2+1) & (x<1)\end{cases}$$

인데, $g(x)\geq0=g(1)$이므로 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

ㄷ. $x>1$에서는 $g(x)=(x-1)\left(x^2+\dfrac{1}{n}\right)$은 증가함수이므로 극점은 없다.

$x<1$일 때는 $g(x)=(x-1)^2\left(x^2+\dfrac{1}{n}\right)$에서

$$g'(x)=2(x-1)\left(x^2+\frac{1}{n}\right)+2x(x-1)^2$$
$$=2(x-1)\left(2x^2-x+\frac{1}{n}\right)$$

$x<1$인 모든 x에 대하여 $2x^2-x+\dfrac{1}{n}\geq0$이면 극점은 없다.

$$2x^2-x+\frac{1}{n}=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{n}-\frac{1}{8}\geq0$$

따라서 $n\leq8$이므로, 함수 $g(x)$의 극점이 $x=1$일 때 한 개뿐인 경우 자연수 n의 개수는 8이다.

18) [정답] 8

[해설]

$f(x)$에서 x의 값이 1에서 $t(t>1)$까지 변할 때의 평균변화율 $g(t)$는 $g(t)=\dfrac{f(t)-f(1)}{t-1}$

함수 $g(t)$가 $t=2$에서 극댓값 0을 가지므로 $f(1)=f(2)$이고, 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값을 갖는다.

그러므로 함수 $f(x)$는

$f(x)=k(x-1)(x-2)^2(x-\alpha)+f(1)$ (단, $k>0$, $\alpha>2$)

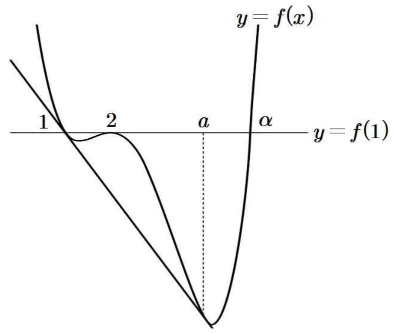
이고, 함수 $g(t)$는 $g(t)=k(t-2)^2(t-\alpha)$이다.

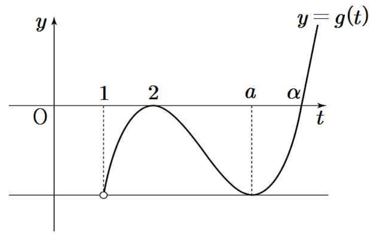
또한, 함수 $g(t)$의 최솟값이 존재하기 위해서는

$\displaystyle\lim_{t\to1+}g(t)\geq g(p)$를 만족시키는 p $(p>2)$가 존재해야 한다.

따라서 $\displaystyle\lim_{t\to1+}g(t)=g(p)$를 만족시키는 p를 a라 하면 $p=a$일 때, 방정식 $f(x)=f(1)$의 실근의 합은 최소가 된다. …… ㉠

두 함수 $f(x)$와 $g(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.





함수 $g(t)=k(t-2)^2(t-\alpha)$에 대하여

$g'(t)=2k(t-2)(t-\alpha)+k(t-2)^2$
$=k(t-2)\{3t-(2\alpha+2)\}$

$g'(t)=0$에서 $t=2,\ \dfrac{2\alpha+2}{3}$

따라서 함수 $g(t)$는 $t=\dfrac{2\alpha+2}{3}$에서 극소이며 $a=\dfrac{2\alpha+2}{3}$

㉠에 의하여

$$\lim_{t\to 1+} g(t)=g\left(\frac{2\alpha+2}{3}\right)$$

$$k(1-\alpha)=k\left(\frac{2\alpha+2}{3}-2\right)^2\left(\frac{2\alpha+2}{3}-\alpha\right),$$

$27(1-\alpha)=-4(\alpha-2)^3$

$4\alpha^3-24\alpha^2+21\alpha-5=0,$

$(\alpha-5)(4\alpha^2-4\alpha+1)=0$

$\therefore \alpha=5\ (\because \alpha>2)$

방정식 $f(x)=f(1)$의 서로 다른 실근의 합이 최소일 때,

$f(x)=k(x-1)(x-2)^2(x-5)+f(1)$

따라서 서로 다른 실근의 합의 최솟값은

$1+2+5=8$

19) [정답] ⑤

[해설]

$f(0)=0$이고 $f'(x)=\dfrac{1}{3}(x-1)(x-3)$이므로

$f(x)=\dfrac{1}{9}x(x-3)^2$

$x\le k$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 기울기가 1인 직선의 일부이다.

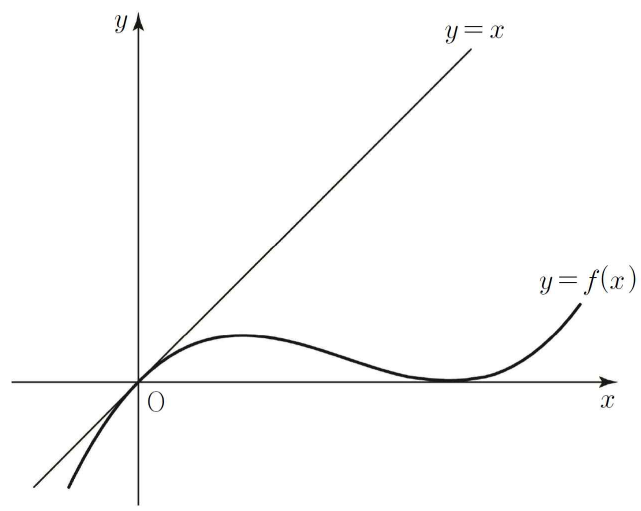
그러므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(k, f(k))$에서의 접선의 기울기가 1이 되는 k의 값을 찾으면

$f'(k)=\dfrac{1}{3}(k-1)(k-3)=1$

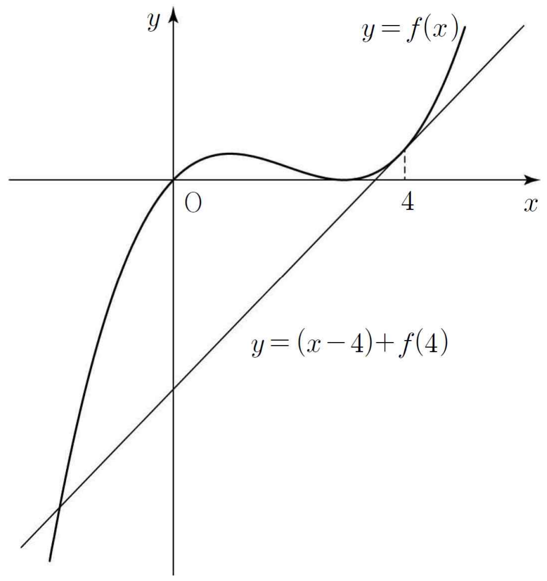
$k(k-4)=0$

$k=0$ 또는 $k=4$

(ⅰ) $k=0$일 때
$f(0)=0$이므로 $x\le 0$에서 함수
$g(x)=x+f(0)=x$이고 $f'(0)=1$이므로
$x=0$에서 곡선 $y=f(x)$에 직선 $y=x$가 접한다.
$\dfrac{1}{9}x(x-3)^2=x,\ x(x-3)^2=9x$
$x=0$ 또는 $x=6$ …… ㉠
그러므로 $x\le 0$에서
두 함수 $y=f(x),\ y=g(x)$의 그래프가
만나는 서로 다른 점의 개수는 $h(0)=1$이다.



(ⅱ) $k=4$일 때
$x\le 4$에서 함수 $g(x)=(x-4)+f(4)$이고, $f'(4)=1$이므로
$x=4$에서 곡선 $y=f(x)$에 직선 $y=(x-4)+f(4)$가 접한다.
그러므로 $x\le 4$에서 두 함수 $y=f(x),\ y=g(x)$의 그래프가
만나는 서로 다른 점의 개수는 $h(4)=2$이다.

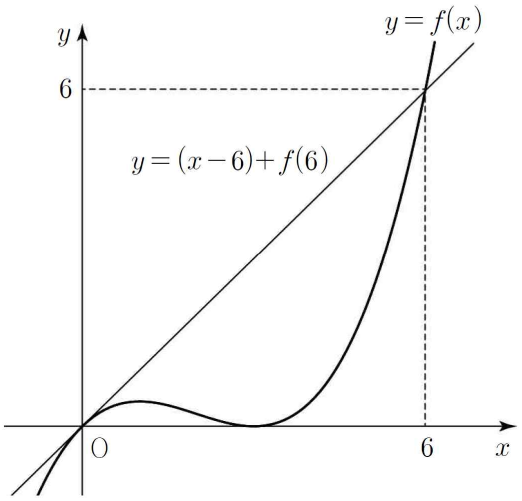


(iii) $k=6$ 일 때

㉠에서 $f(6)=6$ 이므로 $x \le 6$ 에서

함수 $g(x)=(x-6)+f(6)=x$ 이다.

그러므로 $x \le 6$ 에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 서로 다른 점의 개수는 $h(6)=2$ 이다.



(i), (ii), (iii)에 의하여

$0<k \le 4$ 일 때, $h(k)=2$

$4<k<6$ 일 때, $h(k)=3$

$k=6$ 일 때, $h(k)=2$

$k>6$ 일 때, $h(k)=1$

따라서 $\sum_{k=1}^{7} h(k)=14$

20) [정답] 9

[해설]

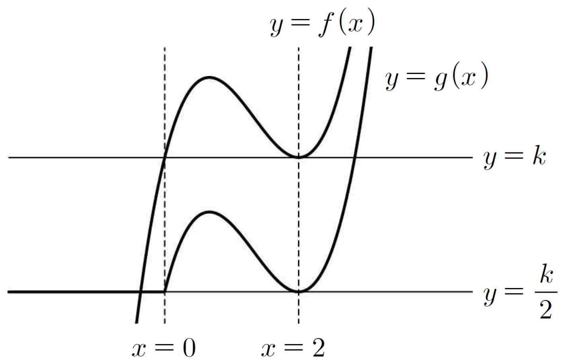
(i) $f(x)<k$ 일 때, 함수 $g(x)=\frac{k}{2}$

(ii) $f(x) \ge k$ 일 때,

함수 $g(x)=f(x)-\frac{k}{2}$ 이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 $-\frac{k}{2}$ 만큼 평행이동시킨 그래프이다.

(가), (나)에 의하여

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프와 두 직선 $y=k$, $y=\frac{k}{2}$ 의 개형은 다음과 같다.



$$\int_0^2 |f(x)-g(x)|\,dx=\int_0^2 \frac{k}{2}dx=8$$

이므로 $k=8$

그러므로 세 상수 a, b, c에 대하여 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$ 이다.

$f(0)=8$, $f(2)=8$, $f'(2)=0$ 이므로

$c=8$, $4a+2b+c=0$, $12+4a+b=0$ 이고

$a=-4$, $b=4$

함수 $f(x)=x^3-4x^2+4x+8$ 이므로

함수 $g(x)=\begin{cases} 4 & (x<0) \\ x^3-4x^2+4x+4 & (x \ge 0) \end{cases}$

따라서 $g(1)+g(-1)=5+4=9$

21) [정답] 200

[해설]

$f(x-a)=\begin{cases} 0 & (x \le a) \\ x-a & (x>a) \end{cases}$

$f(x-b)=\begin{cases} 0 & (x \le b) \\ x-b & (x>b) \end{cases}$

$$f(x-2)=\begin{cases} 0 & (x \le 2) \\ x-2 & (x>2) \end{cases}$$

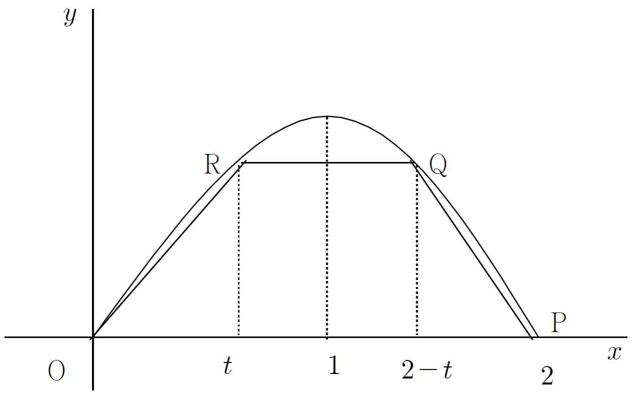
이므로 $0 \le x \le 2$에서

$$h(x)=\begin{cases} kx & (0 \le x \le a) \\ ak & (a<x \le b) \\ k(-x+a+b) & (b<x \le 2) \end{cases}$$

따라서 모든 실수 x에 대하여

$0 \le h(x) \le g(x)$이고

$\int_0^2 \{g(x)-h(x)\}dx$의 값이 최소가 되기 위해서는 두 함수 $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프가 그림과 같아야 한다.



따라서, $\mathrm{R}(t,\ t(2-t))$ (단, $0<t<1$)이라 하면

$\mathrm{Q}(2-t,\ t(2-t))$이고

사다리꼴 OPQR의 넓이 $S(t)$가 최대가 되어야 하므로

$S(t)=\frac{1}{2}\times\{2+(2-2t)\}\times t(2-t)$

$=t^3-4t^2+4t$

$S'(t)=3t^2-8t+4=(3t-2)(t-2)$

따라서 $S(t)$는 $t=\frac{2}{3}$에서 극대이면서 최댓값을 가지고 그때

$\int_0^2 \{g(x)-h(x)\}dx$의 값은 최솟값을 가지므로

$$k=\frac{\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{4}{3},\ a=\frac{2}{3},\ b=\frac{4}{3}$$

따라서

$$60(k+a+b)=60\times\frac{10}{3}=200$$

22) [정답] 73

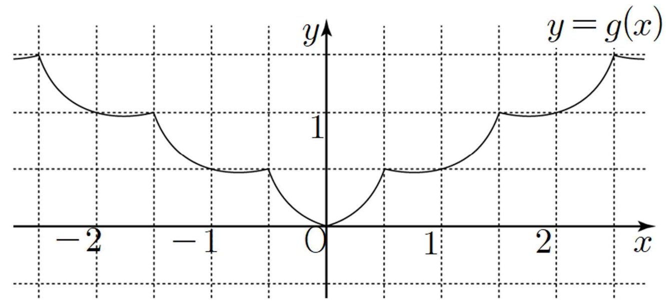
[해설]

조건 (나)에 의해 $n-\frac{1}{2} \le x < n+\frac{1}{2}$ 일 때,

함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 n만큼, y축의 방향으로 $\frac{n}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

또한 조건 (다)에 의해 함수 $y=g(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.

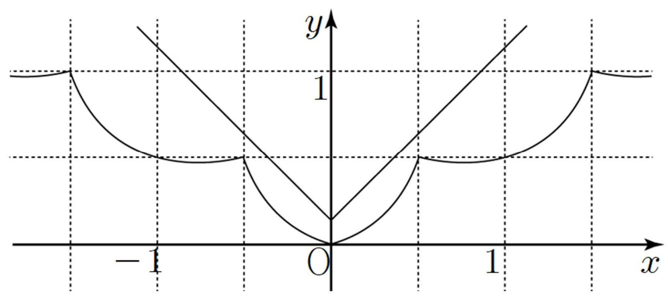


함수 $y=|x|-t$의 그래프는 함수 $y=|x|$의 그래프를 y축의 방향으로 $-t$만큼 평행이동한 것이다.

실수 t가 변함에 따라 함수 $y=g(x)$의 그래프와 함수 $y=|x|-t$의 그래프의 교점의 개수는 다음과 같다.

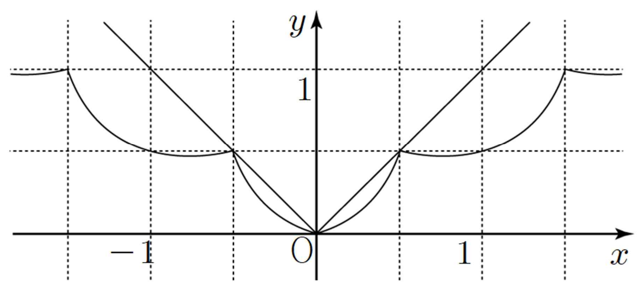
① $t<0$일 때

함수 $y=g(x)$의 그래프와 함수 $y=|x|-t$의 그래프가 만나는 점의 개수는 0이므로 $h(t)=0$이다.



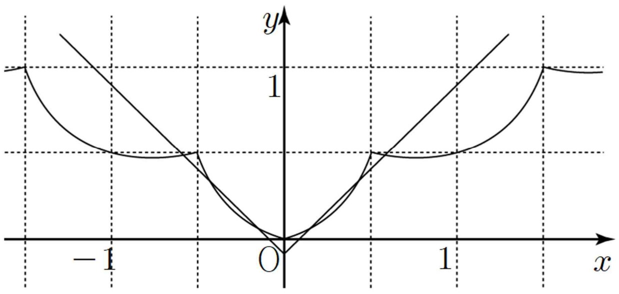
② $t=0$일 때

함수 $y=g(x)$의 그래프와 함수 $y=|x|-t$의 그래프가 만나는 점의 개수는 3이므로 $h(t)=3$이다.



③ $0<t<\frac{1}{16}$일 때

함수 $y=g(x)$의 그래프와 함수 $y=|x|-t$의 그래프가 만나는 점의 개수는 6이므로 $h(t)=6$이다.

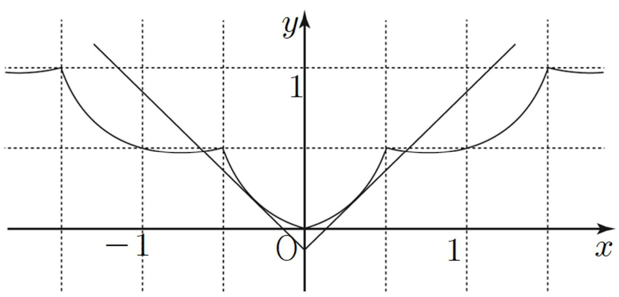


④ $t=\frac{1}{16}$ 일 때

함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 함수 $y=|x|-t$ 의 그래프가 접하는 가장 작은 t 의 값은 방정식 $x^2+\frac{1}{2}x=x-t$ 가 중근을 가질 때의 t 의 값이다.

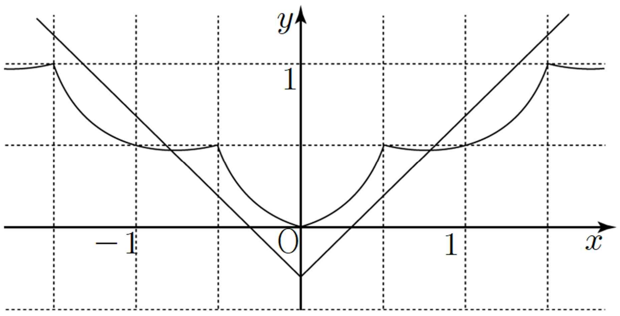
따라서 $t=\frac{1}{16}$ 이다.

이때 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 함수 $y=|x|-t$ 의 그래프가 만나는 점의 개수는 4이므로 $h(t)=4$ 이다.



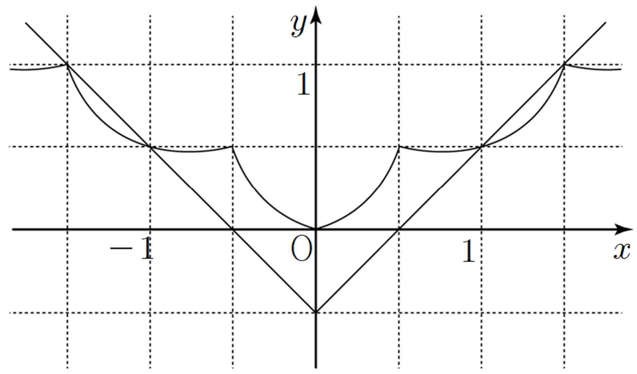
⑤ $\frac{1}{16}<t<\frac{1}{2}$ 일 때

함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 함수 $y=|x|-t$ 의 그래프가 만나는 점의 개수는 2이므로 $h(t)=2$ 이다.



⑥ $t=\frac{1}{2}$ 일 때

함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 함수 $y=|x|-t$ 의 그래프가 만나는 점의 개수는 4이므로 $h(t)=4$ 이다.



따라서 함수 $h(t)$ 가 $t=0,\ \frac{1}{16}$ 에서 불연속이므로

$\alpha_1=0,\ \alpha_2=\frac{1}{16}$

이다. 이때 $x\geq 0$ 에서 $y=|x|-t$ 의 방정식은 각각

$y=x,\ y=x-\frac{1}{16}$

이고, x 축의 방향으로 n 만큼, y 축의 방향으로 $\frac{n}{2}$ 만큼 평행이동 하면 방정식은 각각 다음과 같다.

$y=(x-n)+\frac{n}{2}=x-\frac{1}{2}n,$

$y=(x-n)-\frac{1}{16}+\frac{n}{2}=x-\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{2}n\right)$

그러므로 함수 $h(t)$ 가 $t=\alpha$ 에서 불연속인 α 의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열하면 다음과 같다.

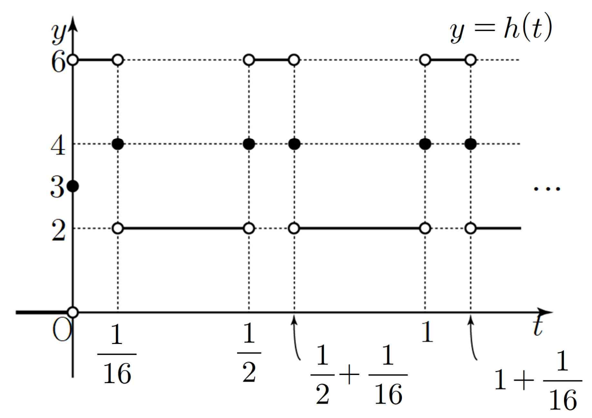
$0,\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{2},\ \left(\frac{1}{16}+\frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right),\ \cdots$

따라서 $\alpha_{2n}=\frac{1}{16}+\frac{1}{2}(n-1)$

이므로 $16\alpha_{20}=16\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{2}\times 9\right)=73$ 이다.

[참고]

함수 $y=h(t)$ 의 그래프는 다음과 같다.

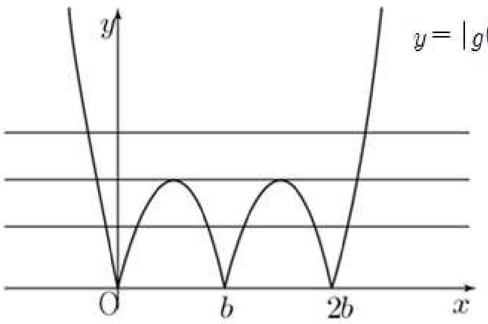


23) [정답] 219

[해설]

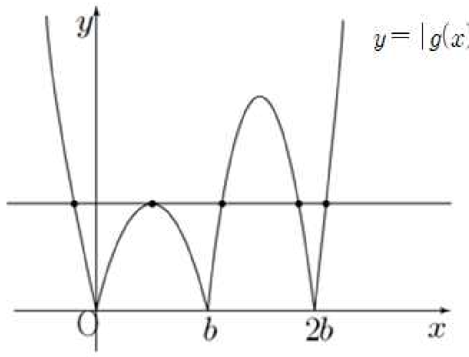
(ⅰ) $k=1$일 때

방정식 $|g(x)|=b$의 서로 다른 실근의 개수는 $2, 4, 6$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.



(ⅱ) $k>1$일 때

방정식 $|g(x)|=b$의 서로 다른 실근의 개수는 직선 $y=b$가 함수 $y=|g(x)|\ (x<b)$의 그래프에 접할 때 5이다.



$\left|g\left(\frac{b}{2}\right)\right|=b$이므로 $-f\left(\frac{b}{2}\right)=b$에서 $ab=4$이다.

a, b는 자연수이므로 가능한 순서쌍 (a, b)는 $(1, 4)$, $(2, 2)$, $(4, 1)$이고 $b\le 4$이다.

조건 (가)에서

$g(6)=kf(6-b)=ka(6-b)(6-2b)=-8$

$ka(6-b)(3-b)=-4$ ⋯⋯ ㉠

$3-b<0$이므로 만족시키는 자연수 b는 4이다.

그러므로 $a=1$이고 ㉠에서 $k=2$이다.

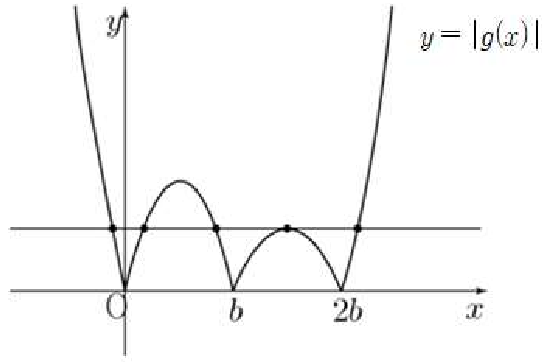
따라서

$$g(x)=\begin{cases} x(x-4) & (x<4) \\ 2(x-4)(x-8) & (x\ge 4) \end{cases}$$

이다.

(ⅲ) $k<1$일 때

방정식 $|g(x)|=b$의 서로 다른 실근의 개수는 직선 $y=b$가 함수 $y=|g(x)|\ (x\ge b)$의 그래프에 접할 때 5이다.



$\left|g\left(\frac{3}{2}b\right)\right|=b$이므로

$-kf\left(\frac{3b}{2}-b\right)=b$, $kab=4$

이다. 조건 (가)에서

① $b>6$일 때

$g(6)=f(6)=6a(6-b)=-8$, $3a(b-6)=4$

이다. 이 식의 좌변은 3의 배수이지만 우변은 3의 배수가 아니다. 따라서 만족하는 두 자연수 a, b는 존재하지 않는다.

② $b\le 6$일 때

$g(6)=kf(6-b)=ka(6-b)(6-2b)=-8$,

$ka(6-b)(3-b)=-4$ ⋯⋯ ㉡

이다. 이 식의 좌변에서 $k>0$, $a>0$, $6-b\ge 0$이므로 $3-b<0$이어야 한다.

가능한 자연수 b는 4 또는 5이다.

$b=4$, 5를 ㉡에 각각 대입하면 $ka=2$이다.

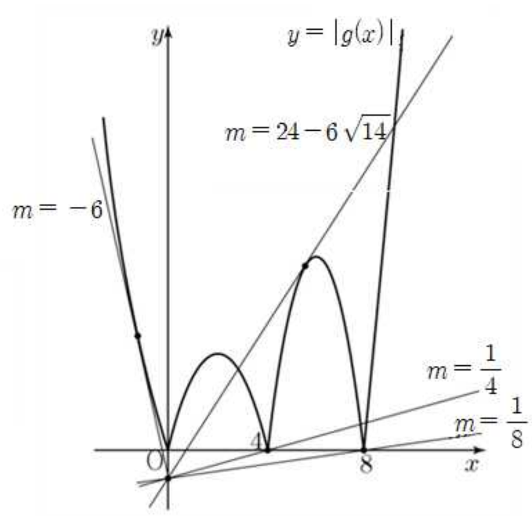
그런데 $kab=4$이므로 $b=2$이다. 이는 모순이다.

따라서 주어진 조건을 만족하는 두 자연수 a, b는 존재하지 않는다.

(ⅰ)~(ⅲ)으로부터

$$g(x)=\begin{cases} x(x-4) & (x<4) \\ 2(x-4)(x-8) & (x\ge 4) \end{cases}$$

이다.



직선 $y=mx-1$이 $(4, 0)$을 지날 때 m의 값을 m_1이라고

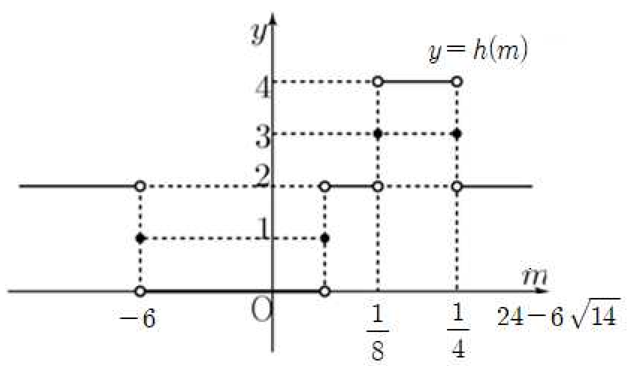
하자.

m_1은 직선 $y=mx-1$이 점 $(4,\ 0)$을 지날 때의 기울기이므로 $m_1=\dfrac{1}{4}$이다.

이차함수 $y=-2(x-4)(x-8)$의 그래프에 접할 때 m의 값을 m_2라 하자.

m_2는 직선 $y=mx-1$이 함수

$y=-2(x-4)(x-8)$의 그래프에 접할 때이므로
이차방정식 $-2(x-4)(x-8)=mx-1$의
판별식$(D=0)$을 이용하여 구하면 $m_2=24-6\sqrt{14}$이다.



위 그림에서 $\lim\limits_{m\to t-}h(m)+\lim\limits_{m\to t+}h(m)=6$을 만족시키는

모든 실수 t의 값은 $\dfrac{1}{4},\ 24-6\sqrt{14}$이므로

$\dfrac{1}{4}+\left(24-6\sqrt{14}\right)=\dfrac{97}{4}-6\sqrt{14}$에서

$p=\dfrac{97}{4},\ q=-6$이다.

따라서 $12(p+q)=12\left(\dfrac{97}{4}-6\right)=219$이다.

24) [정답] 19

[해설]

$f(x)=\dfrac{-ax-b+1}{ax+b}=\dfrac{1}{ax+b}-1$

함수 $y=g(x)$의 그래프는 $f(x)<k$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하고 y축의 방향으로 $2k$만큼 평행이동한 그래프이고, $f(x)\geq k$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 같다.

$g(x)=\begin{cases}2k-f(x) & (f(x)<k)\\ f(x) & (f(x)\geq k)\end{cases}$이므로

$\lim\limits_{x\to\infty}|g(x)|=\lim\limits_{x\to\infty}|f(x)|$ 또는 $\lim\limits_{x\to\infty}|g(x)|=\lim\limits_{x\to\infty}|2k-f(x)|$

이다.

(가)에서 $\lim\limits_{x\to\infty}|g(x)|=\dfrac{1}{2}$이므로

$\lim\limits_{x\to\infty}|g(x)|=\lim\limits_{x\to\infty}|f(x)|=\dfrac{1}{2}$이라 하면

$\lim\limits_{x\to\infty}|g(x)|=\lim\limits_{x\to\infty}\left|\dfrac{1}{ax+b}-1\right|=1\neq\dfrac{1}{2}$이므로 조건에 맞지 않는다.

한편 $\lim\limits_{x\to\infty}|g(x)|=\lim\limits_{x\to\infty}|2k-f(x)|$라 하면

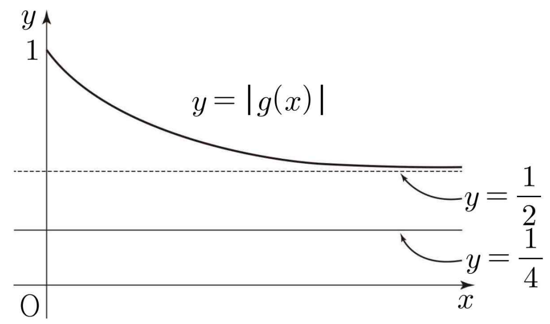
$\lim\limits_{x\to\infty}|g(x)|=\lim\limits_{x\to\infty}\left|2k-\dfrac{1}{ax+b}+1\right|=|2k+1|=\dfrac{1}{2}$

이므로 $k=-\dfrac{1}{4}$ 또는 $k=-\dfrac{3}{4}$이다.

(나)에서 $|g(0)|=1$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 한 점근선 $x=-\dfrac{b}{a}$는 $ab>0$이므로 $-\dfrac{b}{a}<0$이다.

(i) $k=-\dfrac{1}{4},\ a<0$일 때

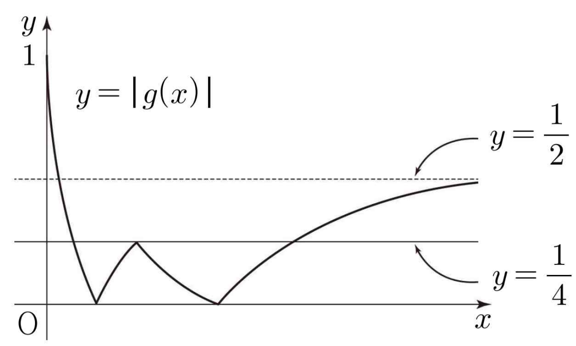
함수 $y=|g(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $y=|g(x)|$의 그래프와 직선 $y=-k$는 만나지 않으므로 조건 (다)에 맞지 않는다.

(ii) $k=-\dfrac{1}{4},\ a>0$ 일 때

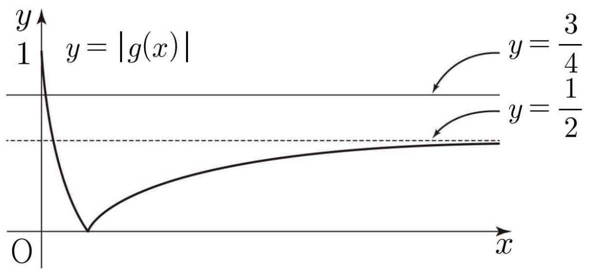
함수 $y=|g(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $y=|g(x)|$의 그래프와 직선 $y=-k$는 서로 다른 세 점에서 만나므로 조건 (다)에 맞지 않는다.

(iii) $k=-\dfrac{3}{4},\ a<0$ 일 때

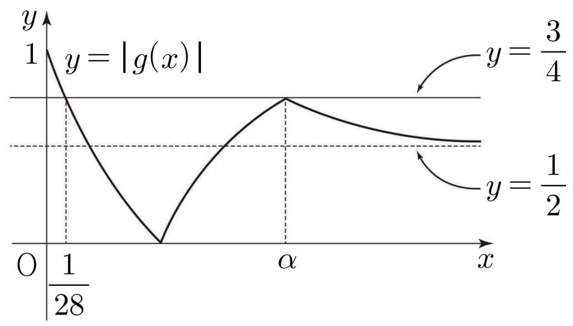
함수 $y=|g(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $y=|g(x)|$의 그래프와 직선 $y=-k$는 한 점에서 만나므로 조건 (다)에 맞지 않는다.

(ⅳ) $k=-\dfrac{3}{4}$, $a>0$ 일 때

함수 $y=|g(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $y=|g(x)|$의 그래프와 직선 $y=-k$는 서로 다른 두 점에서만 만나므로 조건 (다)를 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)에 의하여 $k=-\dfrac{3}{4}$, $a>0$

이때 $|g(0)|=f(0)=1$이므로 $b=\dfrac{1}{2}$이고

$\left|g\left(\dfrac{1}{28}\right)\right|=f\left(\dfrac{1}{28}\right)=-k=\dfrac{3}{4}$에서 $a=2$이다.

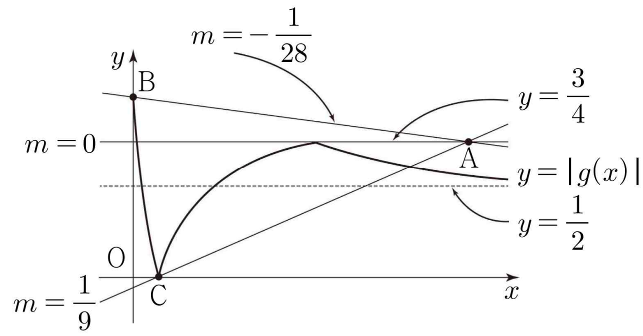
두 함수 $y=|g(x)|$, $y=f(x)$의 그래프의 x절편이 같으므로

$0=\dfrac{1}{2x+\dfrac{1}{2}}-1$에서 $x=\dfrac{1}{4}$이다.

또한 $|g(\alpha)|=\dfrac{3}{4}$에서 $f(\alpha)=-\dfrac{3}{4}$이고 $\alpha=\dfrac{7}{4}$

직선 $y=m(x-4\alpha)+\dfrac{3}{4}$이 지나는 점 $\left(4\alpha,\ \dfrac{3}{4}\right)$

즉, $\left(7,\ \dfrac{3}{4}\right)$을 점 A라 하고 B$(0,\ 1)$, C$\left(\dfrac{1}{4},\ 0\right)$이라 하면 두 직선 AB, AC와 함수 $y=|g(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



두 직선 AB, AC의 기울기는 각각 $-\dfrac{1}{28}$, $\dfrac{1}{9}$이고 함수 $h(m)$은 다음과 같다.

$$h(m)=\begin{cases} 1 & \left(m<-\dfrac{1}{28}\right) \\ 2 & \left(-\dfrac{1}{28}\le m\le 0\right) \\ 3 & \left(0<m<\dfrac{1}{9}\right) \\ 2 & \left(m=\dfrac{1}{9}\right) \\ 1 & \left(m>\dfrac{1}{9}\right) \end{cases}$$

함수 $h(m)$이 불연속이 되는 실수 m의 값은

$m=-\dfrac{1}{28}$, $m=0$, $m=\dfrac{1}{9}$이므로

모든 실수 m의 값의 합

$M=-\dfrac{1}{28}+0+\dfrac{1}{9}=\dfrac{19}{252}$이다.

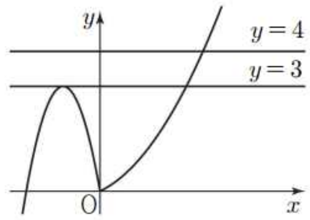
따라서 $252M=19$

25) [정답] 40

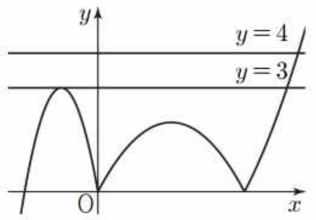
[해설]

함수 $f(x)$는 곡선 $y=ax^2+bx$에 따라 다음과 같이 6가지의 그래프의 개형을 갖는다.

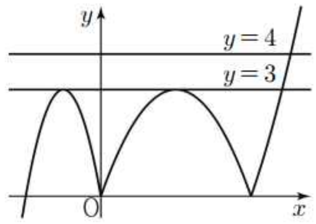
①



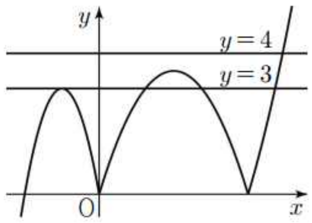
②



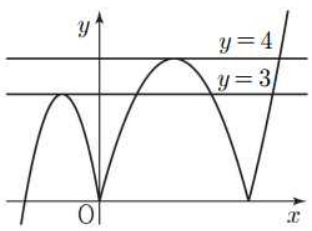
③



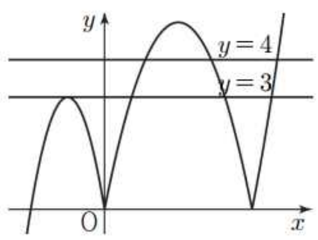
④



⑤



⑥



조건 (가)를 만족시키는 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 ⑤가 유일하다.

(i) 곡선 $y=ax^2+bx$의 꼭짓점의 y좌표는 -4이므로

$y=ax^2+bx=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}$에서

$-\frac{b^2}{4a}=-4$ $\cdots$㉠

(ii) 조건 (나)에 의하여

곡선 $y=ax^2+bx$는 점 $\left(\frac{2}{3},\ -3\right)$을 지나고,

꼭짓점의 x좌표 $-\frac{b}{2a}$는 $\frac{2}{3}$보다 크다.

$4a+6b=-27$ $\cdots$㉡

$-\frac{b}{2a}>\frac{2}{3}$ $\cdots$㉢

㉠, ㉡에 의하여

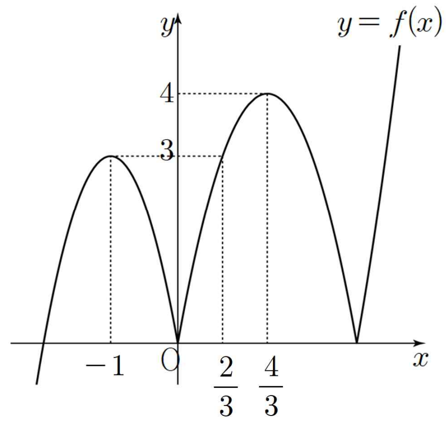
$b^2+24b+108=(b+6)(b+18)=0$

$\begin{cases} a=\frac{9}{4} \\ b=-6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a=\frac{81}{4} \\ b=-18 \end{cases}$

㉢에 의하여 $a=\frac{9}{4}$, $b=-6$이고 $-\frac{b}{2a}=\frac{4}{3}$

따라서

$$f(x)=\begin{cases} -3x(x+2) & (x<0) \\ \left|\frac{9}{4}x^2-6x\right| & (x\geq 0) \end{cases}$$



$f(x)=4$인 x_1은 $\frac{4}{3}$이므로 $g(4)=\frac{4}{3}$

$30\times g(4)=30\times\frac{4}{3}=40$

26) [정답] 65

[해설]

조건 (가)에 의해

$f(1)+\cdots+f(n-1)+f(n)=f(n)f(n+1)$ $\cdots$①

$f(1)+\cdots+f(n-1)=f(n-1)f(n)$ $\cdots$②

①−②를 하면

$f(n)=f(n)\{f(n+1)-f(n-1)\}$이다.

따라서 $f(n)=0$ 또는 $f(n+1)-f(n-1)=1$ $\cdots(*)$이어야 한다.

조건 (나)에 의해

$n=3$일 때 $\frac{f(5)-f(3)}{5-3}\leq 0$에서 $f(5)\leq f(3)$

$n=4$일 때 $\frac{f(6)-f(4)}{6-4}\leq 0$에서 $f(6)\leq f(4)$

이므로 $(*)$에 의해 $f(4)=0$, $f(5)=0$이 된다.

조건 (가)에 $n=1,\ 2,\ 3$을 각각 대입하여 정리하면

$n=1$일 때 $f(1)=f(1)f(2)$

$n=2$일 때 $f(1)+f(2)=f(2)f(3)$

$n=3$일 때 $f(1)+f(2)+f(3)=0$ $(\because f(4)=0)$

(i) $f(3)=0$인 경우

$f(1)+f(2)=0$에서 $f(1)=-\{f(1)\}^2$이므로

$f(1)=0$ 또는 $f(1)=-1$이다.

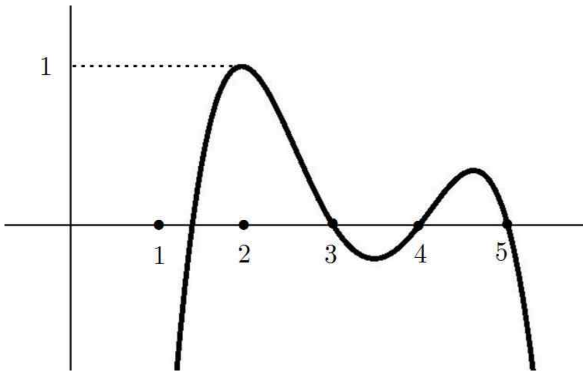
$f(1)=0$이면 $f(2)=f(3)=f(4)=f(5)=0$이 되어

사차함수라는 조건에 위배된다.

따라서 $f(1)=-1,\ f(2)=1,\ f(3)=f(4)=f(5)=0 \cdots$ ③

이 성립한다.

그래프를 그려보면 사잇값 정리에 의해 $(1,\ 2)$에서 근을 갖고 $f(6)-f(4)\le 0$을 만족한다.



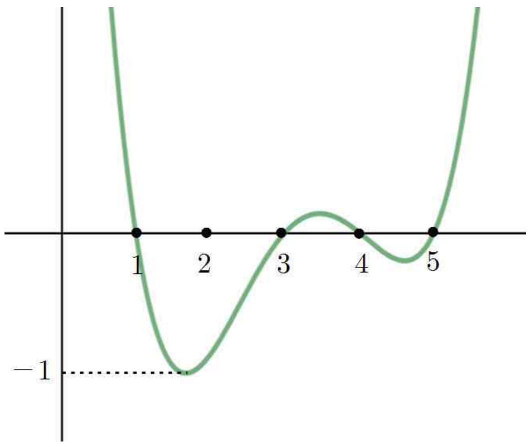
(ⅱ) $f(3)\ne 0$인 경우

$f(1)+f(2)=-f(2)\{f(1)+f(2)\}$에서 $f(2)=-1$이므로

$f(1)=0$이 된다.

따라서 $f(1)=0,\ f(2)=-1,\ f(3)=1,\ f(4)=f(5)=0$이 성립한다.

그래프를 그려보면 $f(6)-f(4)\le 0$을 만족하지 않는다.



(ⅰ), (ⅱ)에 의해 $f(x)=(ax+b)(x-3)(x-4)(x-5)$이 된다.

③을 대입하면

$f(1)=-24(a+b)=-1,\ f(2)=-6(2a+b)=1$에서

$a=-\dfrac{5}{24},\ b=\dfrac{6}{24}$을 얻는다.

$\therefore\ f(x)=-\dfrac{1}{24}(5x-6)(x-3)(x-4)(x-5)$

$128\times f\left(\dfrac{5}{2}\right)=2^7\times\left(-\dfrac{1}{24}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)\left(-\dfrac{3}{2}\right)\left(-\dfrac{5}{2}\right)\left(\dfrac{25}{2}-6\right)=65$

27) [정답] 39

[해설]

등식 $f(a)+1=f'(a)(a-t)$ ⋯⋯ ㉠

에서 $-1=f'(a)(t-a)+f(a)$이다.

이는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선 $y=f'(a)(x-a)+f(a)$가 점 $\mathrm{P}(t,\ -1)$을 지남을 뜻한다.

즉 $\mathrm{P}(t,\ -1)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점이 $(a,\ f(a))$이다.

조건에서 등식 ㉠을 만족시키는 실수 a의 값이 6 하나뿐이므로

$f(6)+1=f'(6)(6-t)$ ⋯⋯ ㉡

$-2<t<k$인 모든 실수 t에 대하여 ㉡이 성립하므로

$f'(6)=0,\ f(6)=-1$

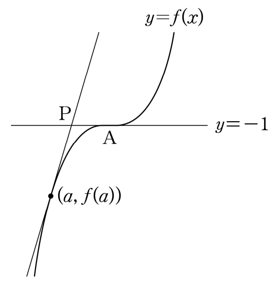
즉 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $\mathrm{A}(6,\ -1)$에서 직선 $y=-1$에

접하므로

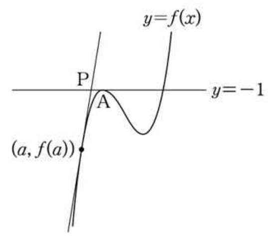
$f(x)=(x-6)^2(x-m)-1$(m은 상수) ⋯⋯ ㉢

따라서 두 점 $\mathrm{P}(t,\ -1)$, $\mathrm{A}(6,\ -1)$에 대하여 ㉢을 만족시키는

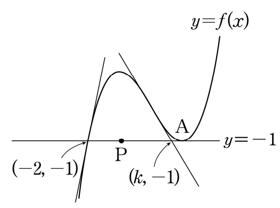
삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같이 3가지이다.



[그림1] $m=6$일 때



[그림2] $m>6$일 때



[그림3] $m<6$일 때

[그림1], [그림2]에서는 6보다 작은 모든 실수 t에 대하여 등식 ㉠

을 만족시키는 6이 아닌 실수 a가 존재하므로 조건을 만족시키지

않는다.

[그림3]에서 $k>-2$인 상수 k에 대하여 등식 ㉠을

만족시키는

실수 a의 값이 6 하나뿐이기 위한 필요충분조건이 $-2<t<k$

이려면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(-2,\ -1)$을 지나야 한다.

즉, $m=-2$

$f(x)=(x-6)^2(x+2)-1$ 이므로

$f(8)=(8-6)^2(8+2)-1=39$

[참고]

$f(x)=(x-6)^2(x-m)-1$ 에서

$f'(x)=2(x-6)(x-m)+(x-6)^2=(x-6)(3x-2m-6)$

이므로 등식 $f(a)+1=f'(a)(a-t)$ 에서

$(a-6)^2(a-m)=(a-6)(3a-2m-6)(a-t)$

$(a-6)\{2a^2-(3t+m)a+2mt+6t-6m\}=0$

$a=6$ 또는 $2a^2-(3t+m)a+2mt+6t-6m=0$ …… ㉠

이 등식을 만족시키는 실수 a의 값이 6 하나뿐이려면 a에 대한

이차방정식 ㉠이 중근 6을 가지거나 실근을 갖지 않아야 한다.

(ⅰ) ㉠이 중근 6을 가지는 경우

$2a^2-(3t+m)a+2mt+6t-6m=2(a-6)^2$

에서 $t=6,\ m=6$

따라서 조건을 만족시키는 실수 t는 6 하나뿐이므로 $-2<t<k$

라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) ㉠이 실근을 갖지 않는 경우

㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(3t+m)^2-8(2mt+6t-6m)$

$=(t-m)(9t-m-48)<0$ …… ㉡

① $m<\dfrac{m+48}{9}$, 즉 $m<6$이면 부등식 ㉡의 해는

$m<t<\dfrac{m+48}{9}$

이때 실수 t의 범위가 $-2<t<k$이어야 하므로

$m=-2,\ k=\dfrac{46}{9}$

② $m>\dfrac{m+48}{9}$, 즉 $m>6$이면 부등식 ㉡의 해는

$\dfrac{m+48}{9}<t<m$

이때 $\dfrac{m+48}{9}>6$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

위의 (ⅰ), (ⅱ)에서 $m=-2,\ k=\dfrac{46}{9}$ 이므로

$f(x)=(x-6)^2(x+2)-1$

28) [정답] **134**

[해설]

$f'(x)=k(x+1)(x-1)=k(x^2-1)$ $(k>0)$라 하면

$f(x)=\dfrac{k}{3}x^3-kx+C_0$ (단, C_0 은 적분상수)

함수 $f(x)$의 극대인 점 $(-1,f(-1))$과 극소인 점 $(1,f(1))$이

원 C 위에 있으므로 두 점은 원점에 대하여 대칭이다.

$f(-1)=-f(1), C_0=0$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

점 $(-1,f(-1))$이 원 C 위에 있으므로

$(-1)^2+y^2=n, y=\sqrt{n-1}$

$f(-1)=\dfrac{k}{3}(-1)^3-k\times(-1)=\dfrac{2}{3}k=\sqrt{n-1}$

이므로 $k=\dfrac{3}{2}\sqrt{n-1}$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{n-1}(x^3-3x)$

원 C와 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 영역 S_2와 영역 S_3 내부에 있는 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는 같다.

따라서 $g_2(n)=g_3(n)$

3보다 큰 자연수 n에 대하여 $x=-2$에서 원 C는 점 $(-2,\sqrt{n-4})$와 점 $(-2,-\sqrt{n-4})$를 지나고

$f(-2)=\dfrac{1}{2}\sqrt{n-1}(-8+6)=-\sqrt{n-1}$이므로

$-\sqrt{n-4}>-\sqrt{n-1}$

그러므로 점 $(-2,f(-2))$는 원 C 외부의 점이다.

(ⅰ) $n=4$일 때

영역 S_1에는 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점은 존재하지 않고, 영역 S_2에는 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점은 $x=-1$과 $x=0$ 위에 존재한다.

$g_1(4)=0$, $g_2(4)=3+1=4$

(ii) $5 \le n \le 9$일 때

영역 S_1에는 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점은 $x=-2$ 위에 존재하고, 영역 S_2에는 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점은 $x=-1$과 $x=0$ 위에 존재한다.

$g_1(5)=1, g_2(5)=3+2=5$

$n=6,\ 7,\ 8$에서 $g_1(n)=3, g_2(n)=5+2=7$

$g_1(9)=5, g_2(9)=5+2=7$

(iii) $10 \le n \le 16$일 때

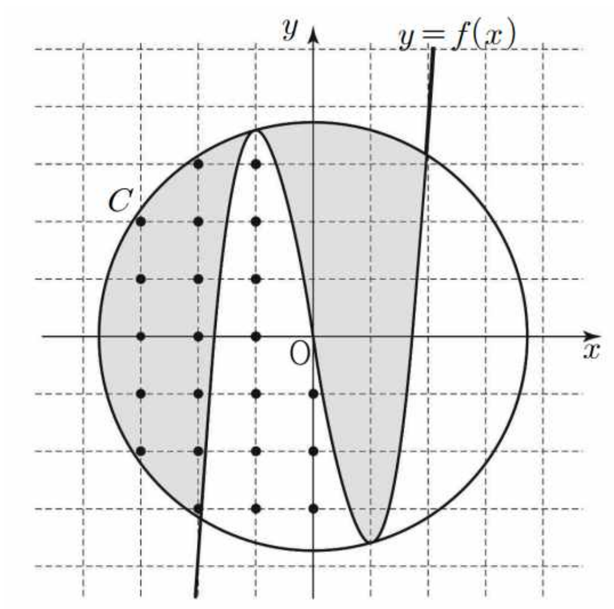
영역 S_1에는 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점은 $x=-3$과 $x=-2$ 위에 존재하고, 영역 S_2에는 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점은 $x=-1$과 $x=0$ 위에 존재한다.

$g_1(10)=1+5=6$, $g_2(10)=5+3=8$

$n=11,\ 12,\ 13$에서

$g_1(n)=3+5=8, g_2(n)=7+3=10$

$n=14,\ 15,\ 16$에서



$g_1(n)=5+7=12, g_2(n)=7+3=10$

(i), (ii), (iii)에 의하여 $g_1(n)>g_3(n)$을 만족하는 자연수 n의 최솟값은 14

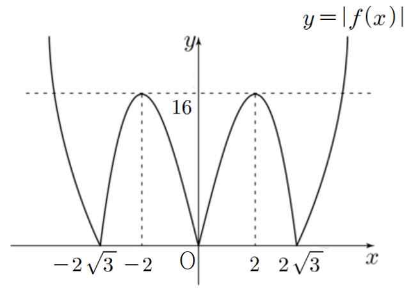
따라서

$a+\{g_1(a)\times g_3(a)\}=14+\{g_1(14)\times g_3(14)\}=134$

29) [정답] 82

[해설]

함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $g(t)$가 $t=0$에서 불연속이 되는 경우는 $f(a)=0$ 또는 $f(a)=16$인 경우뿐이다.

(i) $f(a)=0$인 경우

$a=-2\sqrt{3}$, $a=2\sqrt{3}$

① $a=-2\sqrt{3}$인 경우

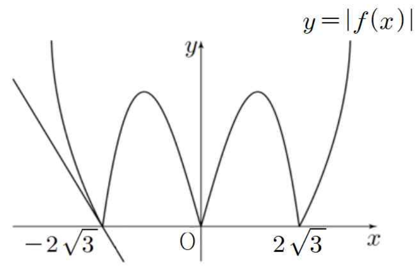
$x<-2\sqrt{3}$인 범위에서

$|f(x)|=-f(x)$이므로

$-f'(-2\sqrt{3})=-24$

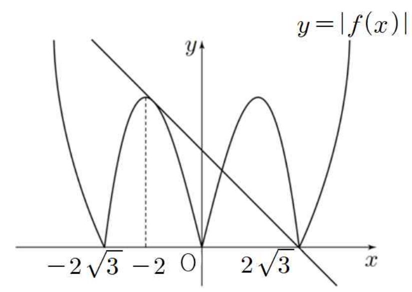
따라서 그림과 같이 $t=-24$일 때

함수 $g(t)$가 불연속이므로 k의 값 중 가장 작은 값은 0이 아니다.



② $a=2\sqrt{3}$인 경우

그림과 같이 점 $(2\sqrt{3},0)$을 지나는 직선이 $-2<x<0$인 범위에서 곡선 $y=|f(x)|$와 접할 때의 기울기 t의 값 $t=k$에 대하여 함수 $g(t)$가 불연속이므로 k의 값 중 가장 작은 값은 0이 아니다.



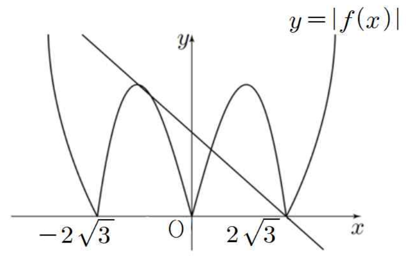
(ii) $f(a)=16$인 경우

$a=-2$, $a=4$

$a=-2$일 때, 그림과 같이

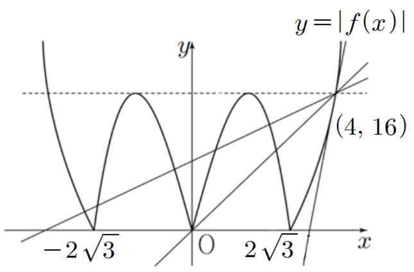
두 점 $(-2,16)$, $(2\sqrt{3},0)$을 지나는 직선의 기울기 t의 값 $t=k$에 대하여 함수 $g(t)$가 불연속이므로 k의 값 중 가장 작은

값은 0이 아니다.



따라서 주어진 조건을 만족하는 a의 값은 4

그러므로 점 $(4, 16)$을 지나고, 기울기가 t인 직선과 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



직선 $y=t(x-4)+16$의 x절편이 $4-\dfrac{16}{t}\,(t\neq 0)$이고, 곡선 $y=x^3-12x$ 위의 점 $(4,\ 16)$에서의 접선의 기울기가 36이므로

$t=1,\ 2$일 때, $g(t)=6$

$t=3$일 때, $g(t)=4$

$t=4$일 때, $g(t)=3$

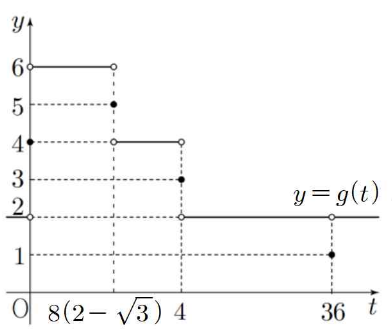
$t=5,\ 6,\ \cdots,\ 35$일 때, $g(t)=2$

$t=36$일 때, $g(t)=1$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{36} g(n)=6\times 2+4+3+2\times 31+1=82$

(참고)

$a=4$일 때, 함수 $y=g(t)$의 그래프는 그림과 같다.



30) [정답] ③

[해설]

(가) 조건에 의해

$f(-1)=-1+a-b\geqq 1$

$\therefore\ a>b \quad \cdots\cdots$ ㉠

(나) 조건에 의해

$f(1)-f(-1)=1+a+b-(-1+a-b)$

$=2+2b>8$

$\therefore\ b>3 \quad \cdots\cdots$ ㉡

ㄱ. $f'(x)=3x^2+2ax+b$

㉠, ㉡에 의해

$a>b \Rightarrow a^2>ab>3b\ (\because\ a>b>3)$

따라서

$D/4=a^2-3b>0$ (참)

ㄴ. $f'(-1)=3-2a+b=3-a+b-a$이고

$3-a<0,\ b-a<0$이므로

$\therefore\ f'(-1)<0$

$f'(1)=3+2a+b>0$

사잇값 정리에 의해 $f'(x)$는 $(-1,\ 0)$에서 근을 가진다.

$f'(\alpha)=0$이라 하면

x가 $(-1,\ \alpha)$에서 $f'(\alpha)<0$이다 (거짓)

ㄷ. $f(x)=f'(k)x$라 하면

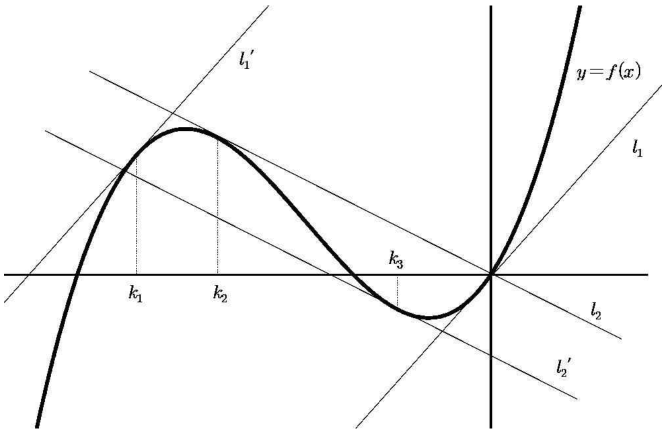
$f'(k)x$는 $(0,\ 0)$을 지나는 직선이다.

삼차함수 $f(x)$와 직선이 2개의 교점을 가지려면 직선은 $f(x)$의 접선이어야한다.

ㄱ에 의해 $f'(x)$는 두 근을 갖고

따라서

$(0,\ 0)$에서 $f(x)$에 그은 접선은 $l_1,\ l_2$ 두 개다.



i) l_1인 경우

$f'(k)=f'(0)$이므로

위 그림에서

$k=0,\ k_1$

ii) l_2인 경우

$(0,\ 0)$에서 $f(x)$에 그은 접선의 접점을 k_2라 할 때

$f'(k)=f'(k_2)$이므로

$k=k_2,\ k_3$

따라서 k의 개수는 4개다.

31) [정답] 11

[해설]

두 다항식 $P_1(x)$, $P_2(x)$를 $P_1(x)=g(x)-4x-26$,

$P_2(x)=g(x)+2x^3-14x^2+12x+6$이라 하면

$P_1(x)=-P_2(x)$ 즉, $P_1(x)+P_2(x)=0$

따라서 $g(x)=-x^3+7x^2-4x+10$,

$$|f(x)|=\begin{cases}-(x^3-7x^2+8x+16) & (x\le a)\\ x^3-7x^2+8x+16 & (x>a)\end{cases}$$

$g(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로

$f(x)=x^3-7x^2+8x+16=(x+1)(x-4)^2$이고

$a=-1$이다.

함수 $h(x)=f(x)-(x-k)^2$라 하면 함수 $h(x)$의 극값이 존재해야 하므로 방정식 $h'(x)=3x^2-16x+(8+2k)=0$에서 판별식을 D라 하면 $D/4=64-3(8+2k)>0$

$k<\dfrac{20}{3}$ 이므로 k는 6이하의 자연수이다.

i) $k=1,\ 2,\ 3,\ 5$일 때

$h(-1)=-(k+1)^2<0$

$h(1)=18-(1-k)^2>0$

$h(4)=-(4-k)^2<0$

$h(6)=28-(6-k)^2>0$

사이값 정리에 의하여 삼차방정식 $h(x)=0$의 실근이 열린 구간 $(-1,\ 1)$, $(1,\ 4)$, $(4,\ 6)$에 각각 하나씩 존재한다.

ii) $k=4$일 때,

$h(x)=(x+1)(x-4)^2-(x-4)^2=x(x-4)^2$

이므로 함수 $h(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

iii) $k=6$일 때,

극댓값 $h(2)=-4<0$이므로 함수 $h(x)$의 그래프가 x축과 한 점에서 만난다.

i), ii), iii)에 의하여 함수 $h(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 자연수 k의 값은 $1,\ 2,\ 3,\ 5$이다.

따라서 구하는 모든 자연수 k의 값의 합은 11

32) [정답] 40

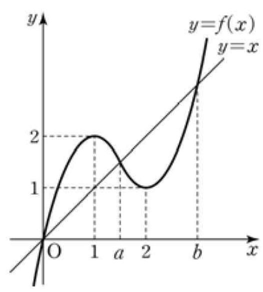
[해설]

$(f\circ f)(x)=x$을 만족하기 위해서는

(i) 모든 x에 대하여 $f(x)=x$일 때

$f(1)=1$, $f(2)=2$가 되면 $f(x)$는 증가함수가 되어 $f'(1)<0$, $f'(2)<0$인 조건에 만족하지 않는다.

(ii) $f(p)=q$, $f(q)=p$일 때,



실근이 0, 1, a, 2, b이고 $f'(1)<0$, $f'(2)<0$이므로 위의 그래프와 같이 1, 2가 $y=x$ 대칭이어야 한다.

따라서 $f(1)=2$, $f(2)=1$

또, $f(0)=0$, $f'(0)-f'(1)=6$이므로

$f(x)=px^3+qx^2+rx+s$라 하면 $f'(x)=3px^2+2qx^2+r$이고

$f(1)=p+q+r+s=2$ …… ㉠

$f(2)=8p+4q+2r+s=1$ …… ㉡

$f(0)=s=0$ $\cdots\cdots$ ㉢

$f'(0)-f'(1)=r-3p-2q-r=6$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉠, ㉡, ㉢, ㉣를 연립하면 $p=1,\ q=-\dfrac{9}{2},\ r=\dfrac{11}{2},\ s=0$

$$\therefore f(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{11}{2}x$$

$$\therefore f(5)=40$$

33) [정답] 5

[해설]

조건 (가)에서

곡선 $y=g(x)$위의점 $(2,\ 0)$에서의 접선이 x축이고 함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 -1인 이차함수이므로

$g(x)=-(x-2)^2$

이다.

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 $x<0$인 범위에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 반드시 한 점에서 만난다.

조건 (다)에서 방정식 $f(x)=g(x)$는 오직 하나의 실근을 가지므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 $x<0$에서 만나는 점을 제외한 점에서는 만나지 않아야 한다.

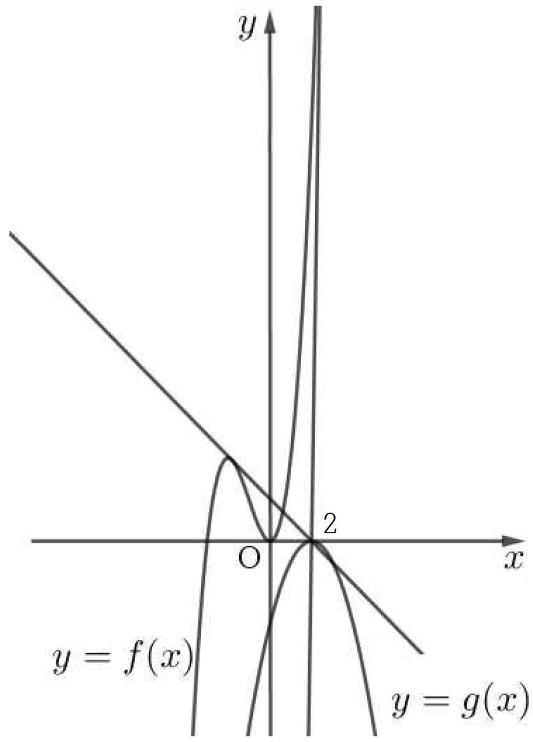
또, 조건 (가)에서

곡선 $y=f(x)$위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선이 x축이므로 곡선 $y=f(x)$는 x축과 접해야 한다.

그러므로 함수 $y=f(x)$가 극값을 갖는 경우와 극값을 갖지 않는 경우로 나눈 후 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그려 점 $(2,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 개수를 조사하면 다음과 같다.

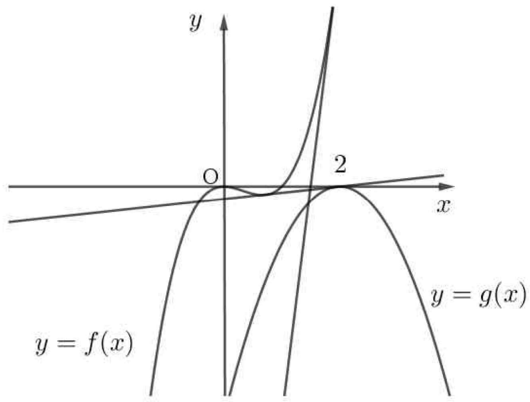
(ⅰ)함수 $f(x)$가 극값을 갖는 경우

함수 $y=f(x)$가 $x=0$에서 극솟값을 가질 때, 점 $(2,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 개수는 다음 그림과 같이 x축을 포함하여 3개다.

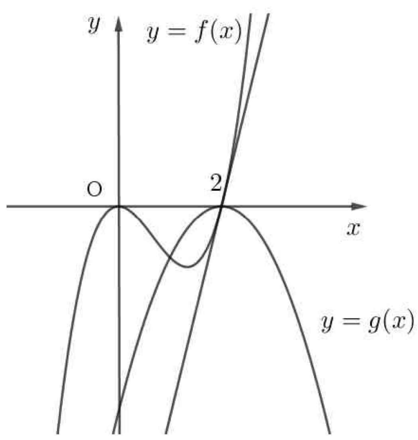


한편, 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극댓값을 가질 때 다음과 같이 세 가지로 나누어 생각할 수 있다.

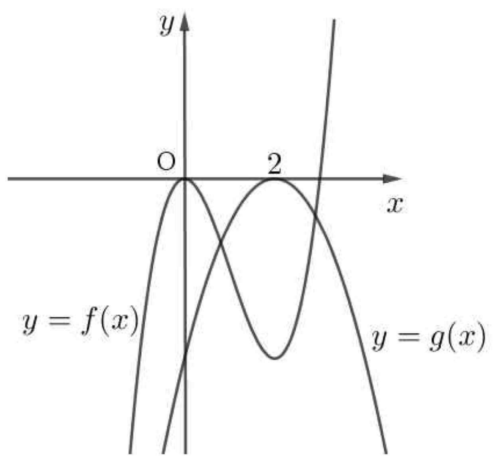
$f(2)>0$이면 점 $(2,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 개수는 다음 그림과 같이 x축을 포함하여 3개다.



$f(2)=0$이면 점 $(2,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 개수는 다음 그림과 같이 x축 포함하여 2개다. 하지만 이때는 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 서로 다른 세 점에서 만난다.

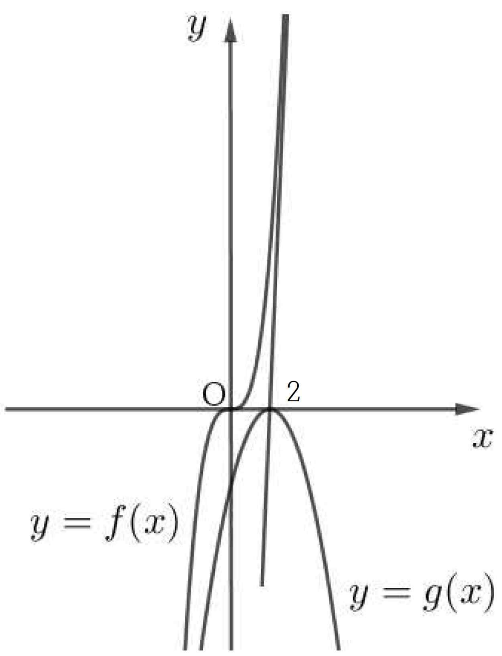


$f(2)<0$이면 점 $(2,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선은 x축 뿐이다. 즉, 접선의 개수는 다음 그림과 같이 1개다.



(ii)함수 $y=f(x)$가 극값을 갖지 않는 경우

함수 $f(x)=x^3$이고 점 $(2,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 개수는 그림과 같이 x축 포함하여 2개다.



(i), (ii)에서

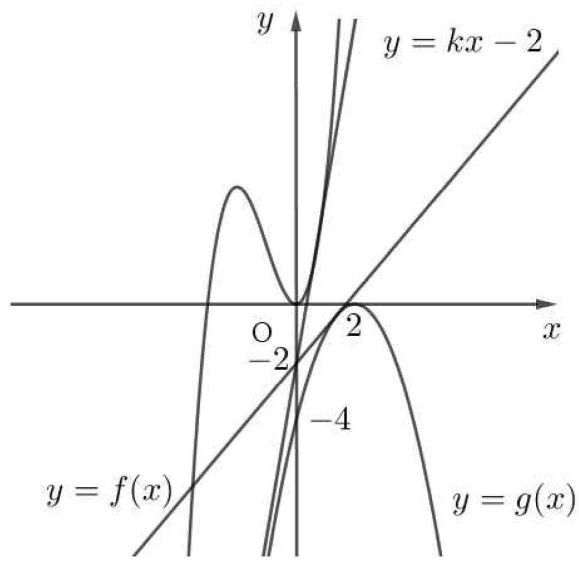
$f(x)=x^3$

이다. 한편 $x>0$인 모든 실수 x에 대하여

$g(x)\le kx-2\le f(x)$

이므로 곡선 $y=g(x)$는 직선 $y=kx-2$가 만나거나 아래쪽에 있어야 하고 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=kx-2$와 만나거나 위쪽에 있어야 한다.

한편, 직선 $y=kx-2$는 점 $(0,\ -2)$를 지나는 직선이고 k는 이 직선의 기울기이므로 k가 최소가 되는 직선과 최대가 되는 직선은 다음 그림과 같이 접선이다.



점 $(0,\ -2)$를 지나고 곡선 $y=f(x)$와의 접점을 $(p,\ p^3)$이라 하면 $f'(x)=3x^2$이므로 접선의 방정식은

$y=3p^2(x-p)+p^3$

이다. 이 접선이 $(0,\ -2)$를 지나므로 대입하면

$-2=3p^2(-p)+p^3$

$p=1$

그러므로 $\alpha=3$

또, 점 $(0,\ -2)$를 지나고 곡선 $y=g(x)$의 접점을 $(q,\ -(q-2)^2)$이라 하면 $g'(x)=-2(x-2)$이므로 접선의 방정식은

$y=-2(q-2)(x-q)-(q-2)^2$

이다. 이 접선이 $(0,\ -2)$를 지나므로 대입하면

$-2=-2(q-2)(-q)-(q-2)^2$

$-2=-2q^2-4q-q^2+4q-4$

$q^2=2$

$q>0$이므로

$q=\sqrt{2}$

그러므로

$\beta=-2(\sqrt{2}-2)=4-2\sqrt{2}$

이다. 이때,

$\alpha-\beta=3-(4-2\sqrt{2})$

$=-1+2\sqrt{2}$

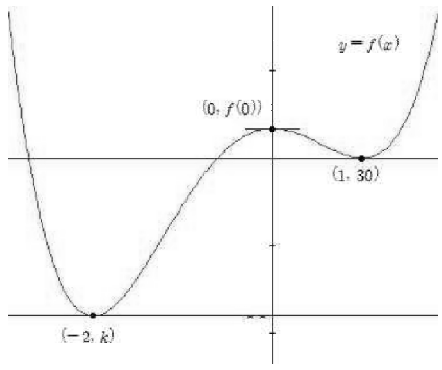
따라서 $a=-1,\ b=2$이므로

$a^2+b^2=(-1)^2+2^2=5$

34) [정답] 21

[해설]

주어진 조건으로부터 $y=f(x)$는 그림과 같이 $x=-2$, $x=1$일 때 각각 극솟값 $f(-2)=k$, $f(1)=30$을 갖는다. 또한 $f'(0)=0$이다.



따라서 $f'(x)=4x(x+2)(x-1)=4x^3+4x^2-8x$

$$f(x)=x^4+\frac{4}{3}x^3-4x^2+C$$

$$f(1)=1+\frac{4}{3}-4+C=30,\quad C=\frac{95}{3}$$

$$\therefore\quad f(x)=x^4+\frac{4}{3}x^3-4x^2+\frac{95}{3}$$

$$k=f(-2)=16-\frac{32}{3}-16+\frac{95}{3}=21$$

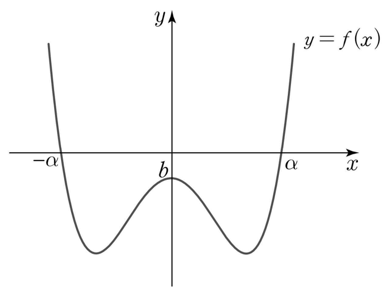
35) [정답] ④

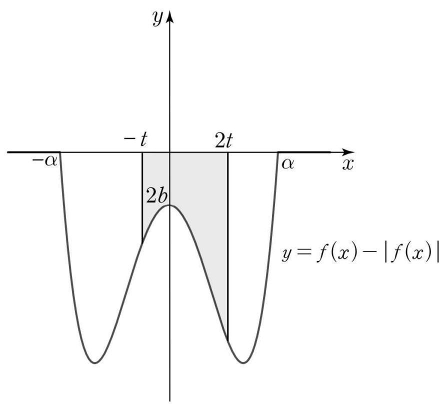
[해설]

사차함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$의 그래프는 y축에 대칭이다.

b의 값에 따라 나누어보면

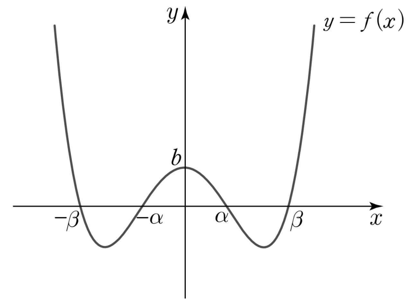
(i) $b\le 0$일 때

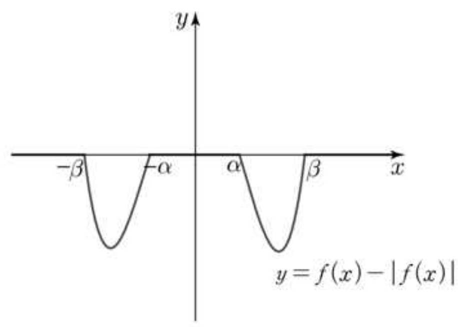




$0<x<1$에서 $g(x)$는 감소함수이므로 조건 (가)를 만족하지 않는다.

(ii) $b>0$일 때





① $0<x<1$에서 $g(x)$가 상수함수이므로 $f(x)-|f(x)|=0$에서 $\alpha\ge 2$

② $1<x<5$에서 $g(x)$가 감소하므로 $f(x)-|f(x)|<0$에서 $\alpha\le 2$이고 $-\beta\le -5$

즉, $\beta\ge 5$

③ $x>5$에서 $g(x)$가 상수함수이므로 $-\beta\ge -5$

즉, $\beta\le 5$

①, ②, ③에 의해 $\alpha=2$, $\beta=5$

$\therefore f(x)=(x^2-4)(x^2-25)$

따라서 $f(\sqrt{2})=(-2)\times(-23)=46$이다.

36) [정답] 48

[해설]

정의역이 $\{x|\ x\ge m\}$인 함수 $y=\frac{1}{4}(x-3)^2$의 그래프가 직선 $y=mx$와 만나는 점의 개수를 $h_1(m)$이라 하고 정의역이 $\{x|\ x<m\}$인 함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프가 직선 $y=mx$와 만나는 점의 개수를 $h_2(m)$이라 하면 $g(m)=h_1(m)+h_2(m)$이다.

함수 $g(m)$이 $m=0$에서 연속이므로

$g(0)=\lim_{m\to0+}g(m)=\lim_{m\to0-}g(m)$이고 함수 $y=\frac{1}{4}(x-3)^2$의 그래프는 $x=3$에서 x축에 접하므로

$$\lim_{m\to0+}h_1(m)=2,\ \lim_{m\to0-}h_1(m)=0,\ h_1(0)=1$$

$$\lim_{m\to0+}g(m)=\lim_{m\to0+}\{h_1(m)+h_2(m)\}$$
$$=2+\lim_{m\to0+}h_2(m)$$

$$\lim_{m\to0-}g(m)=\lim_{m\to0-}\{h_1(m)+h_2(m)\}$$
$$=0+\lim_{m\to0-}h_2(m)$$

$$g(0)=h_1(0)+h_2(0)=1+h_2(0)$$

따라서 $2+\lim_{m\to0+}h_2(m)=0+\lim_{m\to0-}h_2(m)=1+h_2(0)$

이때, $h_2(m)=0$ 또는 $h_2(m)=1$ 또는 $h_2(m)=2$이므로

$h_2(0)=0$일 때

$$2+\lim_{m\to0+}h_2(m)=1+h_2(0)=1,\ \lim_{m\to0+}h_2(m)=-1$$

이므로 성립하지 않는다.

$h_2(0)=2$일 때

$$0+\lim_{m\to0-}h_2(m)=1+h_2(0)=3,\ \lim_{m\to0-}h_2(m)=3$$

이므로 성립하지 않는다.

따라서 $h_2(0)=1$

$$\lim_{m\to0-}h_2(m)=2,\ \lim_{m\to0+}h_2(m)=0$$

이므로 $y=x^2+ax+b$의 그래프는 $x<0$에서 x축에 접한다.

따라서 $a>0$, $b=\frac{a^2}{4}$, $g(0)=2$

(i) 직선 $y=mx$와 곡선 $y=\frac{1}{4}(x-3)^2$의 위치관계를 확인하면

$mx=\frac{1}{4}(x-3)^2$

$x^2-(4m+6)x+9=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(4m+6)^2-4\times9=16m(m+3)$

함수 $y=\frac{1}{4}(x-3)^2$의 그래프와 직선 $y=mx$는 $-3<m<0$에서 만나지 않고 $m=0$, $m=-3$에서 한 점에서 만나고 $m<-3$ 또는 $m>0$에서 두 점에서 만난다.

$x=m$일 때 직선 $y=mx$와 곡선 $y=\frac{1}{4}(x-3)^2$의 y좌표의 대소관계를 확인하면

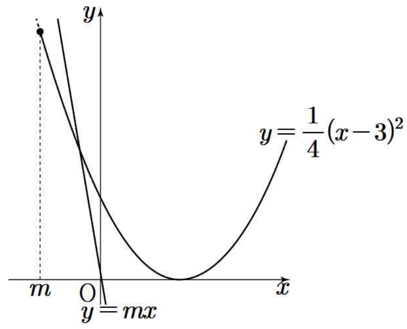
$\frac{1}{4}(m-3)^2-m^2=-\frac{3}{4}(m+3)(m-1)$이므로

$m<0$에서 $-3<m<0$일 때 $y=\frac{1}{4}(x-3)^2$의 y좌표가 더 크고 $m<-3$일 때 $y=mx$의 y좌표가 더 크다.

직선 $y=mx$와 함수 $y=\frac{1}{4}(x-3)^2$의 그래프의 교점의 개수는 다음과 같다.

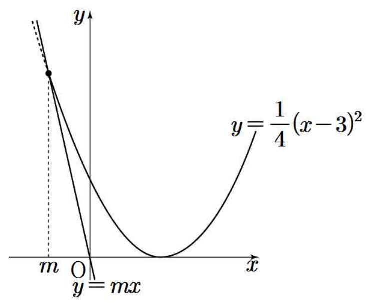
① $m<-3$일 때

$x\ge m$에서 교점의 개수 $h_1(m)=1$



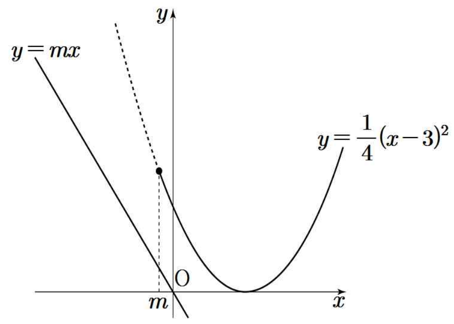
② $m=-3$일 때

$x\ge m$에서 교점의 개수 $h_1(m)=1$



③ $-3<m<0$일 때

$x\ge m$에서 교점의 개수 $h_1(m)=0$



$g(m)$은 $m\le0$에서 연속이고 $g(0)=2$이므로

$m<-3$일 때 $h_2(m)=1$

$m=-3$일 때 $h_2(m)=1$

$-3<m<0$일 때 $h_2(m)=2$

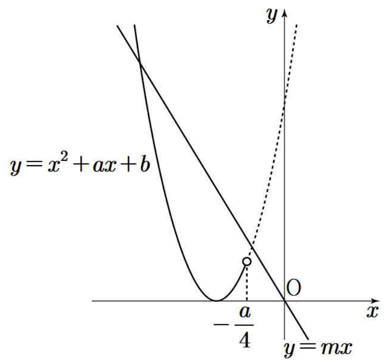
(ii) 직선 $y=mx$와 곡선 $y=x^2+ax+\frac{a^2}{4}$의 위치관계를 확인하면

$x=m$일 때 $m^2+am+\frac{a^2}{4}-m\times m=a\left(m+\frac{a}{4}\right)$이므로

$m=-\frac{a}{4}$일 때 함수 $y=x^2+ax+\frac{a^2}{4}$의 그래프와 직선 $y=mx$는 $x=m$에서 만난다.

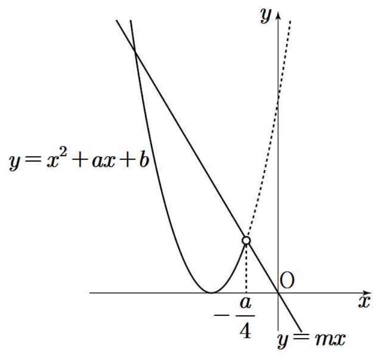
① $m<-\frac{a}{4}$일 때

$x<m$에서 교점의 개수 $h_2(m)=1$



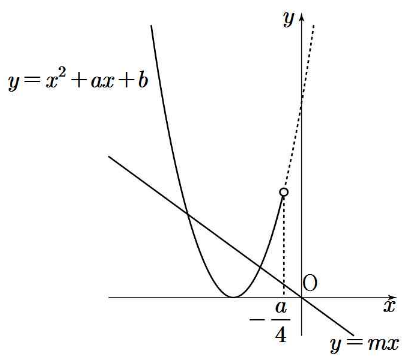
② $m=-\frac{a}{4}$일 때

$x<m$에서 교점의 개수 $h_2(m)=1$



③ $-\frac{a}{4}<m<0$일 때

$x<m$에서 교점의 개수 $h_2(m)=2$



(ⅰ), (ⅱ)에서

$h_2(m)$	1	1	2
(ⅰ)	$m<-3$	$m=-3$	$-3<m<0$
(ⅱ)	$m<-\frac{a}{4}$	$m=-\frac{a}{4}$	$-\frac{a}{4}<m<0$

$m\le 0$에서 함수 $g(m)$이 연속이 되려면

$$-\frac{a}{4}=-3,\ a=12$$

$b=\frac{a^2}{4}$이므로 $b=36$

따라서 $a+b=48$

37) [정답] 61

[해설]

$f(x)=x^2+bx+c$ (b, c는 상수)라 하자.

조건 (가)에서

$$\lim_{x\to1}\frac{g(x)-f(x)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x^2-x+a)f(x)-f(x)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x^2-x+a-1)f(x)}{x-1}=0$$

$\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$$\lim_{x\to1}(x^2-x+a-1)f(x)=(a-1)f(1)=0$$

따라서 $a=1$ 또는 $f(1)=0$

$a\ne1$이라 하면 $f(1)=0$이어야 하므로

$$c=-b-1,\ f(x)=(x-1)(x+b+1)$$
$$\lim_{x\to1}\frac{g(x)-f(x)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x^2-x+a-1)(x-1)(x+b+1)}{x-1}$$
$$=(a-1)(b+2)=0$$

이므로 $b=-2$, $f(x)=(x-1)^2$

$g'(x)=(2x-1)(x-1)^2+(x^2-x+a)(2x-2)$에서

$g'(1)=0$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$f(1)\ne0$이라 하면 $a=1$이고

$$\lim_{x\to1}\frac{g(x)-f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)f(x)}{x-1}=f(1)=0$$

이므로 모순이다.

따라서 $a=1$이고 $f(1)=0$이며 $b\ne-2$

$f(x)=(x-1)(x+b+1)$에서 $f'(x)=2x+b$

$g(x)=(x^2-x+1)f(x)$에서

$$g'(x)=(2x-1)f(x)+(x^2-x+1)f'(x)$$

조건 (다)에서 $f(\alpha)=f'(\alpha)$이므로

$$(\alpha-1)(\alpha+b+1)=2\alpha+b \qquad \cdots\cdots ㉠$$
$$g'(\alpha)=(2\alpha-1)f(\alpha)+(\alpha^2-\alpha+1)f'(\alpha)=2f'(\alpha)$$
$$(2\alpha-1)f'(\alpha)+(\alpha^2-\alpha+1)f'(\alpha)=2f'(\alpha)$$
$$(\alpha^2+\alpha-2)f'(\alpha)=0,\ (\alpha+2)(\alpha-1)(2\alpha+b)=0$$

따라서 $\alpha=-2$ 또는 $\alpha=1$ 또는 $\alpha=-\frac{b}{2}$

$\alpha=1$ 또는 $\alpha=-\frac{b}{2}$일 때 ㉠에서 $b=-2$이므로 $b\ne-2$인 것에 모순이다.

$\alpha=-2$이므로 ㉠에서 $b=\frac{7}{4}$

$$g(x)=\left(x^2-x+1\right)(x-1)\left(x+\frac{11}{4}\right)$$

$$g(\alpha+4)=g(2)=3\times1\times\frac{19}{4}=\frac{57}{4}$$

따라서 $p=4,\ q=57$이므로 $p+q=61$

38) [정답] 42

[해설]

$f(-1),\ f(0),\ f(1),\ f(2)$가 등차수열이므로 네 점을 연결하는 직선을 $y=mx+n$이라고 하자.

그러면 $f(x)-(mx+n)=x(x+1)(x-1)(x-2)$라고 할 수 있다.

$f(x)=x(x-1)(x+1)(x-2)+mx+n$이라고 하면

$f'(-1)=m-6,\ f'(2)=m+6,\ f(-1)=-m+n,$

$f(2)=2m+n$이다.

-1에서의 접선은 $y=(m-6)(x+1)-m+n$

2에서의 접선은 $y=(m+6)(x-2)+2m+n$

$(k,0)$에서 두 접선이 만나므로

$0=(m-6)(k+1)-m+n,$

$0=(m+6)(k-2)+2m+n$

두 식을 k에 관하여 정리하면

$k=\frac{m-n}{m-6}-1,$

$k=-\frac{2m+n}{m+6}+2$

연립하면 $m+2n=18$

$m=-2n+18$을 $k=\frac{m-n}{m-6}-1$에 대입하면 $k=\frac{1}{2}$가 나온다.

따라서 $f(2k)=f(1)=m+n=10$이므로 $m=22,\ n=-2$가 된다.

$f(x)=x(x-1)(x+1)(x-2)+22x-2$

$f(4k)=f(2)=42$

39) [정답] ④

[해설]

점 $(0,\ t)$를 지나는 직선이 곡선 $y=x^3-ax^2+3x-5$와 접할 때의 접점을 $\left(k,\ k^3-ak^2+3k-5\right)$라 하자.

$y'=3x^2-2ax+3$이므로 접선의 방정식은

$$y=\left(3k^2-2ak+3\right)(x-k)+k^3-ak^2+3k-5$$

이고, 이 접선이 점 $(0,\ t)$를 지나므로

$$t=-2k^3+ak^2-5$$

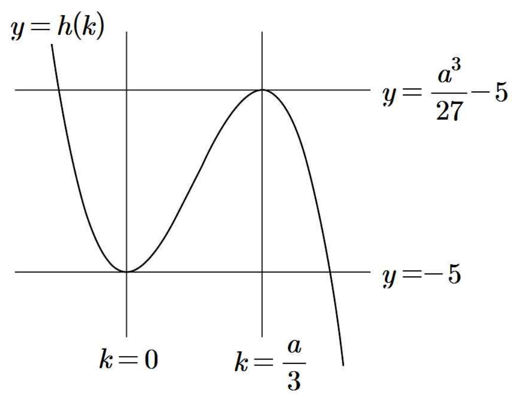
$f(t)$는 곡선 $y=-2k^3+ak^2-5$와 직선 $y=t$의 교점의 개수이다.

$h(k)=-2k^3+ak^2-5$라 하면

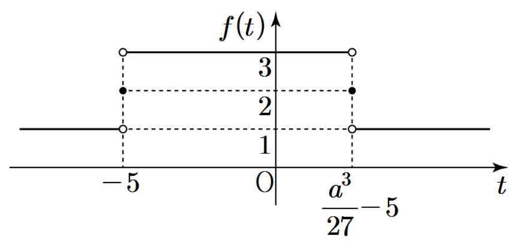
$$h'(k)=-6k^2+2ak=-2k(3k-a)$$

$$h'(0)=h'\left(\frac{a}{3}\right)=0$$

$$h(0)=-5,\ h\left(\frac{a}{3}\right)=\frac{a^3}{27}-5$$



$$f(t)=\begin{cases}1 & (t<-5)\\ 2 & (t=-5)\\ 3 & \left(-5<t<\frac{a^3}{27}-5\right)\\ 2 & \left(t=\frac{a^3}{27}-5\right)\\ 1 & \left(t>\frac{a^3}{27}-5\right)\end{cases}$$



$$g(t)=f(f(t))=\begin{cases}f(1) & (t<-5)\\ f(2) & (t=-5)\\ f(3) & \left(-5<t<\frac{a^3}{27}-5\right)\\ f(2) & \left(t=\frac{a^3}{27}-5\right)\\ f(1) & \left(t>\frac{a^3}{27}-5\right)\end{cases}$$

함수 $g(t)$에서

(i) $\frac{a^3}{27}-5<3$인 경우

$-5 < t < \frac{a^3}{27} - 5$일 때, $g(t) = f(3) = 1$이므로 조건(가)를 만족시키지 않는다.

(ii) $\frac{a^3}{27} - 5 = 3$인 경우

$t < -5$, $t > \frac{a^3}{27} - 5$일 때, $g(t) = f(1) = 3$

$t = -5$, $\frac{a^3}{27} - 5$일 때, $g(t) = f(2) = 3$

$-5 < t < \frac{a^3}{27} - 5$일 때, $g(t) = f(3) = 2$

함수 $g(t)$의 치역의 원소의 개수가 2이므로 조건(나)를 만족시키지 않는다.

(iii) $\frac{a^3}{27} - 5 > 3$인 경우

실수 전체의 집합에서 $f(t) \le 3 < \frac{a^3}{27} - 5$이므로 $g(t) = 3$이다.

이는 조건(가), (나)를 모두 만족시킨다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 조건을 만족시키는 a의 범위는 $a^3 > 8 \times 27 = 6^3$

자연수 a의 최솟값 $m = 7$, $g(m) = f(f(7)) = 3$

따라서 $m + g(m) = 7 + 3 = 10$

40)

41) [정답] 340

[해설]

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$는 조건 (나)에서 $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$이므로 $f(x) = x^2$

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$는 조건 (가), (나)에서 $g(0) = 0$, $g(a) = 0$, $g'(a) = 0$이므로 $g(x) = x(x-a)^2$

$$\int_0^a \{g(x) - f(x)\}dx$$

$$= \int_0^a \{x^3 - (2a+1)x^2 + a^2 x\}dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2a+1}{3}x^3 + \frac{a^2}{2}x^2\right]_0^a$$

$$= \frac{1}{12}a^4 - \frac{1}{3}a^3 = 36$$

그러므로 $(a-6)(a^3 + 2a^2 + 12a + 72) = 0$

$a > 0$이므로 $a = 6$

두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$의 교점을 구하면

$(0,\ 0)$, $(4,\ 16)$, $(9,\ 81)$

$$\int_0^6 |f(x) - g(x)|dx$$

$$= \int_0^4 \{g(x) - f(x)\}dx + \int_4^6 \{f(x) - g(x)\}dx$$

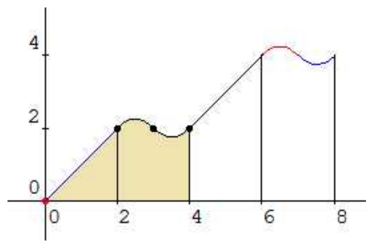
$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{13}{3}x^3 + 18x^2\right]_0^4 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{13}{3}x^3 - 18x^2\right]_4^6$$

$$= \frac{340}{3}$$

따라서 $3\int_0^a |f(x) - g(x)|dx = 340$

42) [정답] 21

[해설]



그림과 같은 모양이어야 한다.

$f(x) = a\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + b$ 라 하면

$f'(x) = 2a\left(x - \frac{5}{2}\right)$

$f'(2) = 2a\left(2 - \frac{5}{2}\right) = -a = 1$

$f(2) = a\left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 + b = 2$, $b = \frac{9}{4}$

즉 $f(x) = -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$, $g(x) = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$

그리고 $k = 2$이다.

$h\left(\frac{13}{2}\right) = h\left(\frac{5}{2}\right) + 2 = f\left(\frac{5}{2}\right) + 2 = \frac{9}{4} + 2 = \frac{17}{4}$, $\therefore 4 + 17 = 21$

43) [정답] 80

[해설]

모든 실수 t에 대해서 $|f'(t)| \ge 0$이고,

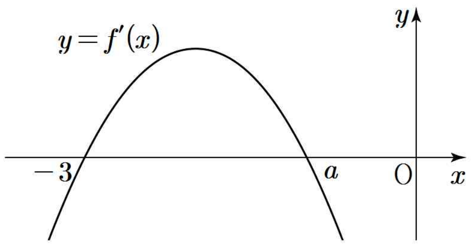
$g(a)=\int_0^a |f'(t)|dt=-8<0$이므로 $a<0$

$x\ge -3$에서 $|f'(x)|\ge 0$이므로 함수 $g(x)=\int_0^x |f'(t)|dt$는 증가한다.

삼차함수 $f(x)$는 $x=-3$과 $x=a(a>-3)$에서 극값을 가지므로 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이면 $x<-3$에서 $f(x)$는 증가한다.

이때, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하므로 극솟값을 갖지 않는다.

따라서 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 음수이다.



(i) $x<-3$일 때, $g(x)=f(x)$

(ii) $-3\le x<a$일 때,

$$g(x)=\int_0^a\{-f'(t)\}dt+\int_a^x f'(t)dt$$

$=f(x)+f(0)-2f(a)$

(iii) $x\ge a$일 때,

$$g(x)=\int_0^x\{-f'(t)\}dt=-f(x)+f(0)$$

함수 $g(x)$는 $x=-3$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to -3-}g(x)=\lim_{x\to -3-}f(x)=f(-3)$$

$$\lim_{x\to -3+}g(x)=\lim_{x\to -3+}\{f(x)+f(0)-2f(a)\}$$

$=f(-3)+f(0)-2f(a)$

$$f(-3)=f(-3)+f(0)-2f(a)$$

$$f(0)=2f(a) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$g(a)=-f(a)+f(0)=-8 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하면 $f(0)=-16$, $f(a)=-8$

$$f'(x)=k(x+3)(x-a)$$

$=k\{x^2+(3-a)x-3a\}\ (k<0)$

이라 하면

$$f(x)=k\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{3-a}{2}x^2-3ax\right)-16$$

$$g(-3)=f(-3)=\frac{9}{2}k(a+1)-16=-16$$

$k\ne 0$이므로 $a=-1$

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-1) \\ -f(x)-16 & (x\ge -1)\end{cases}$$

$$\int_a^4\{f(x)+g(x)\}dx$$

$$=\int_{-1}^4\{f(x)+(-f(x)-16)\}dx$$

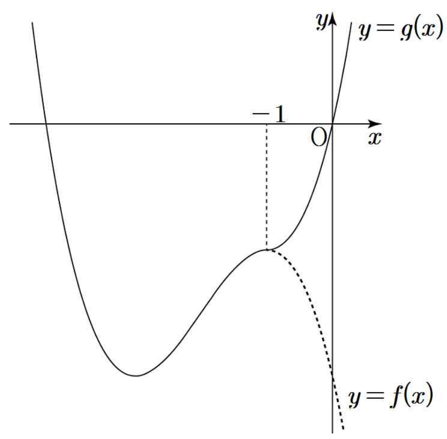
$$=\int_{-1}^4(-16)dx=-16\times 5=-80$$

따라서 $\left|\int_a^4\{f(x)+g(x)\}dx\right|=80$

[참고]

$$f(x)=-2x^3-12x^2-18x-16$$

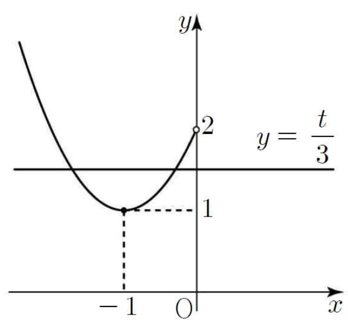
함수 $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



44) [정답] 141

[해설]

(i) 함수 $y=f(x)(x<0)$의 그래프와 직선 $y=\frac{t}{3}$가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $r(t)$라 하면



$$r(t)=\begin{cases}0 & (t<3)\\ 1 & (t=3)\\ 2 & (3<t<6)\\ 1 & (t\ge 6)\end{cases}$$

(ii) 함수 $y=|f(-x)-t|(x\ge 0)$의 그래프와 직선 $y=\frac{t}{3}$가

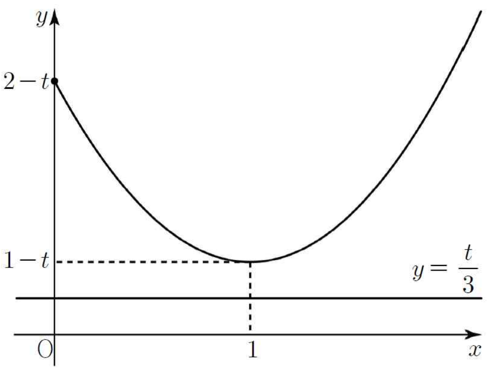
만나는 서로 다른 점의 개수를 $s(t)$라 하자.

$$\begin{aligned}f(-x)-t&=x^2-2x+2-t\\&=(x-1)^2+1-t\end{aligned}$$

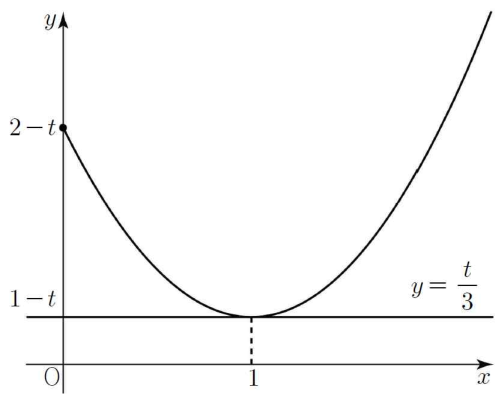
함수 $y=f(-x)-t$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는

$(1,\ 1-t)$, y축과 만나는 점의 y좌표는 $2-t$

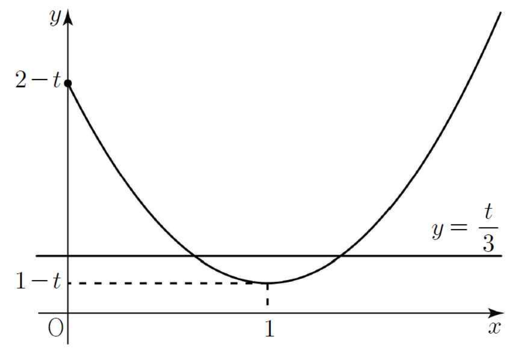
(1) $1-t>\frac{t}{3}\left(t<\frac{3}{4}\right)$일 때, $s(t)=0$

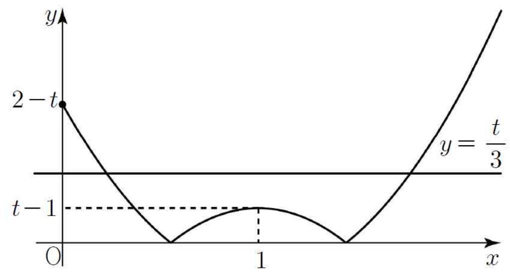


(2) $1-t=\frac{t}{3}\left(t=\frac{3}{4}\right)$일 때, $s(t)=1$

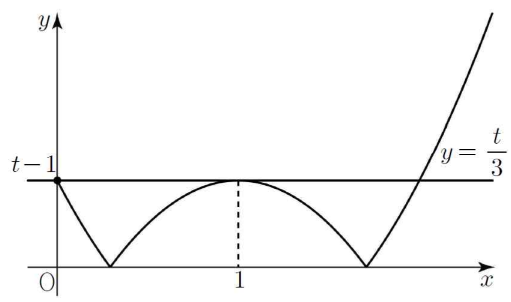


(3) $|1-t|<\frac{t}{3}<2-t\left(\frac{3}{4}<t<\frac{3}{2}\right)$일 때, $s(t)=2$

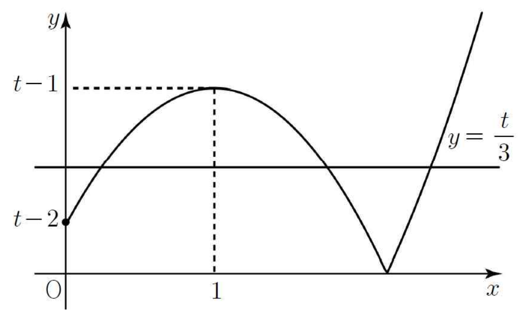




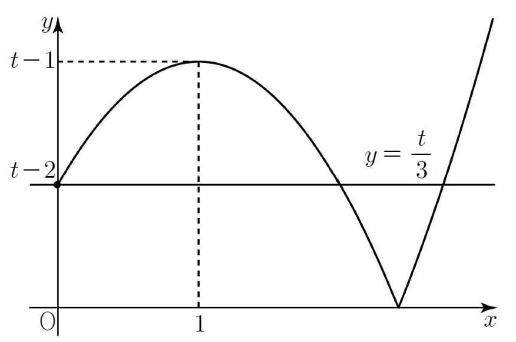
(4) $t-1=\frac{t}{3}=2-t\left(t=\frac{3}{2}\right)$일 때, $s(t)=3$



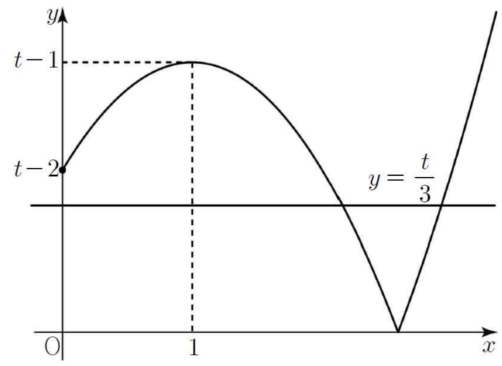
(5) $t-2<\frac{t}{3}<t-1\left(\frac{3}{2}<t<3\right)$일 때, $s(t)=3$



(6) $\frac{t}{3}=t-2(t=3)$일 때, $s(t)=3$



(7) $\frac{t}{3}<t-2(t>3)$일 때, $s(t)=2$

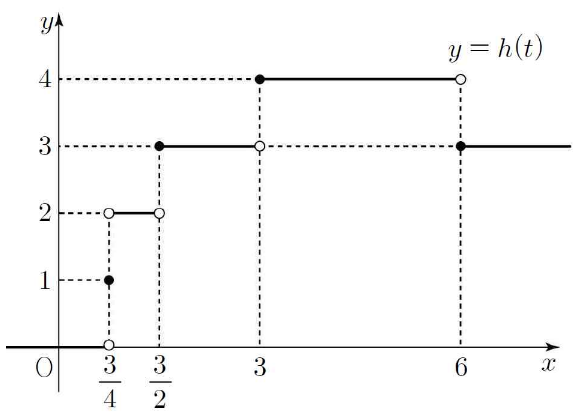


$$s(t)=\begin{cases}0 & \left(t<\frac{3}{4}\right)\\ 1 & \left(t=\frac{3}{4}\right)\\ 2 & \left(\frac{3}{4}<t<\frac{3}{2}\right)\\ 3 & \left(\frac{3}{2}\le t\le 3\right)\\ 2 & (t>3)\end{cases}$$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{t}{3}$가 만나는 서로 다른 점의 개수 $h(t)=r(t)+s(t)$

$$h(t)=\begin{cases}0 & \left(t<\frac{3}{4}\right)\\ 1 & \left(t=\frac{3}{4}\right)\\ 2 & \left(\frac{3}{4}<t<\frac{3}{2}\right)\\ 3 & \left(\frac{3}{2}\le t<3\right)\\ 4 & (3\le t<6)\\ 3 & (t\ge 6)\end{cases}$$



$\lim\limits_{t\to\alpha-}h(t)\neq\lim\limits_{t\to\alpha+}h(t)$인 α를 작은 수부터 크기순으로 나열하면

$\alpha_1=\frac{3}{4}$, $\alpha_2=\frac{3}{2}$, $\alpha_3=3$, $\alpha_4=6$이고

$h(\alpha_1)=1,\ h(\alpha_2)=3,\ h(\alpha_3)=4,\ h(\alpha_4)=3$

따라서

$$\sum_{k=1}^{m}\{4\alpha_k\times h(\alpha_k)\}$$

$$=4\times\left(\frac{3}{4}\times1+\frac{3}{2}\times3+3\times4+6\times3\right)$$

$$=141$$

45) [정답] ⑤

[해설]

두 점 $A(\sqrt{2},0)$, $B(0,\sqrt{2})$를 지나는 직선을 l이라 할 때, 직선 l의 방정식은 $x+y-\sqrt{2}=0$이고

원의 중심 O와 직선 l사이의 거리는 1이다.

$\overline{AB}=2$이므로 원 위의 한 점 P와 직선 l사이의 거리를 h라 하면 삼각형 ABP의 넓이는

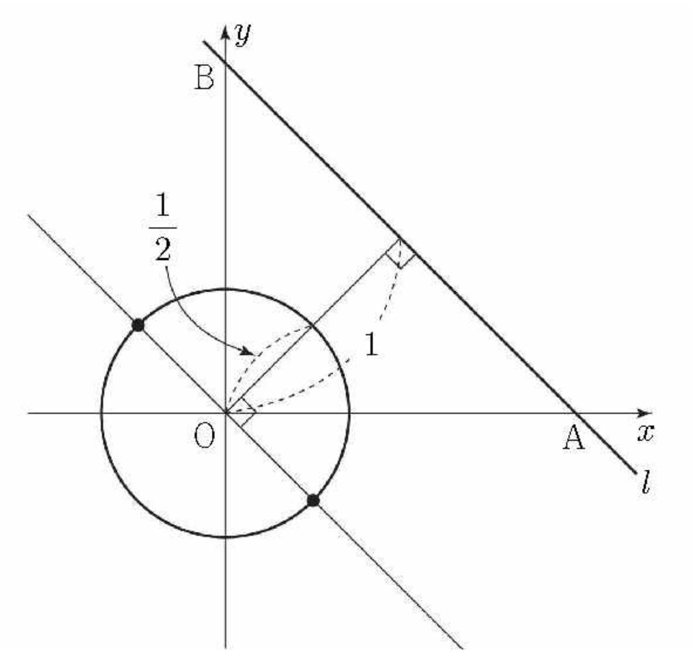
$\frac{1}{2}\times2\times h=h$

따라서 삼각형 ABP의 넓이가 자연수가 되도록 하는 점 P의 개수는 h가 자연수가 되도록 하는 점 P의 개수와 같다.

ㄱ. $t=\frac{1}{2}$일 때,

중심이 원점이고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}$인 원 위의 점 중 h가 자연수가 되는 경우는 $h=1$인 경우뿐이다. $h=1$이 되는 원 위의 점의 개수는 2이므로

$f\left(\frac{1}{2}\right)=2$(참)

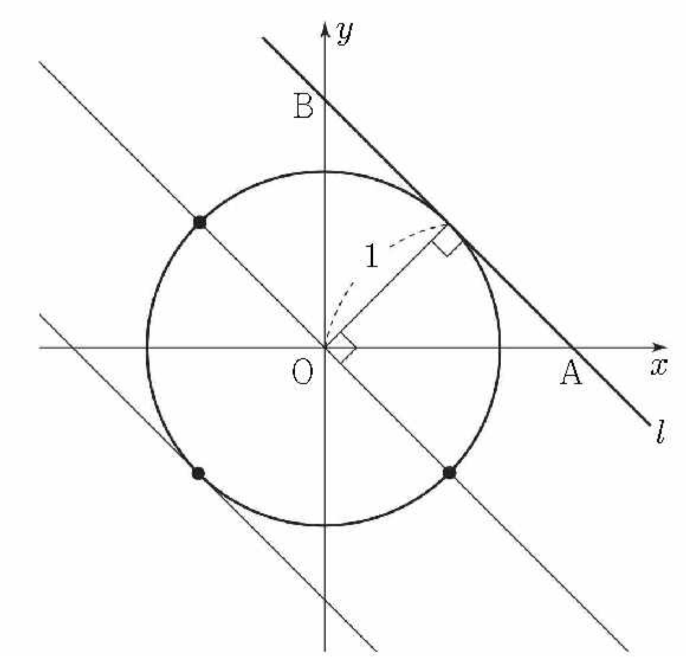


ㄴ. $t=1$일 때,

중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점 중 h가 자연수가 되는 경우는 $h=1$인 경우와 $h=2$인 경우이다.

$h=1$이 되는 원 위의 점의 개수는 2이고

$h=2$가 되는 원 위의 점의 개수는 1이므로 $f(1)=3$



$1<t<2$일 때,

중심이 원점이고 반지름의 길이가 t인 원 위의 점 중 h가 자연수가 되는 경우는 $h=1$인 경우와 $h=2$인 경우이다.

$h=1$이 되는 원 위의 점의 개수는 2이고

$h=2$가 되는 원 위의 점의 개수는 2이므로

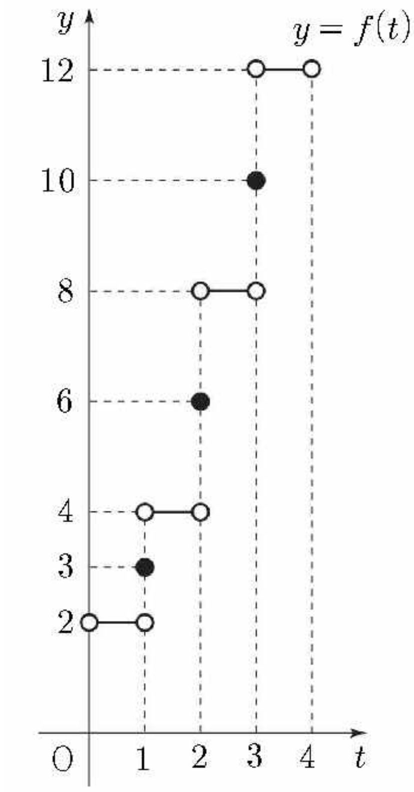
$\lim_{t \to 1+} f(t)=4$

$\lim_{t \to 1+} f(t) \neq f(1)$(참)

ㄷ. ㄴ과 같은 방법으로 구간 $(0, 4)$에서 함수 $f(t)$를 구하면

$$f(t)=\begin{cases} 2 & (0<t<1) \\ 3 & (t=1) \\ 4 & (1<t<2) \\ 6 & (t=2) \\ 8 & (2<t<3) \\ 10 & (t=3) \\ 12 & (3<t<4) \end{cases}$$

함수 $f(t)$의 그래프는 다음과 같다.



$0<a<4$인 실수 a에 대하여 함수 $f(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값은 1, 2, 3이므로 a의 개수는 3이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

46) [정답] **39**

[해설]

$y=|f(x)-g(x)|$가 조건에서

$h(0)=|f(0)-g(0)|=0$

$\therefore f(0)=g(0)$ …… ㉠

또, $x=0$에서 미분가능해야 하므로

$f'(0)-g'(0)=g'(0)-f'(0)$

즉, $f'(0)=g'(0)$이므로 $h'(0)=0$

…… ㉡

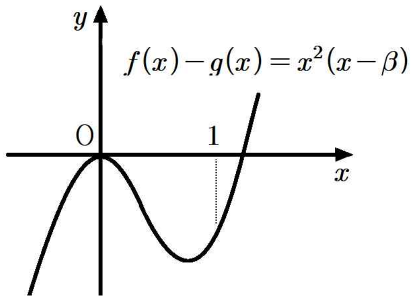
그런데, 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, 함수 $g(x)$는 일차함수이고 $x=0$에서 중근을 가져야 하므로

$y=f(x)-g(x)=x^2(x-\beta)$

로 놓을 수 있다.

또한 $x<1$인 모든 구간에서도 $h(x)=|f(x)-g(x)|$가 미분가능해야 하므로 아래 그림과 같이

$y=f(x)-g(x)\leq 0$이어야 한다.



즉, $h(x)=\begin{cases} -f(x)+g(x) & (x<1) \\ f(x)+g(x) & (x \geq 1) \end{cases}$

$x=1$에서 미분가능하므로 연속이어야 한다.

즉, $-f(1)+g(1)=f(1)+g(1)$

또 미분가능하므로 $-f'(1)+g'(1)=f'(1)+g'(1)$

$$\therefore f(1)=0,\ f'(1)=0$$

따라서 $f(x)=(x-\alpha)(x-1)^2$ …… ㉢

로 놓을 수 있다.

㉠에서 $g(0)=f(0)$이고, ㉢에서 $f(0)=-\alpha$이므로

$$g(0)=-\alpha$$

㉢을 미분하면 $f'(x)=(x-1)^2+2(x-\alpha)(x-1)$ …… ㉣

㉡에서 $g'(0)=f'(0)$이고, ㉣에서 $f'(0)=1+2\alpha$이므로

$$g'(0)=1+2\alpha$$

따라서 $g(x)$는 $(0,\ -\alpha)$를 지나고 기울기가 $1+2\alpha$인 일차함수이므로 $g(x)=(1+2\alpha)x-\alpha$ …… ㉤

조건에서 $h(2)=5$이고, ㉢에서 $f(2)=2-\alpha$, ㉤에서 $g(2)=3\alpha+2$이므로

$$f(2)+g(2)=(2-\alpha)+2+4\alpha-\alpha=5$$

$$\therefore \alpha=\frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)^2,\ g(x)=2x-\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}\therefore h(4)&=f(4)+g(4)\\&=\frac{7}{2}\times 3^2+\frac{15}{2}\\&=\frac{78}{2}=39\end{aligned}$$

47) [정답] 105

[해설]

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 개수를 $p(\neq 0)$라 하면

조건 (가)에서

$f(x)=p(x-1)(x-3)(x-q)(p,q$는 상수)

로 놓을 수 있고,

조건 (나)에서 $q<1$이다. 이때

$$\begin{aligned}f(a-x)&=p(a-x-1)(a-x-3)(a-x-q)\\&=-p(x-a+1)(x-a+3)(x-a+q)\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}f(x)f(a-x)=&-p^2(x-1)(x-3)(x-q)\\&\times(x-a+1)(x-a+3)(x-a+q)\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}g(x)&=|f(x)f(a-x)|\\&=p^2|(x-1)(x-3)(x-q)\\&\quad\times(x-a+1)(x-a+3)(x-a+q)|\end{aligned}$$

이고 $p<1<3$이고 $a-3<a-1<a-q$이므로

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

$g(x)=p^2|(x-\alpha)^2(x-\beta)^2(x-\gamma)^2|$ 꼴이어야 한다.

따라서

$a-3=q, a-1=1,\ a-q=3$ 이어야 한다.

따라서 $a=2,\ q=-1$이므로

$f(x)=p(x+1)(x-1)(x-3)$

$f(a-x)=-p(x+1)(x-1)(x-3)=-f(x)$이다.

따라서

$g(x)=|f(x)f(a-x)|=f(x)^2$ 이므로

$$\begin{aligned}\frac{g(4a)}{f(0)\times f(4a)}&=\frac{f(8)^2}{f(0)\times f(8)}\\&=\frac{f(8)}{f(0)}\\&=\frac{p\times 9\times 7\times 5}{p\times 1\times(-1)\times(-3)}\\&=105\end{aligned}$$

48) [정답] 35

[해설]

조건 (가)에서

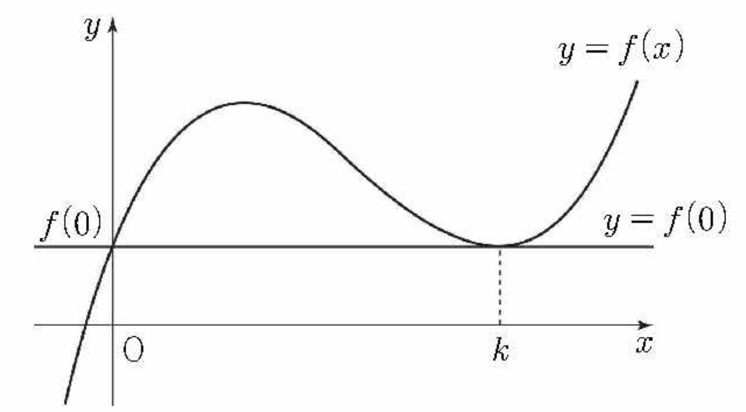
$g(k)=0$인 양수 k가 존재한다.

$$g(k)=\frac{f(k)-f(0)}{k}=0$$

$f(k)=f(0)$

조건 (가)에 의하여 함수 $f(x)$의

그래프는 점 $(k,\ f(k))$에서 직선 $y=f(0)$과 접한다.



$f(x)=x(x-k)^2+f(0)$

$f'(x)=(x-k)^2+2x(x-k)$

$=(3x-k)(x-k)$ …… ㉠

$g(t)=\dfrac{f(t)-f(0)}{t}=\dfrac{t(t-k)^2}{t}=(t-k)^2$

조건 (나)에서 $f'(a)=g(a)$

$(3a-k)(a-k)=(a-k)^2$

$2a(a-k)=0$

$a>0$이므로 $a=k$

㉠에서 $f'(k)=0$이므로

$g(a)=0$ …… ㉡

조건 (나)에서 $f'\left(\dfrac{5}{3}\right)=g(a)$이고

㉡에서 $g(a)=0$이므로 $f'\left(\dfrac{5}{3}\right)=0$

㉠에서 $f'(x)=0$에서

$x=\dfrac{k}{3}$ 또는 $x=k$이므로

$\dfrac{k}{3}=\dfrac{5}{3}$ 또는 $k=\dfrac{5}{3}$

따라서 $k=5$

$f'(x)=(3x-5)(x-5)$

$g(t)=(t-5)^2$

이차방정식 $f'(x)=g(m)$에서

$3x^2-20x-m^2+10m=0$

이차방정식 $f'(x)-g(m)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-20)^2-4\times3\times(-m^2+10m)$

$=12(m-5)^2+100>0$

이므로 이차방정식 $f'(x)-g(m)=0$은 m의 값에 관계없이 서로 다른 두 실근을 갖는다.

서로 다른 두 실근을 c_1, $c_2(c_1<c_2)$라 하자.

$n(A_m)=2$이려면

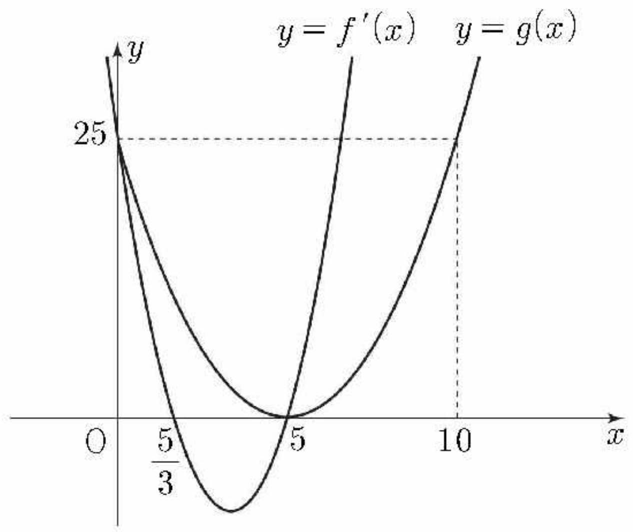
$0<c_1<c_2\le m$이어야 한다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$c_1c_2=\dfrac{-m^2+10m}{3}>0$

$0<m<10$

두 함수 $y=f'(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



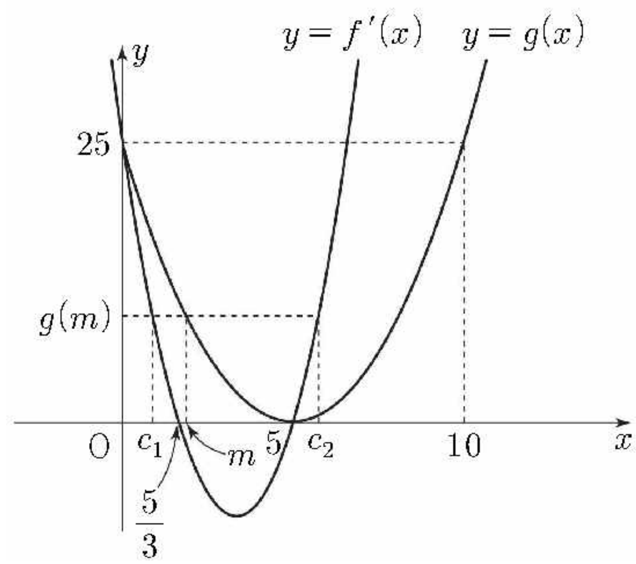
$g(m)=(m-5)^2\ge0$이므로

$f'(x)=g(m)$에서

$f'(x)=(3x-5)(x-5)\ge0$

$x\le\dfrac{5}{3}$ 또는 $x\ge5$

(i) $0<m<5$인 경우



$0<c_1<m<5<c_2$이므로

$A_m=\{c_1\}$

$n(A_m)\ne2$

(ii) $m=5$인 경우

$g(5)=0$이므로

$f'(x)=g(5)=0$

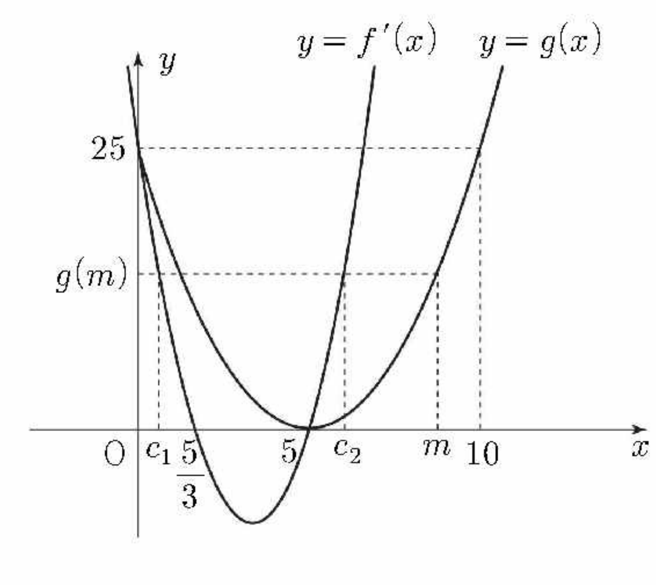
$(3x-5)(x-5)=0$

$x=\dfrac{5}{3}$ 또는 $x=5$

$A_5=\left\{\dfrac{5}{3},\ 5\right\}$

$n(A_5)=2$

(iii) $5<m<10$인 경우



$0 < c_1 < c_2 < m$이므로

$A_m = \{c_1,\ c_2\}$

$n(A_m) = 2$

(i), (ii), (iii)에 의해 $n(A_m) = 2$를 만족시키는

자연수 m은 5, 6, 7, 8, 9

따라서 $5+6+7+8+9=35$

49) [정답] 38

[해설]

이차함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극대이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=-1$에서 대칭이다.

그러므로

$f(-2)=f(0)=h(0)$

이때 $h(0)=k$라 하면 $f(x)$는

$f(x)=ax(x+2)+k$

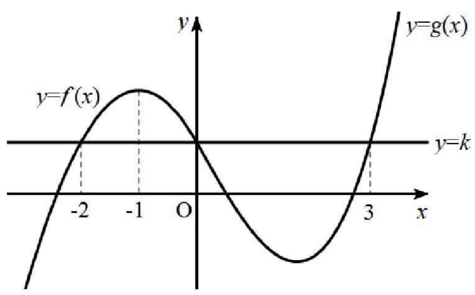
$\quad =ax^2+2ax+k \ (a<0)$

로 놓을 수 있다.

한편, $g(x)$가 삼차함수이므로 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위해서는 $x=0$에서의 곡선 $y=g(x)$에 접하는 접선의 기울기는 음수이어야 한다.

또, 방정식 $h(x)=h(0)$의 모든 실근이 합이 1이어야 하므로 다음 두 가지로 나눌 수 있다.

(i) $g(x)$의 최고차항의 계수가 양수인 경우



$g(x)=px(x-3)(x-q)+k$

$\quad =p\{x^3-(q+3)x^2+3qx\}+k$

한편, $g(x)$의 이차항의 계수가 0이므로 $q=-3$이고

$g(x)=p(x^3-9x)+k$

이때, $g'(x)=p(3x^2-9)$이므로 $g'(x)=0$에서

$x=\sqrt{3}$ 또는 $x=-\sqrt{3}$

그러므로 함수 $h(x)$는 $x=\sqrt{3}$에서 극소이다.

한편, $x=0$에서의 곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기와 $x=0$에서의 곡선 $y=g(x)$의 접선의 기울기가 같아야 하고

$f'(x)=2ax+2a,\quad g'(x)=p(3x^2-9)$이므로

$2a=-9p \qquad \cdots\cdots㉠$

또, 구간 $[-2,\ 3]$에서 $h(x)$의 최댓값은 $f(-1)$, 최솟값은 $g(\sqrt{3})$이므로 ㉠을 이용하면

$$\begin{aligned} f(-1)-g(\sqrt{3}) &= (-a+k)-(-6\sqrt{3}p+k) \\ &= -a+6\sqrt{3}p \\ &= \frac{9}{2}p+6\sqrt{3}p \\ &= \frac{9+12\sqrt{3}}{2}p \\ &= 3+4\sqrt{3} \end{aligned}$$

그러므로

$p=\dfrac{2}{3}$이고

$a=-\dfrac{9}{2}p=-3$

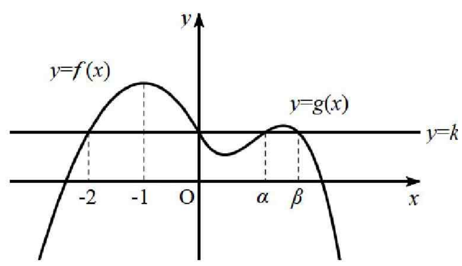
따라서

$f'(x)=-6x-6,\ g'(x)=2x^2-6$

이므로

$$\begin{aligned} h'(-3)+h'(4) &= f'(-3)+g'(4) \\ &= 12+26=38 \end{aligned}$$

(ii) $g(x)$의 최고차항의 계수가 음수인 경우



$g(x)=px(x-\alpha)(x-\beta)+k(\alpha+\beta=3)$

로 놓으면

$g(x)=p\{x^3-(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x\}+k$

$\quad =p\{x^3-3x^2+\alpha\beta x\}+k$

이므로 이차항의 계수가 0이 아니다.

그러므로 이러한 경우는 없다.

따라서 (i)에서 구하는 값은 38이다.

50) [정답] 432

[해설]

$f(x)$가 최고차항의 계수가 4인 삼차함수이므로

$g(x)=\int_t^x f(s)ds$는 최고차항의 계수가 1인

사차함수이고 실수 전체의 집합에서 함수 $g(x)-g(a)$는

미분가능하다.

$g(x)\geq g(a)$일 때, $|g(x)-g(a)|=g(x)-g(a)g(x)<g(a)$일 때,

$|g(x)-g(a)|=-\{g(x)-g(a)\}$

이므로 함수 $|g(x)-g(a)|$은 $g(x)-g(a)\neq 0$인

모든 x에서 미분가능하다.

$g(x)-g(a)=0$를 만족시키는 x의 값을 k라 하면,

$g(k)=g(a)$이므로

$$\frac{|g(x)-g(a)|-|g(k)-g(a)|}{x-k}=\frac{|g(x)-g(k)|}{x-k}$$

(i) $x=k$의 좌우에서 $g(x)-g(a)$의 부호가 같을 때

$$\lim_{x\to k-}\frac{|g(x)-g(k)|}{x-k}=\lim_{x\to k+}\frac{|g(x)-g(k)|}{x-k}$$

이므로 함수 $|g(x)-g(a)|$는 $x=k$에서 미분가능하다.

(ii) $x=k$의 좌우에서 $g(x)-g(a)$의 부호가 다르다고

$f(k)=0$일 때

$$\lim_{x\to k-}\frac{|g(x)-g(k)|}{x-k}=\lim_{x\to k+}\frac{|g(x)-g(k)|}{x-k}$$

이므로 함수 $|g(x)-g(a)|$는 $x=k$에서 미분가능하다.

(iii) $x=k$의 좌우에서 $g(x)-g(a)$의 부호가 다르고,

$f(k)\neq 0$일 때,

$$\lim_{x\to k-}\frac{|g(x)-g(a)|}{x-k}\neq\lim_{x\to k+}\frac{|g(x)-g(a)|}{x-k}$$

이므로 함수 $|g(x)-g(a)|$는 $x=k$에서 미분가능하지 않다.

(나)에서 함수 $|g(x)-g(a)|$가 미분가능하지 않은 x의 개수가

1이므로 $g(x)-g(a)=0,\ g'(x)=f(x)\neq 0$

인 x가 단 하나 존재한다는 것을 알 수 있다.

그러므로 사차함수 $y=g(x)$는 단 하나의 극솟값을 갖고 함수

$g(x)$의 그래프와 직선 $y=g(a)$는 서로 다른 두 점에서

만난다.

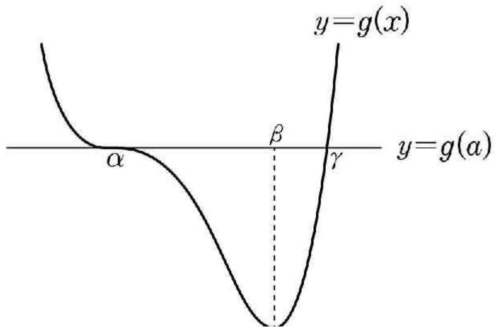
$g'(x)=0$인 방정식 $g(x)-g(a)=0$의 근을 α,

함수 $g(x)$가 극솟값을 가질 때의 x의 값을 β라

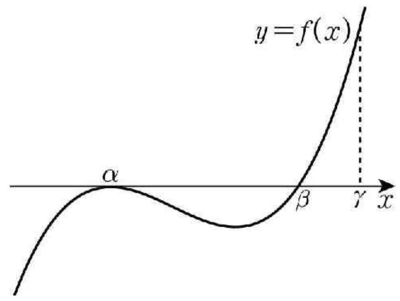
하면 α, β의 대소관계에 따라 다음과 같이 두 경우

로 나눌 수 있다.

(i) $\alpha<\beta$인 경우 (단, $g(\gamma)=g(\alpha)$, $\beta<\gamma$)



함수 $y=g(x)$의 도함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 보면



$g(\alpha)=g(\gamma)=g(a)$이므로 $\alpha=a$ 또는 $\gamma=a$

(가)에서 $f'(a)=0$이므로 $\alpha=a$이다.

따라서 $f(x)=4(x-a)^2(x-\beta)$이다.

$h(t)=g(a)=\int_t^a f(s)ds=-\int_a^t f(s)ds$에서

$h'(t)=-f(t)$

함수 $h(t)$가 $t=2$에서 최댓값, 즉 극댓값을 가지

므로 $h'(2)=-f(2)=0$

따라서 $a=2$ 또는 $\beta=2$이다.

$a=2$이면 $h(2)=\int_2^2 f(t)dt=0\neq 27$

이므로 $a\neq 2$

$\beta=2$이면

$h(3)=\int_3^a f(s)ds=0$이고,

$h(2)=\int_2^a f(s)ds=27$이므로

$h(2)-h(3)=\int_2^3 f(s)ds=27$이다.

$$\int_2^3 f(s)ds$$

$$=\int_2^3 4(s-a)^2(s-2)ds$$

$$=\int_2^3 4\{s^3-2(a+1)s^2+(a^2+4a)s-2a^2\}ds$$

$$=\left[s^4-\frac{8}{3}(a+1)s^3+2(a^2+4a)s^2-8a^2s\right]_2^3$$

$$=65-\frac{152}{3}(a+1)+10(a^2+4a)-8a^2$$

$$=2a^2-\frac{32}{3}a+\frac{43}{3}=27$$ 이므로

$3a^2-16a-19=0$

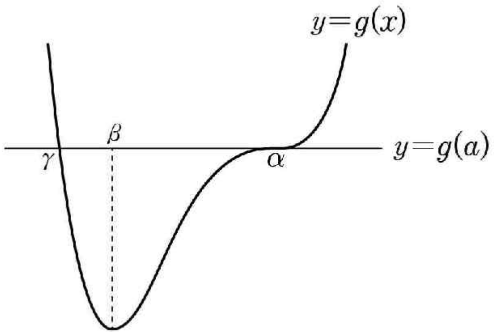
$(a+1)(3a-19)=0$

$a=-1$ 또는 $a=\dfrac{19}{3}$

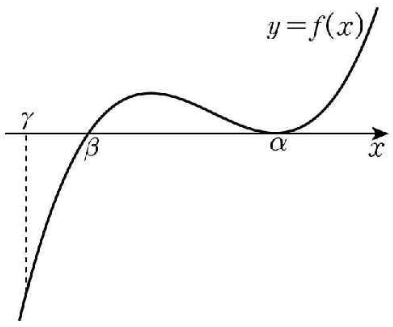
$a<2$이므로 $a=-1$이다.

$f(x)=4(x+1)^2(x-2)$라 하면 함수 $f(x)$는 주어진 조건을 만족시킨다.

(ii) $\alpha>\beta$인 경우 (단, $g(\gamma)=g(\alpha)$, $\gamma<\beta$)



함수 $y=g(x)$의 도함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 보면



(가)에서 $f'(a)=0$이므로 $\alpha=a$이다.

따라서 $f(x)=4(x-a)^2(x-\beta)$이다.

$\alpha<\beta$인 경우와 마찬가지로 $\beta=2$이다.

$f(x)=4(x-a)^2(x-2)$

$a\neq 3$이면 $h(3)=\displaystyle\int_3^a f(s)ds\neq 0$이므로 $a=3$

따라서 $f(x)=4(x-3)^2(x-2)$이고

$h(2)=\displaystyle\int_2^a f(s)ds=\int_2^3 4(s-3)^2(s-2)ds=\frac{1}{3}$

$h(2)\neq 27$이므로 주어진 조건을 만족시키는 함수$f(x)$가 존재하지 않는다.

따라서 $f(x)=4(x+1)^2(x-2)$이다.

$f(5)=4\times 36\times 3=432$

51) [정답] 80

[해설]

$g(x)=\displaystyle\int_0^x (t-1)f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$g'(x)=(x-1)f(x)=\begin{cases}-3x^3+3x^2 & (x<1)\\ 2x^2-8x+6 & (x\geq 1)\end{cases}$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 적분하면

$$g(x)=\begin{cases}-\dfrac{3}{4}x^4+x^3+C_1 & (x<1)\\ \dfrac{2}{3}x^3-4x^2+6x+C_2 & (x\geq 1)\end{cases}$$

(단, C_1, C_2는 적분상수)

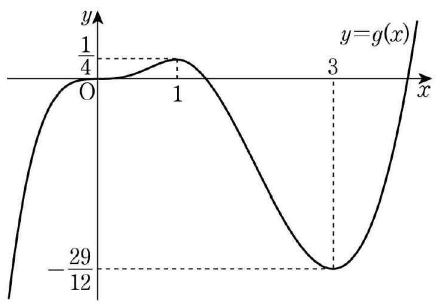
$g'(1)=0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$g(0)=0$에서 $C_1=0$이고 $-\dfrac{3}{4}+1=\dfrac{2}{3}-4+6+C_2$에서

$C_2=-\dfrac{29}{12}$

$$g(x)=\begin{cases}-\dfrac{3}{4}x^4+x^3 & (x<1)\\ \dfrac{2}{3}x^3-4x^2+6x-\dfrac{29}{12} & (x\geq 1)\end{cases}$$

함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



위의 그래프를 이용하여 함수 $h(t)$를 구하면

$$h(t)=\begin{cases}1 & \left(t<-\dfrac{29}{12} \text{ 또는 } t>\dfrac{1}{4}\right)\\ 2 & \left(t=-\dfrac{29}{12} \text{ 또는 } t=\dfrac{1}{4}\right)\\ 3 & \left(-\dfrac{29}{12}<t<\dfrac{1}{4}\right)\end{cases}$$

이므로 $\left|\displaystyle\lim_{t\to a+}h(t)-\lim_{t\to a-}h(t)\right|=2$를 만족시키는 실수 a의 값은 $\dfrac{1}{4}$과 $-\dfrac{29}{12}$뿐이다.

그러므로 $S=\left|\dfrac{1}{4}\right|+\left|-\dfrac{29}{12}\right|=\dfrac{8}{3}$

따라서 $30S=30\times\dfrac{8}{3}=80$

[참고]

$g(x)=\displaystyle\int_0^x (t-1)f(t)dt$는 다음과 같이 구할 수도 있다.

(i) $x<1$일 때,

$$g(x)=\int_0^x (t-1)(-3t^2)dt=-\frac{3}{4}x^4+x^3$$

(ii) $x\geq 1$일 때,

$$g(x)=\int_0^1 (t-1)(-3t^2)dt+\int_1^x 2(t-1)(t-3)dt$$
$$=\frac{2}{3}x^3-4x^2+6x-\frac{29}{12}$$

52) [정답] 37

[해설]

함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고,

$x<0$일 때, $f'(x)=6x+t$,

$x>0$일 때, $f'(x)=-6x+t$이므로 함수 $f(x)$는

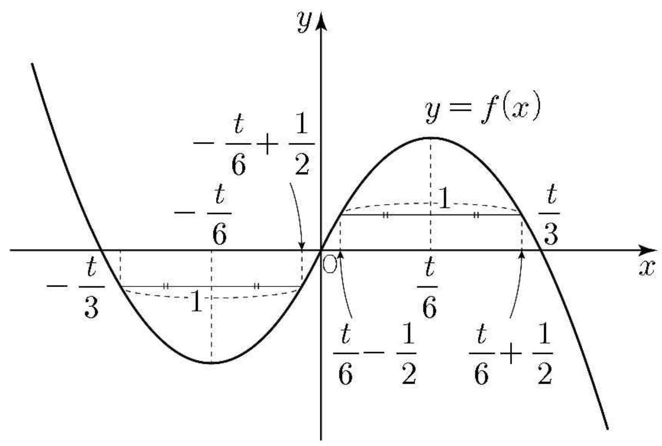
$x=-\frac{t}{6}$에서 극소, $x=\frac{t}{6}$에서 극대이다.

$f(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=-\frac{t}{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\frac{t}{3}$

$f_1(x)=3x^2+tx$, $f_2(x)=-3x^2+tx$라 하자.

(i) $\frac{t}{3}\geq 1$인 경우 (즉, $t\geq 3$)



조건(가)에서 닫힌구간 $[k-1, k]$의 길이는 k의 값에 관계없이 항상 1로 일정하다.

함수 $f_1(x)$의 그래프는 직선 $x=-\frac{t}{6}$에 대하여 대칭이므로 방정식 $f_1(k-1)=f_1(k)$를 만족시키는 k의 값은 $k=-\frac{t}{6}+\frac{1}{2}$

함수 $f_2(x)$의 그래프는 직선 $x=\frac{t}{6}$에 대하여 대칭이므로 방정식 $f_2(k-1)=f_2(k)$를 만족시키는 k의 값은 $k=\frac{t}{6}+\frac{1}{2}$

함수 $f(x)$는 $x=\frac{t}{6}$에서 극대이므로 조건(가)를 만족시키는 k의 값의 범위는

$-\frac{t}{6}+\frac{1}{2}\leq k\leq \frac{t}{6}$ …… ㉠

조건(나)에서 닫힌구간 $[k, k+1]$의 길이는 k의 값에 관계없이 항상 1로 일정하고

함수 $f(x)$는 $x=-\frac{t}{6}$에서 극소이므로

조건(나)를 만족시키는 $k+1$의 값의 범위는

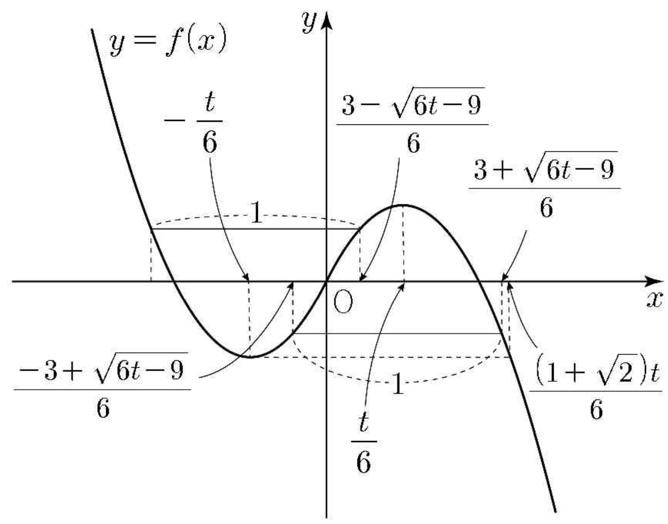
$k+1\leq -\frac{t}{6}$ 또는 $k+1\geq \frac{t}{6}+\frac{1}{2}$

즉, $k\leq -\frac{t}{6}-1$ 또는 $k\geq \frac{t}{6}-\frac{1}{2}$…… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $t\geq 3$에서 조건(가), (나)를 만족시키는 k의 값의 범위는

$\frac{t}{6}-\frac{1}{2}\leq k\leq \frac{t}{6}$이므로 $g(t)=\frac{t}{6}-\frac{1}{2}=\frac{t-3}{6}$

(ii) $\frac{t}{3}<1$인 경우 (즉, $6-3\sqrt{2}\leq t<3$)



$f_1\left(-\frac{t}{6}\right)=3\times\left(-\frac{t}{6}\right)^2+t\left(-\frac{t}{6}\right)=-\frac{t^2}{12}$이므로

$f_2(x)=-\frac{t^2}{12}$을 만족시키는 양수 x의 값은

x에 대한 방정식 $-3x^2+tx=-\frac{t^2}{12}$의

양의 실근인 $x=\frac{(1+\sqrt{2})t}{6}$

$t\geq 6-3\sqrt{2}$이므로

$$\frac{(1+\sqrt{2})t}{6}-\left(-\frac{t}{6}\right)$$
$$=\frac{(2+\sqrt{2})t}{6}\geq\frac{(2+\sqrt{2})(6-3\sqrt{2})}{6}=1$$

조건(가)에서 닫힌구간 $[k-1, k]$의 길이는 k의 값에 관계없이 항상 1로 일정하다.

$6-3\sqrt{2}\leq t<3$에서

방정식 $f_1(k-1)=f_2(k)$를 만족시키는 k의 값은 k에 대한 방정식

$3(k-1)^2+t(k-1)=-3k^2+tk$의 실근인

$k=\frac{3-\sqrt{6t-9}}{6}$ 또는 $k=\frac{3+\sqrt{6t-9}}{6}$

함수 $f(x)$는 $x=\frac{t}{6}$에서 극대이므로

조건(가)를 만족시키는 k의 값의 범위는

$\frac{3-\sqrt{6t-9}}{6} \le k \le \frac{t}{6}$ …… ㉢

조건(나)에서 닫힌구간 $[k, k+1]$의 길이는 k의 값에 관계없이 항상 1로 일정하고

함수 $f(x)$는 $x=-\frac{t}{6}$에서 극소이므로

조건(나)를 만족시키는 $k+1$의 값의 범위는

$k+1 \le -\frac{t}{6}$ 또는 $k+1 \ge \frac{3+\sqrt{6t-9}}{6}$

즉, $k \le -\frac{t}{6}-1$ 또는 $k \ge \frac{-3+\sqrt{6t-9}}{6}$ …… ㉣

㉢, ㉣ 에 의하여

$6-3\sqrt{2} \le t < 3$에서 조건(가), (나)를

만족시키는 k의 값의 범위는

$\frac{3-\sqrt{6t-9}}{6} \le k \le \frac{t}{6}$이므로

$g(t)=\frac{3-\sqrt{6t-9}}{6}$

(i), (ii)에 의하여

$$g(t)=\begin{cases} \frac{3-\sqrt{6t-9}}{6} & (6-3\sqrt{2} \le t < 3) \\ \frac{t-3}{6} & (t \ge 3) \end{cases}$$

따라서

$3\int_2^4 \{6g(t)-3\}^2 dt$

$=3\int_2^3 \left(6\times\frac{3-\sqrt{6t-9}}{6}-3\right)^2 dt$

$+3\int_3^4 \left\{6\times\left(\frac{t-3}{6}\right)-3\right\}^2 dt$

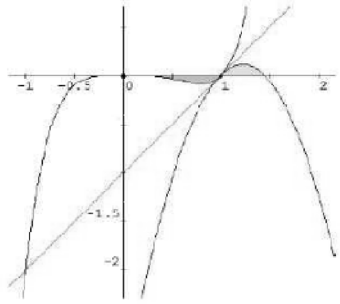
$=3\int_2^3 (6t-9)dt+3\int_3^4 (t-6)^2 dt$

$=18+19$

$=37$

53) [정답] ②

[해설]



$f(x)$와 $y=x-1$의 접점의 x좌표를 t라 하면

$f'(t)=5t^4-4at^3=1$

$t^5-at^4=t-1$

정리하면

$a=\frac{5t^4-1}{4t^3}=\frac{t^5-t+1}{t^4}$

$t^5+3t-4=0,\ (t-1)(t^4+t^3+t^2+t+4)=0$

$\therefore\ t=1,\ a=1,\ f(x)=x^4(x-1)$

한편 $g(x)$와 $y=x-1$의 접점은 $(1, 0)$이므로

$g'(1)=k(1-b)=1$

이제 두 영역의 넓이에서

$\int_0^1 (x^4-x^5)dx=\int_1^b k(x-1)(x-b)dx$

$\frac{1}{30}=\frac{-k(b-1)^3}{6},\ k(b-1)^3=-\frac{1}{5}$

$k=\frac{1}{1-b}=-\frac{1}{5(b-1)^3}$

$(b-1)^2=\frac{1}{5}$

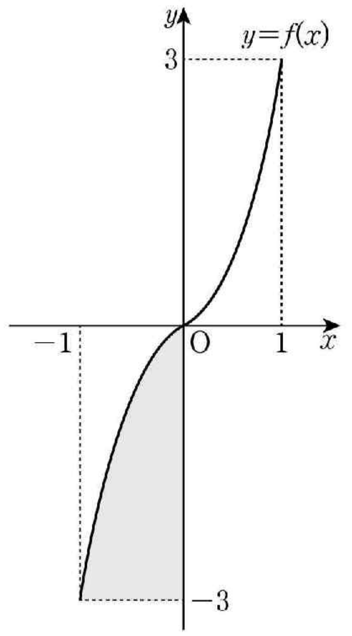
$\therefore\ b=1+\frac{1}{\sqrt{5}},\ k=-\sqrt{5}$

따라서 $abk=-1-\sqrt{5}$

54) [정답] 41

[해설]

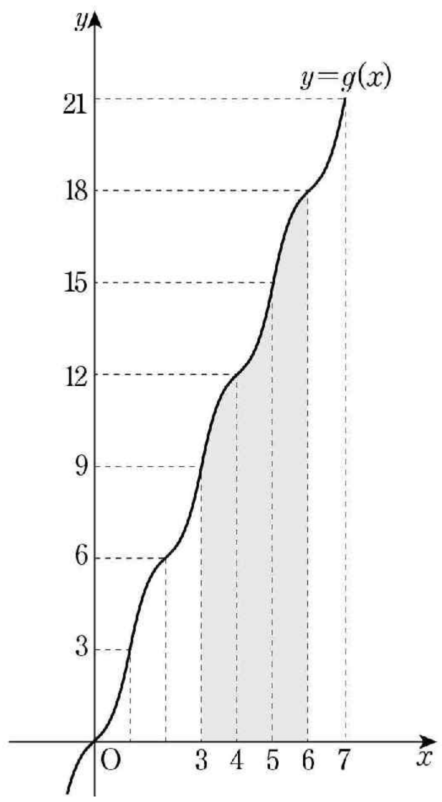
문제에서 $\int_0^1 f(x)dx=1$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.



그러므로 그림에서 색칠된 영역의 넓이는 $3-1=2$

닫힌구간 $[3,6]$에서 $\int_3^6 g(x)dx = \int_3^6 |g(x)|dx$는

곡선 $y=g(x)$와 x축 및 두 직선 $x=3$, $x=6$으로 둘러싸인 도형의 넓이이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 구하는 영역을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



닫힌구간 $[3,5]$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼 평행이동하고 y축의 방향으로 12만큼 평행이동한 그래프이므로

$$\int_3^5 g(x)dx = 2\times 12 = 24$$

닫힌구간 $[5,7]$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 6만큼 평행이동하고 y축의 방향으로 18만큼 평행이동한 그래프이므로

$$\int_5^6 g(x)dx = 15\times 1 + 2 = 17$$

따라서 $\int_3^6 g(x)dx = \int_3^5 g(x)dx + \int_5^6 g(x)dx = 41$

55) [정답] 28

[해설]

$$f_1(x) = ax^2 + (2b-3)x + a^2 - 3,$$

$$f_2(x) = -\frac{1}{3}ax^2 + (b+5)x + a^2 - 1$$

이라 하면

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & (x<k) \\ f_2(x) & (x \geq k) \end{cases}$$

$f(x)>0$이면 $\dfrac{|f(x)|}{f(x)}=1$,

$f(x)<0$이면 $\dfrac{|f(x)|}{f(x)}=-1$

임의의 실수 α에 대하여 $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$가 존재하므로

(i) $x_1 < x < x_2$인 모든 x에 대하여 $f(x) \geq 0$일 때

$x_1 < \alpha < x_2$인 임의의 α에 대하여

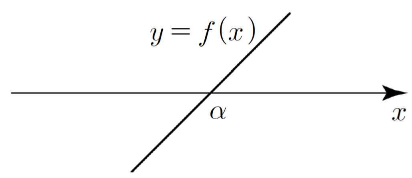
$$\lim_{t\to\alpha+}\frac{|f(t)|}{f(t)} = \lim_{t\to\alpha-}\frac{|f(t)|}{f(t)} = 1,\ g(\alpha)=0$$

(ii) $x_3 < x < x_4$인 모든 x에 대하여 $f(x) \leq 0$일 때

$x_3 < \alpha < x_4$인 임의의 α에 대하여

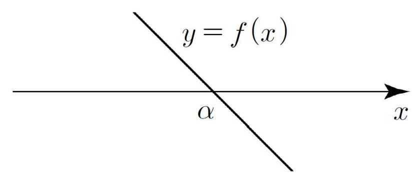
$$\lim_{t\to\alpha+}\frac{|f(t)|}{f(t)} = \lim_{t\to\alpha-}\frac{|f(t)|}{f(t)} = -1,\ g(\alpha)=0$$

(iii) $f(\alpha)=0$이고 $x=\alpha$의 좌우에서 $f(x)$의 함숫값의 부호가 음(-)에서 양(+)으로 변하는 경우



$\lim\limits_{t\to\alpha+}\dfrac{|f(t)|}{f(t)}=1$, $\lim\limits_{t\to\alpha-}\dfrac{|f(t)|}{f(t)}=-1$이므로 $g(\alpha)=2$

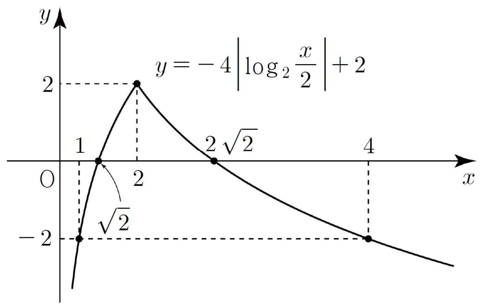
(iv) $f(\alpha)=0$이고 $x=\alpha$의 좌우에서 $f(x)$의 함숫값의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 변하는 경우



$\lim\limits_{t\to\alpha+}\dfrac{|f(t)|}{f(t)}=-1$, $\lim\limits_{t\to\alpha-}\dfrac{|f(t)|}{f(t)}=1$이므로 $g(\alpha)=-2$

(i), (ii), (iii), (iv)에 의하여 함수 $g(x)$의 함숫값이 될 수 있는 것은 -2, 0, 2

함수 $y=-4\left|\log_2\dfrac{x}{2}\right|+2$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $y=g(x)$의 그래프와 함수 $y=-4\left|\log_2\frac{x}{2}\right|+2$의 그래프의 교점의 y좌표는 -2, 0, 2만 가능하다.

방정식 $-4\left|\log_2\frac{x}{2}\right|+2=-2$의 해는

$x=1$ 또는 $x=4$

방정식 $-4\left|\log_2\frac{x}{2}\right|+2=0$의 해는

$x=\sqrt{2}$ 또는 $x=2\sqrt{2}$

방정식 $-4\left|\log_2\frac{x}{2}\right|+2=2$의 해는 $x=2$

함수 $g(x)$의 그래프와 함수 $y=-4\left|\log_2\frac{x}{2}\right|+2$의 그래프의 교점의 개수가 5이므로 교점은

$(1,\ -2)$, $(\sqrt{2},\ 0)$, $(2,\ 2)$, $(2\sqrt{2},\ 0)$, $(4,\ -2)$

이고 $g(1)=g(4)=-2$, $g(2)=2$, $f(1)=f(2)=f(4)=0$

$k\le 1$이면 $x\ge k$에서

$f(x)=f_2(x)=-\frac{1}{3}ax^2+(b+5)x+a^2-1$이므로

$f(1)=f(2)=f(4)=0$이 성립하지 않는다.

$k>4$이면 $x<k$에서

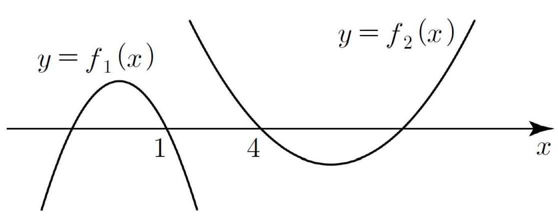
$f(x)=f_1(x)=ax^2+(2b-3)x+a^2-3$이므로

$f(1)=f(2)=f(4)=0$이 성립하지 않는다.

그러므로 $1<k\le 4$이고

$f(1)=f_1(1)$, $f(4)=f_2(4)$ …… ㉠

$a<0$이면 함수 $f_1(x)$의 그래프는 위로 볼록, 함수 $f_2(x)$의 그래프는 아래로 볼록이고 $g(1)=g(4)=-2$, $f_1(1)=f_2(4)=0$을 만족시키는 두 곡선 $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$의 개형은 다음과 같다.



이때, $f_1(2)\ne 0$이고 $f_2(2)\ne 0$이므로 $f(2)=0$이 성립하지 않는다.

그러므로 $a>0$

㉠에 의하여

$f(1)=f_1(1)=a+(2b-3)+a^2-3=0$

$f(4)=f_2(4)=-\frac{16}{3}a+(4b+20)+a^2-1=0$

에서 $a=-\frac{31}{3}$ 또는 $a=3$

$a>0$이므로 $a=3$, $b=-3$

$$f(x)=\begin{cases}3x^2-9x+6 & (x<k)\\ -x^2+2x+8 & (x\ge k)\end{cases}$$

조건 (가)에 의하여

$$\lim_{x\to k-}f(x)=\lim_{x\to k+}f(x)$$

$$\lim_{x\to k-}(3x^2-9x+6)=\lim_{x\to k+}(-x^2+2x+8)$$

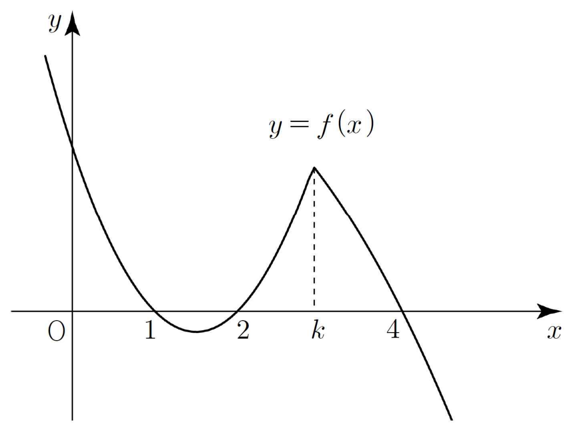
$$4k^2-11k-2=0,\ k=\frac{11\pm3\sqrt{17}}{8}$$

$1<k\le 4$이므로 $k=\frac{11+3\sqrt{17}}{8}$

따라서 $p=\frac{11}{8}$, $q=\frac{3}{8}$이므로 $16(p+q)=16\times\frac{14}{8}=28$

[참고]

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



56) [정답] 44

[해설]

$f(x)=(x-a)^2-a^2+b$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(a,\ -a^2+b)$

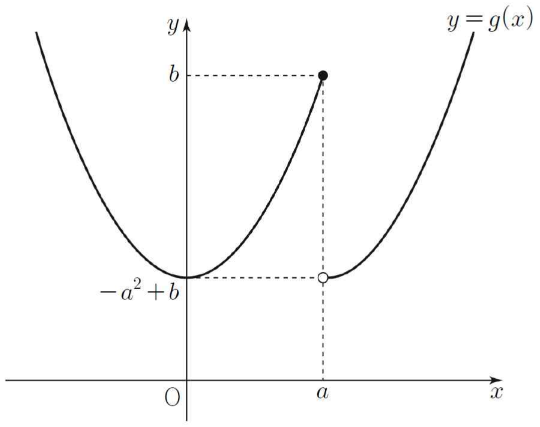
$f(x+a)=x^2-a^2+b$이므로 이차함수 $y=f(x+a)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ -a^2+b)$이고

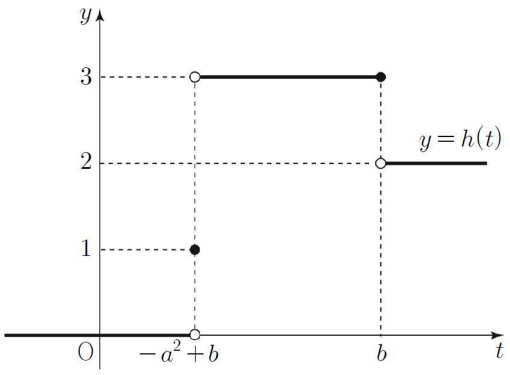
$g(a)=f(2a)=b$

(ⅰ) $a^2-b\le 0$일 때

$-a^2+b\ge 0$이므로

두 함수 $y=g(x)$, $y=h(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.





$t>b$일 때 $h(t)-2=0$이고

$t<-a^2+b+k$일 때 $h(t-k)=0$이다.

(a) $k>a^2$일 때

모든 실수 t에 대하여 $\{h(t)-2\}h(t-k)=0$이므로 함수 $\{h(t)-2\}h(t-k)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(b) $k=a^2$일 때

$\{h(t)-2\}h(t-k)=\begin{cases}0 & (t\neq b)\\ 1 & (t=b)\end{cases}$이므로

함수 $\{h(t)-2\}h(t-k)$는 $t=b$에서 불연속이다.

(c) $k<a^2$일 때

$\lim\limits_{t\to b+}\{h(t)-2\}=0$이고

$\lim\limits_{t\to b+}h(t-k)=\alpha_1$ $(\alpha_1=2,\ 3)$이므로

$\lim\limits_{t\to b+}\{h(t)-2\}h(t-k)=0$

한편 $\lim\limits_{t\to b-}\{h(t)-2\}=1$이고

$\lim\limits_{t\to b-}h(t-k)=\beta_1$ $(\beta_1=2,\ 3)$이므로

$\lim\limits_{t\to b-}\{h(t)-2\}h(t-k)\neq 0$

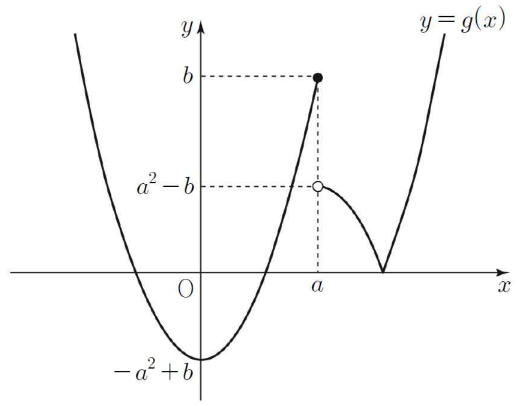
그러므로 함수 $\{h(t)-2\}h(t-k)$는 $t=b$에서 불연속이다.

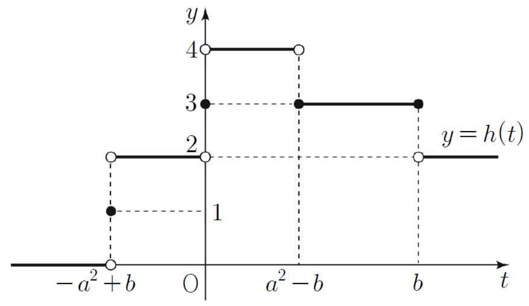
(a), (b), (c)에 의해 $k>a^2$인 임의의 실수 k에 대해서만 함수

$\{h(t)-2\}h(t-k)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(ii) $0<a^2-b<b$인 경우

두 함수 $y=g(x)$, $y=h(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.





$t>b$일 때 $h(t)-2=0$이고

$t<-a^2+b+k$일 때 $h(t-k)=0$이다.

(a) $k>a^2$일 때

모든 실수 t에 대하여 $\{h(t)-2\}h(t-k)=0$이므로 함수 $\{h(t)-2\}h(t-k)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(b) $k=a^2$일 때

$\{h(t)-2\}h(t-k)=\begin{cases}0 & (t\neq b)\\ 1 & (t=b)\end{cases}$이므로

함수 $\{h(t)-2\}h(t-k)$는 $t=b$에서 불연속이다.

(c) $k<a^2$

$\lim\limits_{t\to b+}\{h(t)-2\}=0$이고

$\lim\limits_{t\to b+}h(t-k)=\alpha_2$ $(\alpha_2=2,\ 3,\ 4)$이므로

$\lim\limits_{t\to b+}\{h(t)-2\}h(t-k)=0$

한편 $\lim\limits_{t\to b-}\{h(t)-2\}=1$이고

$\lim\limits_{t\to b-}h(t-k)=\beta_2$ $(\beta_2=2,\ 3,\ 4)$이므로

$\lim\limits_{t\to b-}\{h(t)-2\}h(t-k)\neq 0$

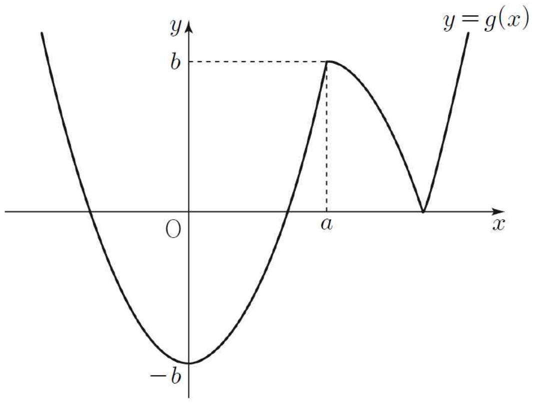
그러므로 함수 $\{h(t)-2\}h(t-k)$는 $t=b$에서 불연속이다.

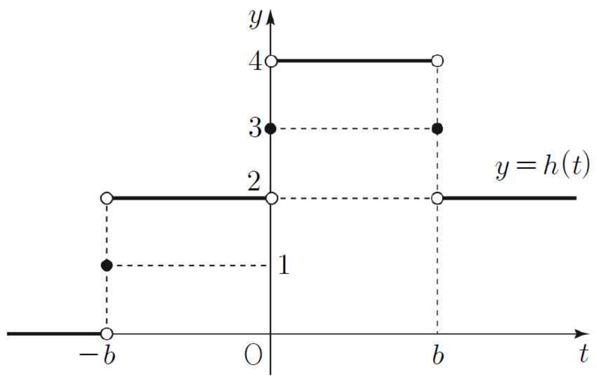
(a), (b), (c)에 의해 $k>a^2$인 임의의 실수 k에 대해서만 함수

$\{h(t)-2\}h(t-k)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(iii) $a^2-b=b$인 경우

두 함수 $y=g(x)$, $y=h(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.





$t>b$일 때 $h(t)-2=0$이고

$t<-b+k$일 때 $h(t-k)=0$이다.

(a) $k>2b$일 때

모든 실수 t에 대하여 $\{h(t)-2\}h(t-k)=0$이므로 함수 $\{h(t)-2\}h(t-k)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(b) $k=2b$일 때

$\{h(t)-2\}h(t-k)=\begin{cases} 0 & (t\neq b) \\ 1 & (t=b) \end{cases}$이므로

함수 $\{h(t)-2\}h(t-k)$는 $t=b$에서 불연속이다.

(c) $k<2b$일 때

$\lim\limits_{t\to b+}\{h(t)-2\}=0$이고

$\lim\limits_{t\to b+}h(t-k)=\alpha_3$ $(\alpha_3=2,\ 4)$이므로

$\lim\limits_{t\to b+}\{h(t)-2\}h(t-k)=0$이다.

한편 $\lim\limits_{t\to b-}\{h(t)-2\}=2$이고

$\lim\limits_{t\to b-}h(t-k)=\beta_3$ $(\beta_3=2,\ 4)$이므로

$\lim\limits_{t\to b-}\{h(t)-2\}h(t-k)\neq 0$이다.

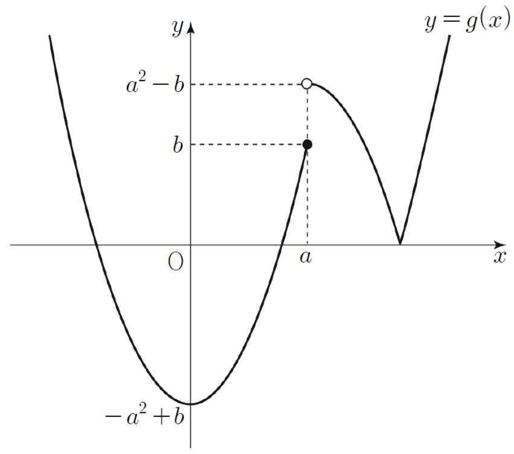
그러므로 함수 $\{h(t)-2\}h(t-k)$는 $t=b$에서 불연속이다.

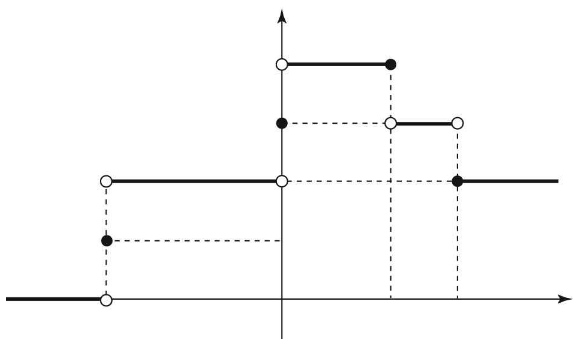
(a), (b), (c)에 의해 $k>2b$인 임의의 실수 k에 대해서만 함수

$\{h(t)-2\}h(t-k)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(ⅳ) $a^2-b>b$인 경우

두 함수 $y=g(x)$, $y=h(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.





$t\geq a^2-b$일 때 $h(t)-2=0$이고

$t<-a^2+b+k$일 때 $h(t-k)=0$이다.

(a) $k\geq 2(a^2-b)$일 때

모든 실수 t에 대하여 $\{h(t)-2\}h(t-k)=0$이므로 함수 $\{h(t)-2\}h(t-k)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(b) $k<2(a^2-b)$일 때

$\lim\limits_{t\to(a^2-b)+}\{h(t)-2\}=0$이고

$\lim\limits_{t\to(a^2-b)+}h(t-k)=\alpha_4$ $(\alpha_4=2,\ 3,\ 4)$이므로

$\lim\limits_{t\to(a^2-b)+}\{h(t)-2\}h(t-k)=0$이다.

한편 $\lim\limits_{t\to(a^2-b)-}\{h(t)-2\}=1$이고

$\lim\limits_{t\to(a^2-b)-}h(t-k)=\beta_4$ $(\beta_4=2,\ 3,\ 4)$이므로

$\lim\limits_{t\to(a^2-b)-}\{h(t)-2\}h(t-k)\neq 0$이다.

그러므로 함수 $\{h(t)-2\}h(t-k)$는 $t=a^2-b$에서 불연속이다.

(a), (b)에 의해 $k\geq 2(a^2-b)$인 임의의 실수 k에 대해서만 함수

$\{h(t)-2\}h(t-k)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(ⅰ)~(ⅳ)에서 조건을 만족시키는 경우는 (ⅳ)이므로

$2(a^2-b)=24$

$a^2-b=12$에서

$b=a^2-12>0$이므로 $a^2>12$

$a^2-b>b$에서 $a^2-2b=a^2-2(a^2-12)$

$=24-a^2>0$

이므로 $a^2<24$

그러므로 $12<a^2<24$

a는 자연수이므로 $a=4,\ b=4$

따라서 $10a+b=44$

57) [정답] 108

[해설]

조건 (가)에서 $x \neq 0, x \neq 2$일 때,

$$g(x)=\frac{x(x-3)}{|x(x-2)|}(|f(x)|-a)$$

$x<0$ 또는 $x>2$일 때, $x(x-2)>0$이고

$0<x<2$일 때, $x(x-2)<0$이므로

$$g(x)=\begin{cases} |f(x)|-a & (x<0 \text{ 또는 } x>0) \\ a-|f(x)| & (0<x<2) \end{cases}$$

조건 (나)에 의해 함수 $g(x)$는 $x=0, x=2$에서 미분 가능하므로 $x=0, x=2$에서 연속이다.

즉, $\lim\limits_{x\to 0-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0+} g(x)$에서 $|f(0)|-a=a-|f(0)|$

그러므로 $|f(0)|=a$에서 $g(0)=\lim\limits_{x\to 0+} g(x)=0$

같은 방법으로 $|f(2)|=a$에서 $g(2)=0$

그러므로 $g(x)=\begin{cases} |f(x)|-a & (x<0 \text{또는} x>0) \\ a-|f(x)| & (0 \le x \le 2) \end{cases}$

함수 $g(x)$가 $x=0$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}$$

즉, $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{|f(x)|-a}{x} = \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{a-|f(x)|}{x}$ …… ㉠

(i) $f(0)=a$ 인 경우

$f(x)$는 $x=0$에서 연속이고 $f(0)>0$이므로

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)>0$이다. 그러므로

$$\lim_{x\to 0-}\frac{|f(x)|-a}{x} = \lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0),$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{a-|f(x)|}{x} = \lim_{x\to 0+}\frac{f(0)-f(x)}{x}=-f'(0)$$

㉠에서 $f'(0)=-f'(0), f'(0)=0$

(ii) $f(0)=-a$ 인 경우

$f(x)$는 $x=0$에서 연속이고 $f(0)<0$이므로

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)<0$이다. 그러므로

$$\lim_{x\to 0-}\frac{|f(x)|-a}{x} = \lim_{x\to 0-}\frac{-f(x)+f(0)}{x}=-f'(0),$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{a-|f(x)|}{x} = \lim_{x\to 0+}\frac{-f(0)+f(x)}{x}=f'(0)$$

㉠에서 $-f'(0)=f'(0), f'(0)=0$

(i), (ii)에 의해 $f'(0)=0$이다.

함수 $g(x)$가 $x=2$ 에서도 미분가능하므로 같은 방법으로 $f'(2)=0$ 이다.

그러므로 삼차함수 $f(x)$는 $x=0$과 $x=2$에서 극값을 갖고 최고차항의 계수가 1이므로 $x=0$에서 극댓값 $f(0)=a$, $x=2$에서 극솟값 $f(2)=-a$를 갖는다.

$f(x)=x^3+px^2+qx+a$ (p, q는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2px+q$ 이고 $f'(0)=f'(2)=0$이므로

$p=-3, q=0$이다. 즉, $f(x)=x^3-3x^2+a$

$f(2)=2^3-3\times 2^2+a=-a$이므로 $a=2$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+2$이므로

$g(3a)=g(6)=|f(6)|-2=|6^3-3\times 6^2+2|-2=108$

[참고]

[1] $f(0)=f(2)=a$ 또는 $f(0)=f(2)=-a$인 경우 삼차함수 $f(x)$는 극댓값과 극솟값이 서로 같을 수 없으므로 모순이다.

[2] $f(0)=-a, f(2)=a$인 경우 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 모순이다.

58) [정답] 108

[해설]

$i(x)=|f(x)|$로 놓으면 함수 $f(x)$는 다항함수이므로 모든 x의 값에 대하여

$$\lim_{h\to 0+}\frac{i(x+h)-i(x)}{h},\ \lim_{h\to 0-}\frac{i(x+h)-i(x)}{h}$$

의 값이 항상 존재한다.

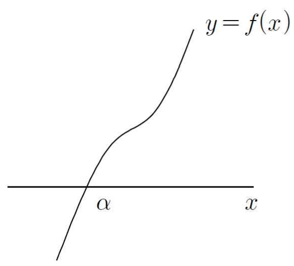
따라서

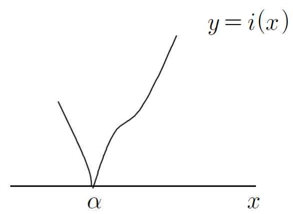
$$\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x)|-|f(x-h)|+|f(x)|}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{i(x+h)-i(x)}{h}+\lim_{h\to 0+}\frac{i(x-h)-i(x)}{-h}$$

(i) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하지 않고 $f(\alpha)=0,\ f'(\alpha)\neq 0$인 경우





$$g(x)=f(x-3)\times\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

$$=f(x-3)$$

$$\times\left\{\lim_{h\to 0+}\frac{i(x+h)-i(x)}{h}+\lim_{h\to 0+}\frac{i(x-h)-i(x)}{-h}\right\}$$

$$=\begin{cases} f(x-3)\times\{-2f'(x)\} & (x<\alpha) \\ 0 & (x=\alpha) \\ f(x-3)\times\{2f'(x)\} & (x>\alpha) \end{cases}$$

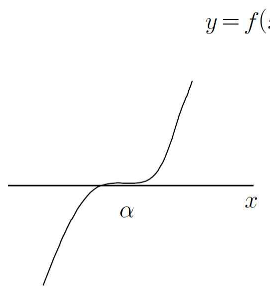
이때 조건 (가)를 만족시키기 위해서는

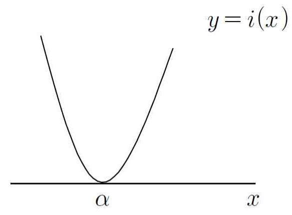
$\lim_{x \to \alpha-} g(x) = \lim_{x \to \alpha+} g(x) = g(\alpha)$이어야 하므로

$f(\alpha-3) \times \{-2f'(\alpha)\} = f(\alpha-3) \times \{2f'(\alpha)\} = 0$

그런데 $f'(\alpha) \neq 0$, $f(\alpha-3) \neq 0$이므로 모순이다.

(ii) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하지 않고 $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)=0$인 경우





$$g(x) = f(x-3) \times \lim_{h \to 0+} \frac{|f(x+h)| - |f(x-h)|}{h}$$

$$= f(x-3) \times \left\{ \lim_{h \to 0+} \frac{i(x+h)-i(x)}{h} + \lim_{h \to 0+} \frac{i(x-h)-i(x)}{-h} \right\}$$

$$= \begin{cases} f(x-3) \times \{-2f'(x)\} & (x < \alpha) \\ 0 & (x = \alpha) \\ f(x-3) \times \{2f'(x)\} & (x > \alpha) \end{cases}$$

이때 조건 (가)를 만족시키기 위해서는

$\lim_{x \to \alpha-} g(x) = \lim_{x \to \alpha+} g(x) = g(\alpha)$이어야 하고

$f'(\alpha)=0$이므로

$f(\alpha-3) \times \{-2f'(\alpha)\} = f(\alpha-3) \times \{2f'(\alpha)\} = 0$

이 성립한다.

그런데, 방정식 $g(x)=0$을 만족시키는 실근은

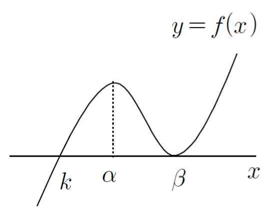
$x=\alpha$ 또는 $x=\alpha+3$

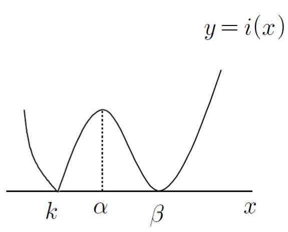
으로 2개 뿐이므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

(iii) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하고 $f(\alpha) \neq 0$, $f(\beta) \neq 0$, $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$인 경우

(i)의 경우와 같이 $f(k)=0$을 만족시키는 $x=k$에서 함수 $g(x)$는 연속이 아니므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(iv) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하고 $f(k)=0$, $f(\alpha) \neq 0$, $f(\beta)=0$, $f'(\alpha)=f'(\beta)=0 (k<\alpha<\beta)$인 경우



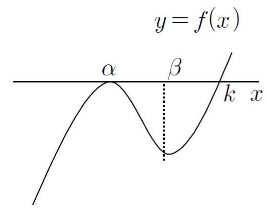


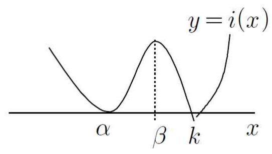
(i)의 경우와 같이 $f(k)=0$을 만족시키는 $x=k$에서 함수 $g(x)$는 연속이 아니므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(v) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하고 $f(k)=0$, $f(l)=0$, $f(m)=0$, $f'(\alpha)=f'(\beta)=0(k<\alpha<l<\beta<m)$인 경우

(i)의 경우와 같이 $f(k)=0$을 만족시키는 $x=k$에서 함수 $g(x)$는 연속이 아니므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(vi) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하고 $f(k)=0$, $f(\alpha)=0$, $f(\beta) \neq 0$, $f'(\alpha)=f'(\beta)=0(\alpha<\beta<k)$인 경우





$$g(x) = f(x-3) \times \lim_{h \to 0+} \frac{|f(x+h)| - |f(x-h)|}{h}$$

$$= f(x-3) \times \left\{ \lim_{h \to 0+} \frac{i(x+h)-i(x)}{h} + \lim_{h \to 0+} \frac{i(x-h)-i(x)}{-h} \right\}$$

$$= \begin{cases} f(x-3) \times \{-2f'(x)\} & (x < k) \\ 0 & (x = k) \\ f(x-3) \times \{2f'(x)\} & (x > k) \end{cases}$$

이때 조건 (가)를 만족시키기 위해서는

$\lim_{x \to k-} g(x) = \lim_{x \to k+} g(x) = g(k)$이어야 하므로

$f(k-3) \times \{-2f'(k)\} = f(k-3) \times \{2f'(k)\} = 0$

그런데 $f'(k) \neq 0$이므로 $f(k-3)=0$이고

$k-3=\alpha$ …… ㉠

즉, $k=\alpha+3$이면 조건 (가)를 만족시킨다.

또한, 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근은

$x<k$일 때 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$

$x=k$일 때 $x=k$

$x>k$일 때 $x=k+3$이고 조건 (나)에서 서로 다른 네 실근의 합이 4이므로

$\alpha+\beta+k+k+3=7$

$\alpha+\beta+2k=4$ …… ㉡

또한, $f(x)=(x-\alpha)^2(x-k)$이고

$f'(x)=(x-\alpha)(3x-2k-\alpha)$이므로 $f'(x)=0$에서

$$\beta = \frac{\alpha+2k}{3}$$

㉡에 대입하여 정리하면 $\alpha+2k=3$

㉠, ㉡에서 $\alpha=-1$, $k=2$이므로 $f(x)=(x+1)^2(x-2)$

따라서 $f(5)=(5+1)^2(5-2)=36 \times 3=108$

59) [정답] 14

[해설]

(가)를 만족하려면 그림과 같이

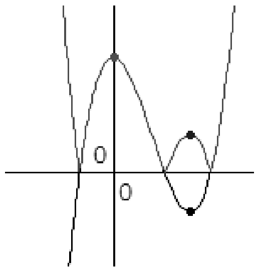
$f(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

$f'(x)=3x^2-6px=3x(x-2p)$

$f(0)=q>0$, $f(2p)=-4p^3+q<0$

즉 $q<4p^3$

(나)를 만족하려면 각 구간에서 최댓값은
$f(0)=q$일 때이다.



한편 $f(-1)=-1-3p+q$,
$f(1)=1-3p+q$
$f(2)=8-12p+q$, $f(-2)=-8-12p+q$
$-q \le f(-1) \le q$, $-q \le f(1) \le q$
$-q \le f(-2) \le q$, $-2 \le f(2) \le q$
인데, $f(-2) \ge -q$이면 충분하다.
$-8-12p+q \ge -q$, 즉 $4+6p \le q$
두 조건으로부터 $4+6p \le q < 4p^3$을 만족하는
25 이하의 자연수는
$p=2$일 때 $16 \le q \le 25$ −− 10개
$p=3$일 때 $22 \le q \le 25$ −− 4개
$\therefore$ 14 개

60) [정답] 64

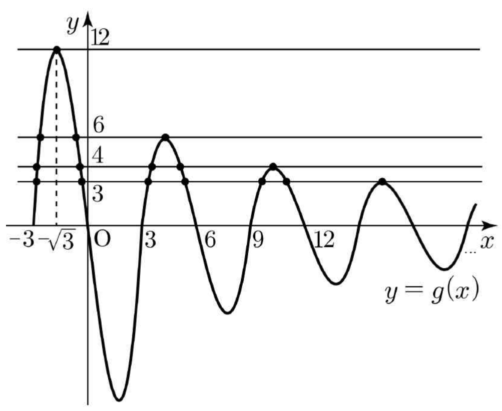
[해설]

$f(x)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x(x-3)(x+3)$에서

$f'(x)=2\sqrt{3}(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	12 (극대)	↘	-12 (극소)	↗

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



자연수 k에 대하여 $6k-3 \le x < 6k+3$일 때

함수 $g(x)=\dfrac{1}{k+1}f(x-6k)$

$k+1$이 12의 양의 약수가 될 때, 함수 $g(x)$의 극댓값이 자연수이므로 $k=1$, 2, 3, 5, 11일 때
함수 $g(x)$의 극댓값은 각각 6, 4, 3, 2, 1이다.

$a_1=2\times11+1=23$

$a_2=2\times5+1=11$

$a_3=2\times3+1=7$

$a_4=2\times2+1=5$

$a_5=2\times2=4$

$a_6=2\times1+1=3$

$7 \le n \le 11$일 때, $a_n=2\times1=2$이므로

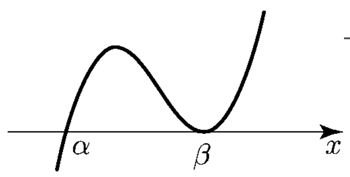
$a_{12}=1$

따라서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{12}a_n=23+11+7+5+4+3+2\times5+1=64$

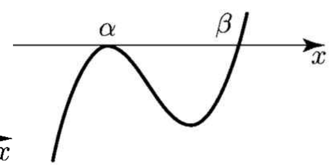
61) [정답] 61

[해설]

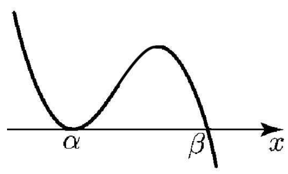
(가)조건을 만족하는 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같이 4가지 경우가 있다.



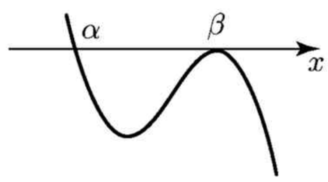
[그림1]



[그림2]



[그림3]



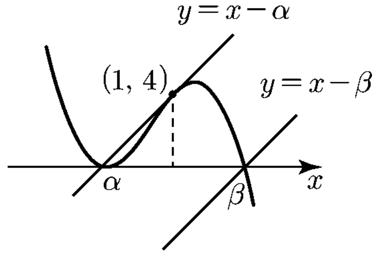
[그림4]

그런데, (나)조건 $f(x-f(x))=0$에서

$x-f(x)=\alpha$ 또는 $x-f(x)=\beta$

즉, $f(x)=x-\alpha$ 또는 $f(x)=x-\beta$이므로 직선 $y=x-\alpha$, $y=x-\beta$를 그렸을 때 교점이 3개인 경우는 [그림3], [그림4]이다.

그런데, $f(1)=4$, $f'(1)=1$를 만족해야 하므로 [그림4]는 모순이다.



[그림3]

즉 [그림3]에서 (1, 4)에서 접하므로

$f(x)-(x-\alpha)=a(x-1)^2(x-\alpha)$라 놓을 수 있다.

그리고 $f(1)=4$이므로 $1-\alpha=4$, $\alpha=-3$

따라서 $f(x)-(x+3)=a(x-1)^2(x+3)$

또, $\alpha=-3$에서 $f(x)$가 접하므로 $f(x)$는 $(x+3)^2$의 인수를 가져야 한다.

㉠을 정리하면 $f(x)=(x+3)\{a(x-1)^2+1\}$

그런데, $a(x-1)^2+1$이 $x+3$의 인수를 가져야 하므로

$$a(-3-1)^2+1=0$$

$$\therefore 16a+1=0,\ a=-\frac{1}{16}$$

$$\begin{aligned} f(x)&=(x+3)\left\{-\frac{1}{16}(x-1)^2+1\right\} \\ &=(x+3)\left\{-\frac{1}{16}(x^2-2x+1)+1\right\} \\ &=(x+3)\left\{-\frac{1}{16}(x^2-2x+1-16)\right\} \\ &=(x+3)^2\left\{-\frac{1}{16}(x-5)\right\} \end{aligned}$$

$$\therefore f(0)=9\times\frac{5}{16}=\frac{45}{16}$$

따라서 $p=16$, $q=45$이므로 $p+q=16+45=61$

62) [정답] 9

[해설]

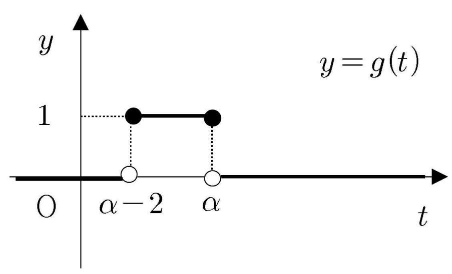
이차방정식 $f'(x)=0$이 근을 갖지 않는 경우에는

$g(t)=0$

이는 조건 (나)에서

$g(t)$가 함숫값 1 또는 2를 갖는 것에 모순이다.

이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 α를 갖는 경우에는 $y=g(x)$는 그림과 같다.



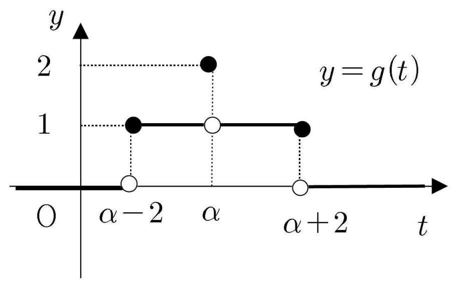
이는 조건 (나)에서

$g(t)$가 함숫값 2를 갖는 것에 모순이다.

그러므로 이차방정식 $f'(x)=0$는 서로 다른 두 실근 α, $\beta\ (\alpha<\beta)$를 갖는다.

(ⅰ) $\beta=\alpha+2$일 때,

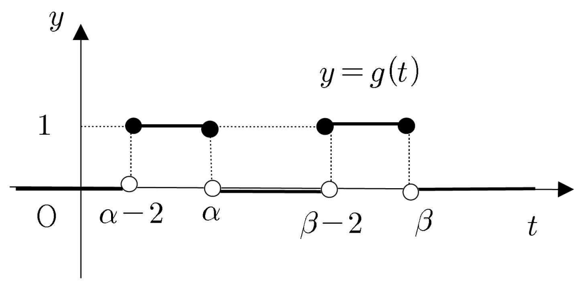
함수 $y=g(t)$의 그래프는 다음과 같다.



이는 조건 (가)를 만족한다.

(ⅱ) $\beta>\alpha+2$일 때,

함수 $y=g(t)$의 그래프는 다음과 같다.

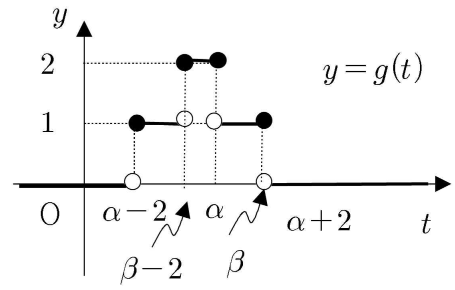


이는 조건 (나)에서

$g(t)$가 함숫값 2를 갖는 것에 모순이다.

(ⅲ) $\beta<\alpha+2$일 때,

함수 $y=g(t)$의 그래프는 다음과 같다.



이때, $\beta-2\le a\le\alpha$인 a에 대하여 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

따라서 위에서 조건을 만족시키는 것은 (ⅰ)의 경우이다.

한편, 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$이므로 함수

$f'(x)$의 최고차항의 계수는 $\frac{3}{2}$이다.

그러므로

$$\begin{aligned} f'(x)&=\frac{3}{2}(x-\alpha)\{x-(\alpha+2)\} \\ &=\frac{3}{2}\{x^2-(2\alpha+2)x+\alpha^2+2\alpha\} \end{aligned}$$

로 놓을 수 있다. 이때,

$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}(\alpha+1)x^2+\frac{3}{2}(\alpha^2+2\alpha)x+C$ (단, C는 적분상수) …… ㉠

한편, 조건 (나)에서

$g(f(1))=g(f(4))=2$

이고 $g(t)$의 함숫값이 2인 t의 값의 개수는 1이므로

$f(1)=f(4)$

㉠에서

$\frac{1}{2}-\frac{3}{2}(\alpha+1)+\frac{3}{2}(\alpha^2+2\alpha)+C$

$=32-24(\alpha+1)+6(\alpha^2+2\alpha)+C$

따라서

$\frac{1}{2}-\frac{3}{2}(\alpha+1)+\frac{3}{2}(\alpha^2+2\alpha)=32-24(\alpha+1)+6(\alpha^2+2\alpha)$

양변에 2를 곱하면

$1-3(\alpha+1)+3(\alpha^2+2\alpha)=64-48(\alpha+1)+12(\alpha^2+2\alpha)$

이 식을 정리하면

$3\alpha^2+3\alpha-2=12\alpha^2-24\alpha+16$

$9\alpha^2-27\alpha+18=0$

$\alpha^2-3\alpha+2=0$

$(\alpha-1)(\alpha-2)=0$

$\alpha=1$ 또는 $\alpha=2$

((ⅰ)-①) $\alpha=1$일 때,

$f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x+C$

이때, $f(1)=\alpha$에서 $f(1)=1$이어야 하므로

$\frac{1}{2}-3+\frac{9}{2}+C=1$

$2+C=1$

$C=-1$

이때, $f(0)=-1$이므로

$g(f(0))=g(-1)=1$

그러므로 조건을 만족시킨다.

((ⅰ)-②) $\alpha=2$일 때,

$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+12x+C$

이때, $f(1)=\alpha$에서 $f(1)=2$이어야 하므로

$\frac{1}{2}-\frac{9}{2}+12+C=2$

$8+C=2$

$C=-6$

이때, $f(0)=-6$이므로

$g(f(0))=g(-6)=0$

그러므로 조건을 만족시키지 못한다.

따라서, ((ⅰ)-①)에서

$f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x-1$

이므로

$f(5)=\frac{1}{2}\times5^3-3\times25+\frac{9}{2}\times5-1$

$=\frac{125}{2}-75+\frac{45}{2}-1$

$=9$

63) [정답] 16

[해설]

$g'(x)=(x^2-4)\{|f(x)|-a\}$에서 $x=-2$, $x=2$가 방정식 $g'(x)=0$의 근이지만 조건 (가)에서 함수 $g(x)$가 극값을 갖지 않아야 하므로 $x=-2$와 $x=2$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 변하지 않아야 하고,

$\lim_{x\to\infty}\{|f(x)|-a\}=\lim_{x\to-\infty}\{|f(x)|-a\}=\infty$이므로 $g'(x)$, x^2-4, $|f(x)|-a$의 부호를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$+$	0	$+$
x^2-4	$+$	0	$-$	0	$+$
$\lvert f(x)\rvert-a$	$+$	0	$-$	0	$+$

함수 $|f(x)|-a$는 연속함수이므로 사잇값의 정리에 의해 $|f(-2)|-a=0$, $|f(2)|-a=0$

두 실수 m, n에 대하여 일차함수 $f(x)=mx+n$이라 하면 $m\neq0$이고, $|2m+n|=|-2m+n|=a$가 성립한다.

(ⅰ) $2m+n=-2m+n$인 경우

$m=0$이 되어 모순이다.

(ⅱ) $2m+n=-(-2m+n)$인 경우

$n=0$이고 $|m|=\frac{a}{2}$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $|f(x)|=|mx|=\frac{a}{2}|x|$

$g(2)=\int_0^2(t^2-4)\{|f(t)|-a\}dt$

$=\int_0^2(t^2-4)\left(\frac{a}{2}|t|-a\right)dt$

닫힌구간 $[0, 2]$에서 $|t|=t$이므로

$g(2)=\frac{a}{2}\int_0^2(t^2-4)(t-2)dt$

$=\frac{a}{2}\int_0^2(t^3-2t^2-4t+8)dt$

$=\frac{a}{2}\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{2}{3}t^3-2t^2+8t\right]_0^2$

$=\frac{a}{2}\times\left(4-\frac{16}{3}-8+16\right)=\frac{10}{3}a$

조건 (나)에서 $g(2)=5$이므로 $\frac{10}{3}a=5$, $a=\frac{3}{2}$

$g(0)=\int_0^0(t^2-4)\left(\frac{3}{4}|t|-\frac{3}{2}\right)dt=0$이고

닫힌구간 $[-4, 0]$에서 $|t|=-t$이므로

$g(-4)=\int_{0}^{-4}(t^2-4)\left(\frac{3}{4}|t|-\frac{3}{2}\right)dt$

$=\frac{3}{4}\int_{0}^{-4}(t^2-4)(-t-2)dt$

$=\frac{3}{4}\int_{0}^{-4}(-t^3-2t^2+4t+8)dt$

$=-16$

따라서 $g(0)-g(-4)=0-(-16)=16$

64) [정답] 56

[해설]

함수 $f(x)$는 일차함수이므로 함수

$g(x)=\int_{0}^{x}(x-2)f(s)ds$는 삼차함수이다.

$g(x)=(x-2)\int_{0}^{x}f(s)ds=0$에서 $g(2)=g(0)=0$이므로

$g(x)=0$의 세 근을 $x=0,\ 2,\ \alpha$라 하자.

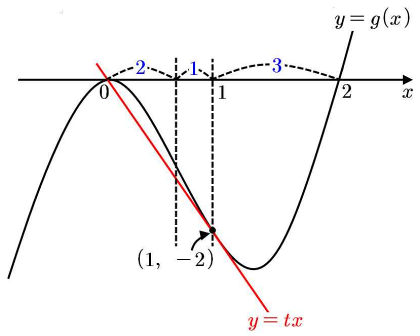
이때 $y=tx$는 $(0,\ 0)$을 지나는 직선이므로 함수 $h(t)$가 $t=0$에서 불연속이기 위해서는 $y=g(x)$는 x축에 접해야 한다.

따라서 $\alpha=0$ 또는 $\alpha=2$이다.

(i) $g(x)=mx^2(x-2)$일 때

m이 양수일 때와 음수일 때를 나누어 $y=g(x)$와 $y=tx$를 그려보면 다음과 같다.

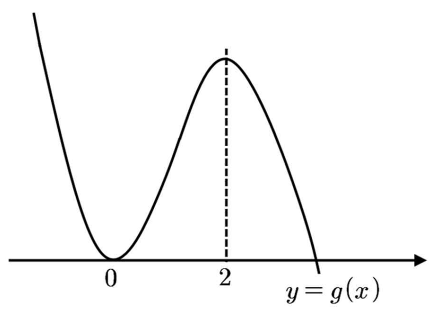
$m>0$일 때



이때의 t의 값은 -2가 되어야 하고 $y=g(x)$와 $y=tx$의 교점은 $(1,\ -2)$이다.

$\therefore g(x)=2x^2(x-2),\ g(4)=64$

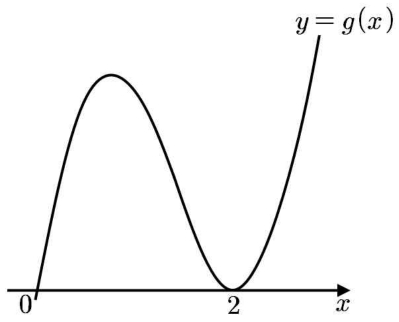
$m<0$일 때



$g(x)$가 $x=0$에서 x축에 접하므로 $t=-2$일 때 불연속이 될 수 없다.

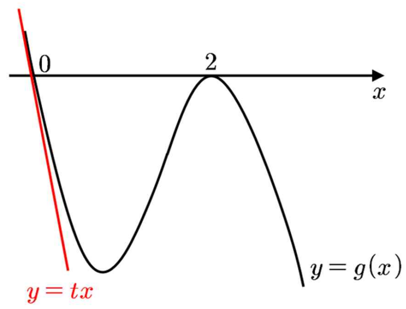
(ii) $y=mx(x-2)^2$일 때

$m>0$일 때



$g(x)$가 $x=2$에서 x축에 접하므로 $t=-2$일 때 불연속이 될 수 없다.

$m<0$일 때



마찬가지로 이때의 t의 값은 -2이므로

$g'(x)=m(x-2)^2+2mx(x-2)$

$g'(0)=4m=-2,\ m=-\frac{1}{2}$이므로

$g(4)=-8$

(i), (ii)에 의하여 $g(4)$의 값의 합은 $64-8=56$

65) [정답] 251

[해설]

$f(x)=3x+a$이므로

$g(x)=\int_{2}^{x}(t+a)(3t+a)dt$

$=\int_{2}^{x}(3t^2+4at+a^2)dt$

$=\left[t^3+2at^2+a^2t\right]_2^x$

$=x^3+2ax^2+a^2x-(2a^2+8a+8)$

$g(2)=0$이므로

$g(x)=(x-2)\{x^2+2(a+1)x+(a+2)^2\}$

$h(x)=(x-2)(3x+a)\{x^2+2(a+1)x+(a+2)^2\}$

조건 (가)에 의해 곡선 $y=h(x)$위의 어떤 점에서의 접선이 x축이므로 $h(k)=h'(k)=0$을 만족시키는 실수 k가 존재한다.

그러므로 다항식 $h(x)$는 $(x-k)^2$을 인수로 갖는다.

(ⅰ) $k=2$인 경우

다항식 $h(x)$가 $(x-2)^2$을 인수로 가지므로
다항식 $3x+a$가 $3(x-2)$이거나
다항식 $x^2+2(a+1)x+(a+2)^2$이 $x-2$를
인수로 가진다.

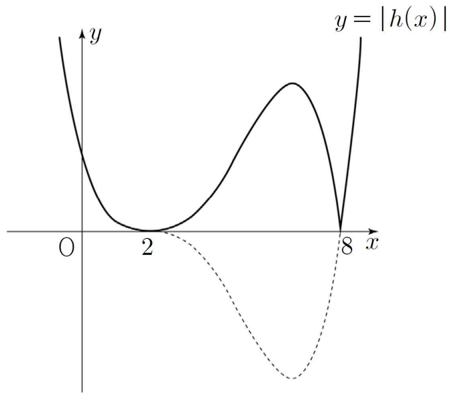
(a) $3x+a=3(x-2)$인 경우

$a=-6$이므로

$$h(x)=(x-2)(3x-6)(x^2-10x+16)$$
$$=3(x-2)^3(x-8)$$

곡선 $y=|h(x)|$는 그림과 같으므로

함수 $h(x)$는 조건 (나)를 만족시킨다.



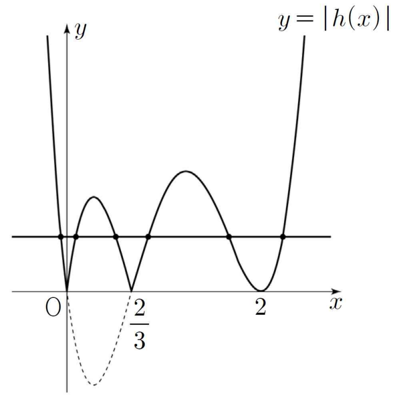
이 경우 $h(-1)=729$이다.

(b) 다항식 $x^2+2(a+1)x+(a+2)^2$이
$x-2$를 인수로 갖는 경우
$4+4(a+1)+(a+2)^2$
$=a^2+8a+12$
$=(a+2)(a+6)=0$
에서 $a=-2$ 또는 $a=-6$
$a=-6$이면 (a)와 같다.
$a=-2$이면

$$h(x)=(x-2)(3x-2)(x^2-2x)$$
$$=x(3x-2)(x-2)^2$$

곡선 $y=|h(x)|$는 그림과 같으므로

함수 $h(x)$는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.



(ⅱ) $k=-\frac{a}{3}(a\neq-6)$인 경우

다항식 $h(x)$가 $\left(x+\frac{a}{3}\right)^2$을 인수로 가지므로

다항식 $x^2+2(a+1)x+(a+2)^2$이 $x+\frac{a}{3}$를

인수로 가진다.

$\frac{1}{9}a^2-\frac{2}{3}a(a+1)+(a+2)^2$

$=\frac{4}{9}a^2+\frac{10}{3}a+4$

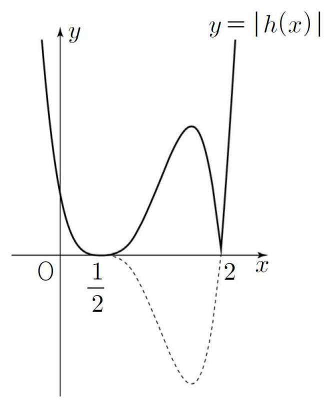
$=\frac{2}{9}(2a+3)(a+6)=0$

에서 $a=-\frac{3}{2}$이므로

$$h(x)=(x-2)\left(3x-\frac{3}{2}\right)\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)$$
$$=3\left(x-\frac{1}{2}\right)^3(x-2)$$

곡선 $y=|h(x)|$는 그림과 같으므로

함수 $h(x)$는 조건 (나)를 만족시킨다.



이 경우 $h(-1)=\frac{243}{8}$

(ⅲ) $x^2+2(a+1)x+(a+2)^2=(x-k)^2$인 경우

$x^2+2(a+1)x+(a+2)^2=x^2-2kx+k^2$
$a+1=-k$, $(a+2)^2=k^2$
$(a+1)^2=(-a-1)^2$에서 $a=-\frac{3}{2}$

$a=-\frac{3}{2}$이면 (ii)와 같다.

따라서 $h(-1)$의 최솟값은 $\frac{243}{8}$이므로

$p=8,\ q=243$에서 $p+q=251$

66) [정답] ⑤

[해설]

최고차항의 계수가 4이고 $f(0)=0$이므로

$f(x)=4x^3+ax^2+bx\,(a, b$는 상수$)$라 하면

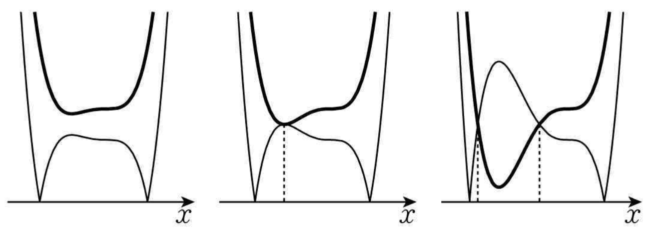
$f'(x)=12x^2+2ax+b$에서 $f'(0)=0$이므로 $b=0$

즉, $f(x)=4x^3+ax^2$에서 $\int_0^x f(t)dt=x^4+\frac{a}{3}x^3$이므로

$$g(x)=\begin{cases} x^4+\frac{a}{3}x^3+5 & (x<c) \\ \left|x^4+\frac{a}{3}x^3-\frac{13}{3}\right| & (x \ge c) \end{cases}$$

곡선 $y=x^4+\frac{a}{3}x^3-\frac{13}{3}$은 곡선 $y=x^4+\frac{a}{3}x^3+5$를 y축의 방향으로 $-\frac{28}{3}$만큼 평행이동한 것이다.

다음은 a의 값에 따른 곡선 $y=x^4+\frac{a}{3}x^3+5$와 곡선 $y=\left|x^4+\frac{a}{3}x^3-\frac{13}{3}\right|$의 개형 중 c의 개수가 $0, 1, 2$인 경우이다.



[c의 개수가 0] [c의 개수가1] [c의 개수가2]

함수 $g(x)$가 연속이 되도록 하는 실수 c의 개수가 1이기 위해서는 함수 $y=x^4+\frac{a}{3}x^3+5(\rightarrow ㉠)$의 극솟값과 같은 함수 $y=-\left(x^4+\frac{a}{3}x^3-\frac{13}{3}\right)(\rightarrow ㉡)$의 극댓값이 서로 같이야 한다.

㉠, ㉡의 함수는 각각 $x=-\frac{a}{4}$에서 극값을 갖고

$c=-\frac{a}{4}$이다.

$$\left(-\frac{a}{4}\right)^4+\frac{a}{3}\left(-\frac{a}{4}\right)^3+5=-\left\{\left(-\frac{a}{4}\right)^4+\frac{a}{3}\left(-\frac{a}{4}\right)^3-\frac{13}{3}\right\}$$

이를 정리하여 풀면 $\begin{cases} a=4 \\ c=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a=-4 \\ c=1 \end{cases}$

그러므로 $a=4$일 때, $g(1)=\left|1+\frac{4}{3}-\frac{13}{3}\right|=2$,

$a=-4$일 때, $g(1)=\left|1-\frac{4}{3}-\frac{13}{3}\right|=\frac{14}{3}$

따라서 $g(1)$의 최댓값은 $\frac{14}{3}$

67) [정답] 4

[해설]

함수 $f(x)$는 $x=2m$을 제외한 모든 실수에서 극한값을 가지므로

$\lim_{x \to 2m-} f(x) \neq \lim_{x \to 2m+} f(x) \cdots\cdots ㉠$

조건 (가)에서 $\alpha=2m$

$\lim_{x \to 2m} g(x)$의 값이 존재한다고 가정하면

조건 (나)에 의하여

$$\lim_{x \to 2m} f(x)=\lim_{x \to 2m}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\times g(x)\right\}$$

$$=\lim_{x \to 2m}\frac{f(x)}{g(x)}\times \lim_{x \to 2m} g(x)$$

$\lim_{x \to 2m} f(x)$의 값이 존재하므로

㉠을 만족시키지 않는다.

따라서 $\lim_{x \to 2m} g(x)$의 값은 존재하지 않는다.

조건 (가)에 의하여 $\beta=2m$

함수 $g(x)$는 $x=m+1$을 제외한 모든 실수에서 극한값을 가지므로 $2m=m+1$, $m=1$

$\lim_{x \to 1} g(x)=\lim_{x \to 1}(ax-a)=0$이고 조건 (나)에서

$\lim_{x \to 1}\frac{f(x)}{g(x)}$의 값이 존재하므로

$$\lim_{x \to 1} f(x)=\lim_{x \to 1}\{x^2+(a-1)x-a^2+2\}$$

$$=-a^2+a+2=-(a+1)(a-2)=0$$

$a=-1$ 또는 $a=2$

(i) $a=-1$인 경우

$$\lim_{x \to 2-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x \to 2-}\frac{x^2-2x+1}{-x+1}=-1$$

$$\lim_{x \to 2+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x \to 2+}\frac{-3x-4}{x+2}=-\frac{5}{2}$$

$\lim_{x \to 2-}\frac{f(x)}{g(x)} \neq \lim_{x \to 2+}\frac{f(x)}{g(x)}$이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $a=2$인 경우

$$\lim_{x \to 2-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x \to 2-}\frac{x^2+x-2}{2x-2}=2$$

$$\lim_{x \to 2+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x \to 2+}\frac{-3x+8}{x-1}=2$$

$\lim_{x \to 2-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 2+} \frac{f(x)}{g(x)}$이므로

조건 (나)를 만족시킨다.

(i), (ii) 에 의하여 $a=2,\ m=2-1=1$

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x-2 & (x \le 2) \\ -3x+8 & (x>2) \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} 2x-2 & (x \le 2) \\ x-1 & (x>2) \end{cases}$$

따라서 $m+g(a^2)=1+g(4)=1+3=4$

68) [정답] 13

[해설]

조건 (가)에서

$$f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$$

이므로 $x \neq 1$일 때,

$$f'(g(x))=\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때, 두 점 $(1,\ f(1))$, $(x,\ f(x))$를 지나는 직선의 기울기가 $f'(g(x))$이고, 조건 (나)에서 $g(x) \ge \frac{5}{2}$이므로 두 점 $(1,\ f(1))$, $\left(\frac{5}{2},\ f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$를 지나는 직선은 점 $\left(\frac{5}{2},\ f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$에서 접하는 직선이다.

두 점 $(1,\ f(1))$, $\left(\frac{5}{2},\ f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$를 지나는 직선의 방정식을 $y=mx+n$이라 하면

$$f(x)=(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+mx+n \qquad \cdots\cdots ㉡$$

조건 (다)에서 $f(0)=-3$이므로

$$f(0)=-\frac{25}{4}+n=-3, \qquad n=\frac{13}{4}$$

㉠에서

$$\lim_{x \to 1} f'(g(x))=\lim_{x \to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$f'(g(1))=f'(1) \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+2(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)+m$$

$$=3x^2-12x+m+\frac{45}{4}$$

㉢에서 $g(1) \ge \frac{5}{2}$이므로 $\qquad g(1) \neq 1$

따라서 함수 $y=f'(x)$의 그래프의 대칭축이 $x=2$이므로

$\frac{g(1)+1}{2}=2$에서 $\qquad g(1)=3$

조건 (다)에서 $f(3)=6$이므로 ㉡에 대입하면

$$f(3)=\frac{1}{2}+3m+\frac{13}{4}=6, \qquad m=\frac{3}{4}$$

따라서 $f(x)=(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x+\frac{13}{4}$이므로

$$f(4)=13$$

[다른 풀이]

최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=-3$이므로

$$f(x)=x^3+ax^2+bx-3$$

이라 하면 $\quad f'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 (가)에서

$$f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$$

이므로 $x \neq 1$일 때,

$$f'(g(x))=\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때, 두 점 $(1,\ f(1))$, $(x,\ f(x))$를 지나는 직선의 기울기가 $f'(g(x))$이고, 조건 (나)에서 $g(x) \ge \frac{5}{2}$이므로 두 점 $(1,\ f(1))$, $\left(\frac{5}{2},\ f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$를 지나는 직선은 점 $\left(\frac{5}{2},\ f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$에서 접하는 직선이다.

그러므로 직선 $y-f\left(\frac{5}{2}\right)=f'\left(\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)$는 점 $(1,\ f(1))$을 지난다. 즉,

$$1+a+b-3-\left\{\left(\frac{5}{2}\right)^3+a\left(\frac{5}{2}\right)^2+b\left(\frac{5}{2}\right)-3\right\}$$

$$=\left\{3\times\left(\frac{5}{2}\right)^2+5a+b\right\}\left(1-\frac{5}{2}\right)$$

이 식을 정리하면

$$-\frac{117}{8}-\frac{21}{4}a-\frac{3}{2}b=\left(\frac{75}{4}+5a+b\right)\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$\frac{9}{4}a=-\frac{108}{8}$$

$$a=-6$$

따라서 $f(x)=x^3-6x^2+bx-3$이고,

$f'(x)=3x^2-12x+b$이다.

한편, ㉠에서

$$\lim_{x \to 1} f'(g(x))=\lim_{x \to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

이때, $g(x)$는 연속함수이므로 $g(1)=k$라 하면 좌변은

$$\lim_{x \to 1} f'(g(x))=\lim_{x \to 1}\{3\{g(x)\}^2-12g(x)+b\}$$

$$=3k^2-12k+b \qquad \cdots\cdots ㉡$$

또, 우변은

$$\lim_{x \to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=3-12+b=b-9 \cdots\cdots ㉢$$

㉡, ㉢에서

$$3k^2-12k+b=b-9$$

$k^2-4k+3=0,\quad (k-1)(k-3)=0$

$k=1$ 또는 $k=3$

$g(1)=1$ 또는 $g(1)=3$

이때, 조건 (나)에서 $g(x)$의 최솟값이 $\dfrac{5}{2}$이므로

$g(1)=3$

따라서 조건 (다)에서 $f(g(1))=f(3)=6$이므로

$27-54+3b-3=6,\quad b=12$

따라서 $f(x)=x^3-6x^2+12x-3$이므로

$f(4)=4^3-6\times4^2+12\times4-3=13$

69) [정답] 19

[해설]

$$g(x)=\begin{cases}(x+3)f(x) & (x<0)\\(x+a)f(x-b) & (x\geq 0)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이어야 한다.

따라서

$$\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0+}g(x)=g(0) \quad \cdots\cdots ㉠$$

이 성립한다.

이때

$$\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0-}(x+3)f(x)=3f(0)$$

$$\lim_{x\to 0+}g(x)=\lim_{x\to 0+}(x+a)f(x-b)=af(-b)$$

$g(0)=af(-b)$

이므로 ㉠에서

$$3f(0)=af(-b) \quad \cdots\cdots ㉡$$

한편,

$$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{|g(x)|}{(x+3)^2\left(\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right)}$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2\left(\sqrt{0+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right)}$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2\times 2|g(t)|} \quad \cdots\cdots ㉢$$

이때 $t\neq-3$이고 $t\neq 6$인 모든 실수 t에 대하여 ㉢의 값이 존재하므로

$f(x)=(x+3)(x+k)$(k는 상수)

의 꼴이어야 하고, ㉢에서

$$\lim_{x\to -3}\frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2\times 2|g(t)|}$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{|(x+3)^2(x+k)|}{(x+3)^2\times 2|g(t)|}$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{|x+k|}{2|g(t)|} \quad \cdots\cdots ㉣$$

이때 $t=-3$과 $t=6$에서만 ㉣의 값이 존재하지 않으므로 방정식 $g(x)=0$이 모든 실근은 $x=-3$과 $x=6$뿐이다.

주어진 식에서 $g(-3)=0$이므로

$g(6)=0$, 즉 $(6+a)f(6-b)=0$

이어야 한다.

이때 $a>0$이므로 $f(6-b)=0$에서

$6-b=-3$ 또는 $6-b=-k$

따라서 $b=9$ 또는 $k-b=-6$

(i) $b=9$인 경우

$x<0$에서

$g(x)=(x+3)f(x)=(x+3)^2(x+k)$

이때 $x<0$에서 $g(x)=0$의 해는 -3뿐이므로

$-k\geq 0$ 또는 $k=3 \quad \cdots\cdots ㉤$

$x\geq 0$에서

$g(x)=(x+a)f(x-9)=(x+a)(x-6)(x-9+k)$

이때 $x\geq 0$에서 $g(x)=0$의 해는 6뿐이므로

$9-k<0$ 또는 $9-k=6 \quad \cdots\cdots ㉥$

㉤, ㉥에서 $\quad k=3$

따라서 $f(x)=(x+3)^2$이므로 ㉡에서

$3\times 3^2=af(-9),\quad 27=36a$

$a=\dfrac{3}{4}$

따라서

$$g(4)=(4+a)f(4-b)$$

$$=\left(4+\frac{3}{4}\right)f(-5)$$

$$=\frac{19}{4}\times(-2)^2=19$$

(ii) $k-b=-6$인 경우

$x<0$에서

$g(x)=(x+3)f(x)=(x+3)^2(x+k)$

이때 $x<0$에서 $g(x)=0$의 해는 -3뿐이므로

$-k\geq 0$ 또는 $k=3$

$x\geq 0$에서

$$g(x)=(x+a)f(x-b)$$

$$=(x+a)(x-b+3)(x-b+k)$$

$$=(x+a)(x-b+3)(x-6)$$

이때 $x\geq 0$에서 $g(x)=0$의 해는 6뿐이고, $b>3$이므로

$b-3=6$에서 $\quad b=9$

$k-b=-6$에서 $\quad k=3$

따라서 (i)과 같은 결과이므로 $g(4)=19$이다.

70) [정답] ①

[해설]

$g(x)=\begin{cases} x & (x<-1 \text{ 또는 } x>1) \\ f(x) & (-1\le x\le 1)\end{cases}$에서

$$h(x)=\lim_{t\to 0+} g(x+t)\times \lim_{t\to 2+} g(x+t)$$

$$=\begin{cases} x(x+2) & (x\ge 1) \\ (x+2)f(x) & (-1\le x<1) \\ xf(x+2) & (-3\le x<-1) \\ x(x+2) & (x<-3)\end{cases}$$

ㄱ. $h(1)=1\times 3=3$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to 1-} h(x)=\lim_{x\to 1-}(x+2)f(x)=3f(1)$

$\lim_{x\to 1+} h(x)=h(1)=3$

이므로 $f(1)\ne 1$이면 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 불연속이다. 따라서 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이라 할 수 없다. (참)

ㄷ. $g(-1)=f(-1)=-2$이고, 함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 감소하므로 $f(1)<-2$

$-3\le x<-1$에서 $h(x)=xf(x+2)$이고,

$x<0$, $f(x+2)<0$이므로 $h(x)>0$

$-1<x<1$에서 $h(x)=(x+2)f(x)$이므로

$h'(x)=f(x)+(x+2)f'(x)$

$f'(x)<0$, $x+2>0$, $f(x)<0$이므로 $h'(x)<0$

따라서 $-1<x<1$에서 함수 $h(x)$는 감소하므로

$\lim_{x\to 1-} h(x)=\lim_{x\to 1-}(x+2)f(x)=3f(1)<-6$

한편, ㄱ에서 $h(1)=3$이므로 함수 $h(x)$는 최솟값을 갖지 않는다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ 뿐이다.

[다른 풀이]

ㄷ. [반례] $f(x)=-x-3$이라 하자.

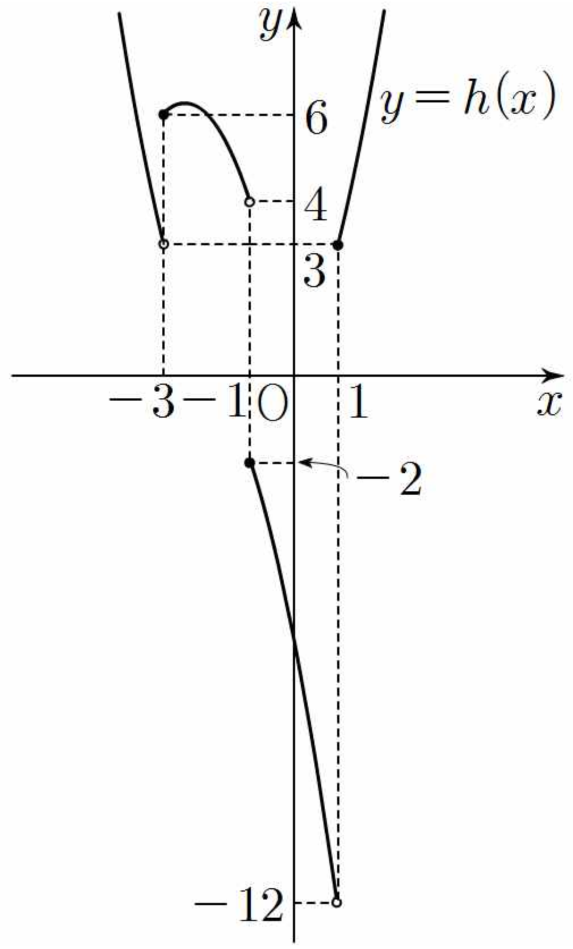
$x<-3$일 때, $h(x)=x(x+2)$

$-3\le x<-1$일 때, $h(x)=-x(x+5)$

$-1\le x<1$일 때, $h(x)=-(x+3)(x+2)$

$x\ge 1$일 때, $h(x)=x(x+2)$

이때, $\lim_{x\to 1-} h(x)=-12$, $h(1)=3$이므로 함수 $h(x)$의 최솟값은 없다. (거짓)



71) [정답] ②

[해설]

$y=x^3-x^2$ 위의 점을 $A(t,\ t^3-t^2)$라 하면

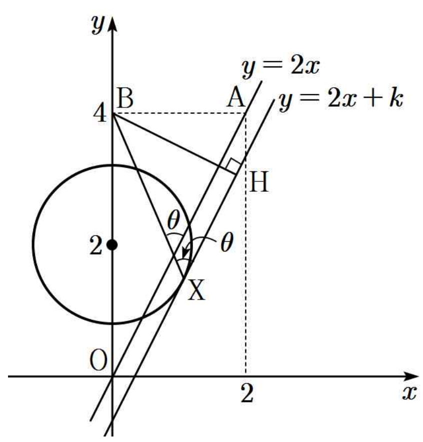
$y'=3x^2-2x$에서 점 A에서의 기울기는 $3t^2-2t$이므로

$3t^2-2t=8$, $(t-2)(3t+4)=0$

$\therefore t=2(\because\ t>0)$

따라서 점 $A(2,\ 4)$이다.

두 직선 OA와 BX가 이루는 예각의 크기가 θ이고, 직선 OA의 기울기가 2이므로 θ는 직선 BX와 점 X를 지나고 기울기가 2인 직선이 이루는 예각과 같다.



위의 그림에서 $\overline{BX}\sin\theta=\overline{BH}$이므로 $\overline{BX}\sin\theta$의 최대는 $\overline{BH}$가 최대일 때이다.

$\overline{BX}\sin\theta$, 즉 $\overline{BH}$의 최댓값이 $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$이므로 두 점 X, H를 지나는 직선의 방정식을 $y=2x+k$라 하면 점 $B(0,\ 4)$에서

직선 $2x-y+k=0$까지의 거리가 $\frac{6\sqrt{5}}{5}$이다.

$\frac{|k-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$, $|k-4|=6$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=10$

그런데 θ가 예각이므로 $k=-2$

즉, $y=2x-2$

따라서 원 S의 반지름을 r이라 하면 중심 $(0,\ 2)$에서 직선 $2x-y-2=0$과의 거리가 r이므로

$r=\frac{|-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

72) [정답] 121

[해설]

$f(0)=0$이므로

$f(x)=ax^3+bx^2+cx$($a,\ b,\ c$는 상수)라 하면

$f'(0)=c,\ g(x)=cx$

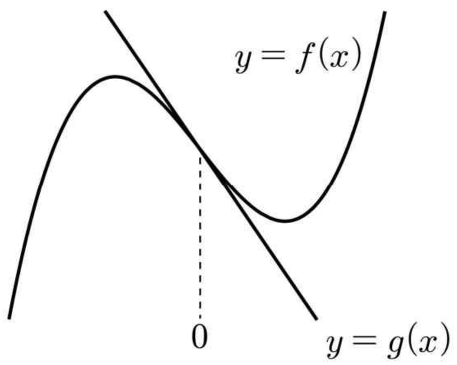
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의

접선의 기울기 c에 대하여

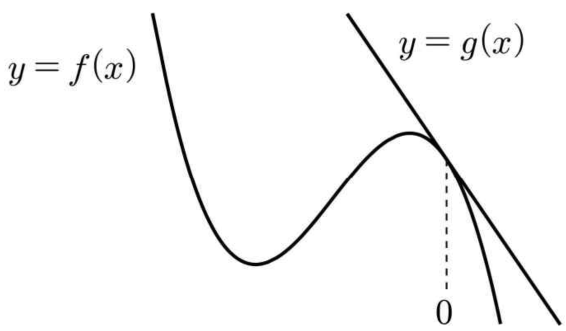
(i) $c=0$이면 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) $c>0$이면 $h(12)>0$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

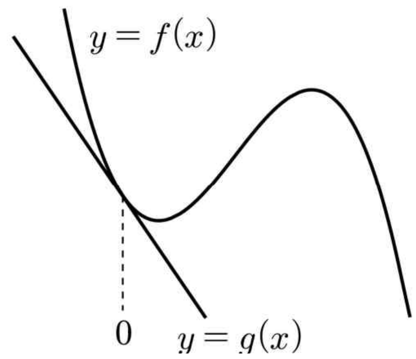
(iii) $c<0,\ a>0$이면 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 다음과 같으므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.



(iv) $c<0,\ a<0$이면 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 다음과 같은 경우에는 조건 (가)를 만족시키지 않는다.



그러므로 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 다음과 같은 경우에만 조건 (가), (나)를 만족시킨다.



조건 (가)에 의하여

$f(x)+g(x)=ax(x-k)^2$ ……㉠

조건 (나)에 의하여

$-f(x)+g(x)=-ax^2(x-12)$ ……㉡

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면

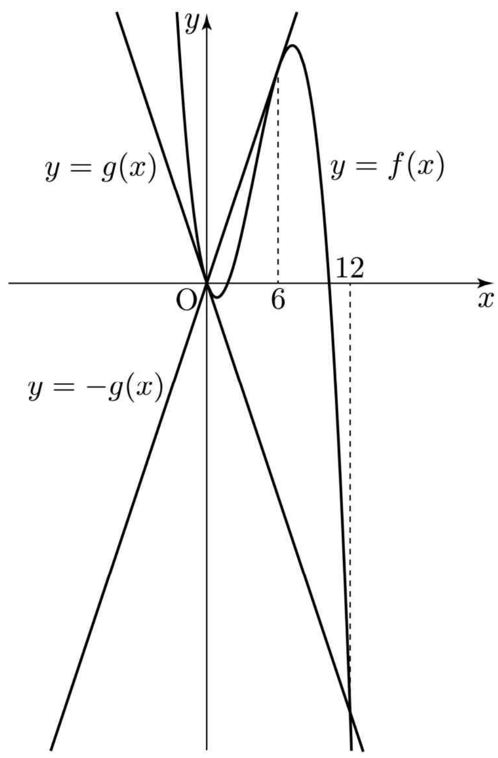
$2g(x)=2a(6-k)x^2+ak^2x$

$6-k=0,\ k=6$

$g(x)=18ax$

$f(x)=ax(x-6)^2-18ax$

$=ax(x^2-12x+18)$



방정식 $x^2-12x+18=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta(\alpha<\beta)$라 하면

$\alpha=6-3\sqrt{2},\ \beta=6+3\sqrt{2}$

함수 $h(x)$는 다음과 같다.

$$h(x)=\begin{cases} ax(x-6)^2 & (x<0\text{또는 } \alpha\le x<\beta) \\ -ax^2(x-12) & (0\le x<\alpha\text{또는 } x\ge\beta) \end{cases}$$

$\alpha<3<\beta$이므로

$h(3)=a\times3\times(3-6)^2=27a=-\frac{9}{2}$

$a=-\frac{1}{6},\ c=-3$

$$h(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{6}x(x-6)^2 & (x<0\text{또는 } \alpha\le x<\beta)\\ \dfrac{1}{6}x^2(x-12) & (0\le x<\alpha\text{또는 } x\ge\beta)\end{cases}$$

$\alpha=6-3\sqrt{2}$, $\beta=6+3\sqrt{2}$이므로

$\alpha<6<\beta<11$

$h(6)=0$, $h(11)=\dfrac{1}{6}\times 11^2\times(-1)=-\dfrac{121}{6}$

따라서

$k\times\{h(6)-h(11)\}=6\times\left\{0-\left(-\dfrac{121}{6}\right)\right\}=121$

73) [정답] 82

[해설]

사차함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서만 극솟값을 갖는다고 하면 함수 $g(t)$는

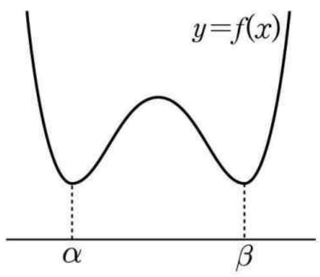
$$g(t)=\begin{cases}f(t)-f(\alpha) & (t<\alpha)\\ f(\alpha)-f(t) & (t\ge\alpha)\end{cases}$$

구간 $(-\infty, \alpha)$에서 함수 $f(t)$가 감소하므로 함수 $g(t)$도 감소하고, 구간 $[\alpha, \infty)$에서 함수 $f(t)$가 증가하므로 함수 $g(t)$는 감소한다. 실수 전체의 집합에서 함수 $g(t)$가 감소하므로 조건을 만족시키는 양수 k가 존재하지 않는다.

그러므로 함수 $f(x)$는 극댓값을 가져야 한다.

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$, $x=\beta(\alpha<\beta)$에서 극솟값을 가지고, $f(\alpha)=a$, $f(\beta)=b$라 하자.

(ⅰ) $f(\alpha)=f(\beta)$인 경우

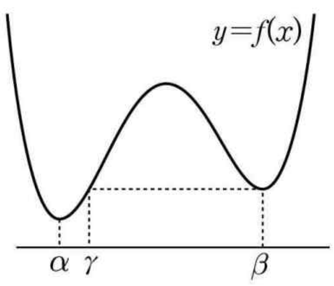


함수 $f(x)$의 최솟값은 a이므로

$$g(t)=\begin{cases}f(t)-a & (t<\alpha)\\ 0 & (\alpha\le t\le\beta)\\ a-f(t) & (t>\beta)\end{cases}$$

따라서 조건을 만족시키는 양수 k가 존재하지 않는다.

(ⅱ) $f(\alpha)<f(\beta)$인 경우

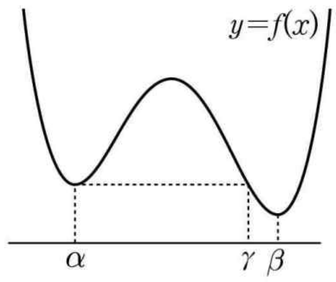


$\alpha<x<\beta$일 때, $f(x)=f(\beta)$의 해를 γ라 하면

$$g(t)=\begin{cases}f(t)-a & (t<\alpha)\\ a-f(t) & (\alpha\le t<\gamma)\\ a-b & (\gamma\le t\le\beta)\\ a-f(t) & (t>\beta)\end{cases}$$

$a-b<0$이므로 조건을 만족시키는 양수 k가 존재하지 않는다.

(ⅲ) $f(\alpha)>f(\beta)$인 경우



$\alpha<x<\beta$일 때, $f(x)=f(\alpha)$의 해를 γ라 하면

$$g(t)=\begin{cases}f(t)-b & (t<\alpha)\\ a-b & (\alpha\le t\le\gamma)\\ f(t)-b & (\gamma<t<\beta)\\ b-f(t) & (t\ge\beta)\end{cases}$$

$a-b>0$이므로 $k=a-b$, $\alpha=0$, $\gamma=2$이면 k는 주어진 조건을 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$f'(0)=0$, $f(0)=f(2)$

이다. 또 $g(4)=0$이므로 $\beta=4$이고 $f'(4)=0$이다.

$f(x)-f(0)=x^2(x-2)(x-p)$(p는 상수)라 하자.

$f'(x)=2x(x-2)(x-p)+x^2(2x-p-2)$이므로

$f'(4)=0$에서 $16(4-p)+16(6-p)=0$

$10-2p=0$, $p=5$

그러므로

$f(x)=x^2(x-2)(x-5)+f(0)$

$k=f(\alpha)-f(\beta)=f(0)-f(4)$

$=f(0)-\{-32+f(0)\}=32$

$g(-1)=f(-1)-f(4)$

$=\{18+f(0)\}-\{-32+f(0)\}=50$

따라서 $k+g(-1)=82$

74) [정답] 240

[해설]

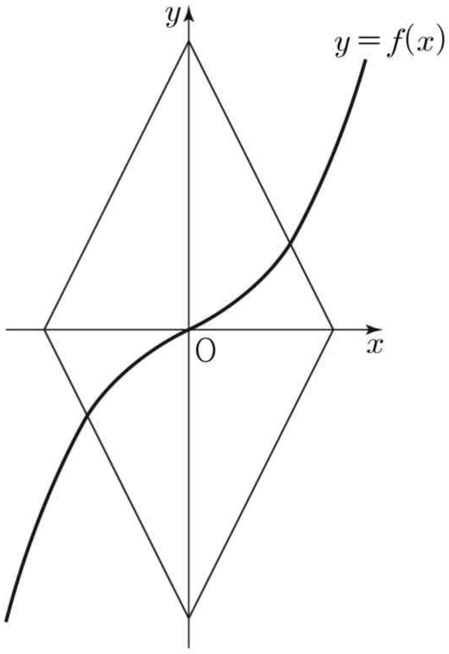
최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가

모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로

곡선 $y=f(x)$와 x축이 만나는 점의 개수는 1 또는 3이다.

(ⅰ) 곡선 $y=f(x)$와 x축이 만나는 점의 개수가 1인 경우

모든 양수 t에 대하여 $g(t)=2$이므로 함수 $g(t)$는 양의 실수 전체의 집합에서 연속이다.



(ii) 곡선 $y=f(x)$와 x축이 만나는 점의 개수가 3인 경우

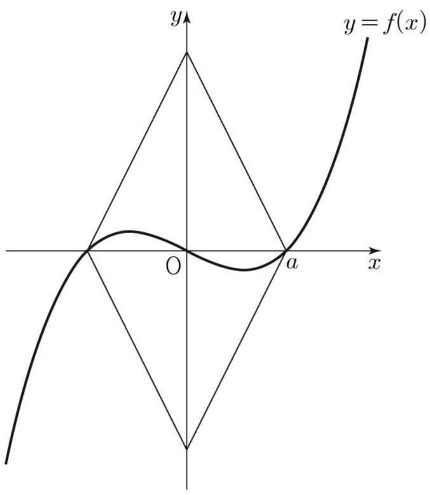
$f(x)=x(x-a)(x+a)(a>0)$이라 하자.

두 점 $(t, 0)$, $(0, -2t)$를 지나는 직선의 기울기는 t의 값에 관계없이 2이므로 $f'(a)$의 값에 따라 함수 $g(t)$가 $t=k$에서 불연속이 되는 k의 개수가 달라진다.

(a) $f'(a)\le 2$일 때

모든 양수 t에 대하여 $g(t)=2$이므로

함수 $g(t)$는 양의 실수 전체의 집합에서 연속이다.

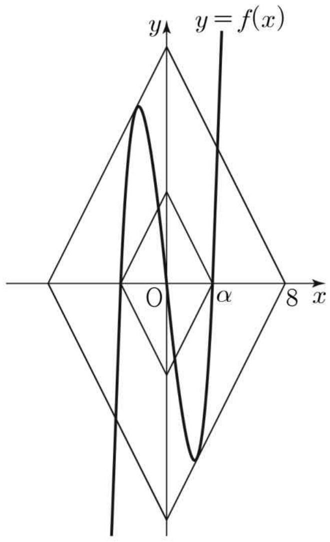


(b) $f'(a)>2$일 때

곡선 $y=f(x)$의 기울기가 2인 두 접선의 x절편을 각각 β, $-\beta(\beta>a)$라 하면

$$g(t)=\begin{cases}2 & (0<t<a \text{ 또는 } t>\beta)\\ 4 & (t=a \text{ 또는 } t=\beta)\\ 6 & (a<t<\beta)\end{cases}$$

함수 $g(t)$는 $t=a$, $t=\beta$에서 불연속이므로 $a=\alpha$, $\beta=8$



함수 $g(t)$가 $t=8$에서 불연속이므로

두 직선 $y=2x+16$과 $y=2x-16$은

곡선 $y=f(x)$에 접한다.

직선 $y=2x-16$이 곡선 $y=f(x)$에 접하는 점의 x좌표를 $p(0<p<\alpha)$라 하면

$p^3-\alpha^2 p=2p-16 \cdots\cdots$ ㉠

$f'(x)=3x^2-\alpha^2$이므로 $f'(p)=3p^2-\alpha^2=2$

에서 $\alpha^2=3p^2-2 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$p^3-(3p^2-2)p=2p-16$, $-2p^3=-16$

에서 $p=2$, $\alpha^2=10$이므로 $f(x)=x^3-10x$

따라서 $\alpha^2\times f(4)=10\times(4^3-10\times 4)=240$

75) [정답] 58

[해설]

$$g(x)=\begin{cases}f(x) & (x\ge t)\\ -f(x)+2f(t) & (x<t)\end{cases}$$에서

$$\lim_{x\to t-} g(x)=\lim_{x\to t+} g(x)=g(t)=f(t)$$

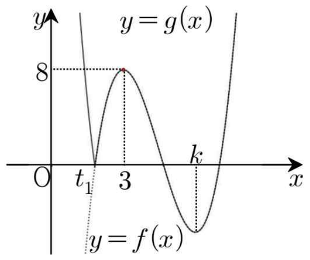
이므로 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

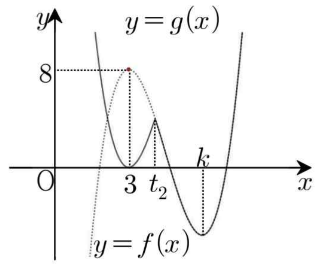
함수 $f(x)$가 $x=k$에서 극솟값을 갖는다고 하자.

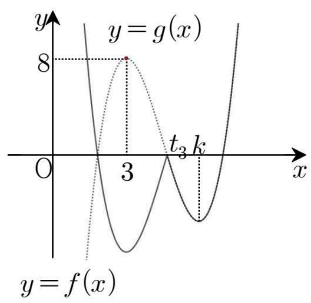
이때 함수 $y=-f(x)+2f(t)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후, y축의 방향으로 $2f(t)$만큼 평행이동한 것이다.

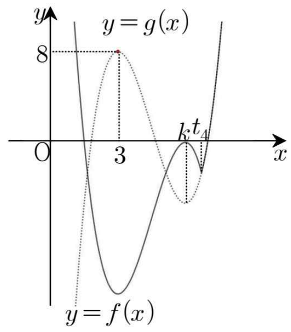
방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축과의 교점의 개수와 같으므로 $f(k)$의 값에 따라 나누어 생각할 수 있다.

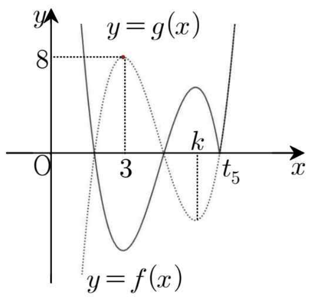
우선 $f(k)<0$인 경우를 생각해보면 함수 $y=g(x)$가 불연속일 때의 그래프는 다음과 같다.



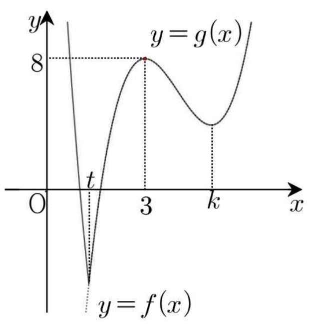




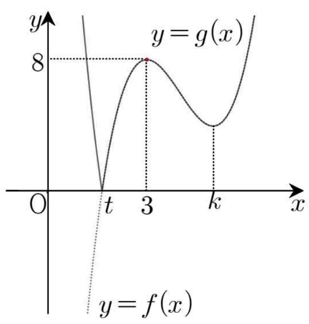




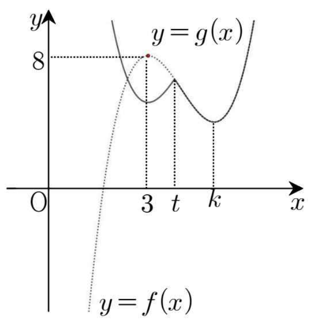
따라서 함수 $h(t)$는 $t=t_i$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$
에서 불연속이므로 주어진 조건에 위배된다.
위와 같은 방법으로 함수 $y=f(x)$의 그래프에 따라 함수 $y=g(x)$의 그래프를 그려보면 함수 $h(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값이 두 개인 경우는 다음과 같이 $t=k$일 때 $g(3)=0$이 되는 경우뿐이다.



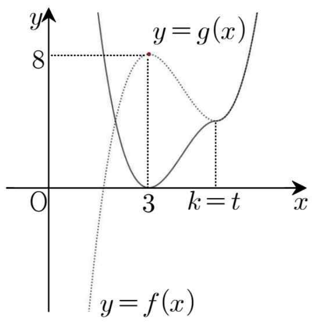
[교점 2개]



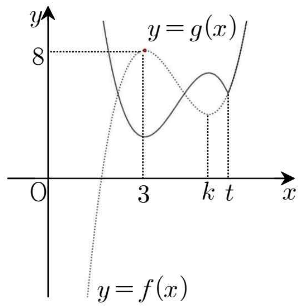
[교점 1개]



[교점 0개]



[교점 1개]



[교점 0개]

$t=k$일 때

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \ge k) \\ -f(x)+2f(k) & (x<k) \end{cases}$$

이고 이때 $g(3)=0$에서

$-f(3)+2f(k)=0$

즉 $-8+2f(k)=0$에서 $\quad f(k)=4$

한편, 최고차항의 계수가 1인 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 극댓값을 가지므로 $x=k$에서 극솟값을 가지므로 $k>3$이고

$f'(x)=3(x-3)(x-k)$

$\quad\quad=3x^2-3(3+k)x+9k$

$f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}(3+k)x^2+9kx+C$ (C는 적분상수)

이고 $f(3)=8$이므로

$27-\dfrac{27}{2}(3+k)+27k+C=8$

$C=\dfrac{43}{2}-\dfrac{27}{2}k$

따라서

$f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}(3+k)x^2+9kx+\dfrac{43}{2}-\dfrac{27}{2}k$

이때 $f(k)=4$이므로

$k^3-\dfrac{3}{2}(3+k)k^2+9k^2+\dfrac{43}{2}-\dfrac{27}{2}k=4,$

$-\dfrac{k^3}{2}+\dfrac{9}{2}k^2-\dfrac{27}{2}k+\dfrac{35}{2}=0,$

$k^3-9k^2+27k-35=0,$

$(k-5)(k^2-4k+7)=0$

모든 실수 k에 대하여 $k^2-4k+7>0$이므로

$k=5$

따라서

$f(x)=x^3-12x^2+45x-46$

이므로

$f(8)=512-768+360-46=58$

76) [정답] 11

[해설]

조건 (가)에서 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점을 구하면

$f(x)=f(x)+|f(x)-1|$

$\therefore f(x)=1$ …… ㉠

따라서 ㉠을 만족하는 서로 다른 실근의 합이 3이다.

문제에서 $f(1)=1$, $f'(1)=0$이므로 ㉠은 $x=1$을 중근으로 가지므로 다른 한 근은 2이다.

$\therefore f(x)=a(x-1)^2(x-2)+1$

조건 (나)에서

$0<\int_0^n g(x)\,dx-n<16$, 즉

$0<\int_0^n \{g(x)-1\}\,dx<16$ …… ㉡

을 만족해야 한다.

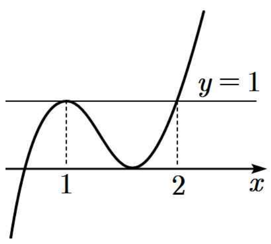
$g(x)=\begin{cases}2f(x)-1 & (f(x)\geq 1)\\ 1 & (f(x)<1)\end{cases}$에서

$g(x)-1=\begin{cases}2f(x)-2 & (f(x)\geq 1)\\ 0 & (f(x)<1)\end{cases}$

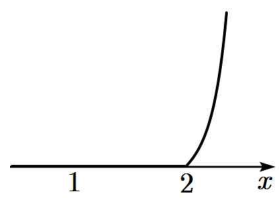
$=\begin{cases}2a(x-1)^2(x-2) & (f(x)\geq 1)\\ 1 & (f(x)<1)\end{cases}$

함수 $g(x)-1$의 그래프의 개형은 $f(x)$의 최고차항의 계수의 부호에 따라 다음 두 가지가 가능하다.

(i) $a>0$일 때

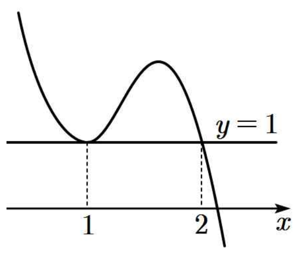


$y=f(x)$

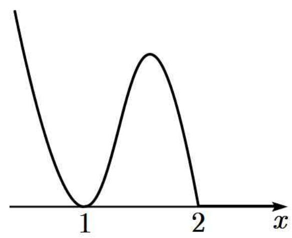


$y=g(x)-1$

(ii) $a<0$일 때



$y=f(x)$



$y=g(x)-1$

(i)의 경우는 $n=1$일 때, $\int_0^n \{g(x)-1\}\,dx=0$이므로 ㉡을 만족하지 않는다.

(ii)에서 ㉡을 만족하기 위해서는 $n=2$일 때만 만족하면 되므로

$\int_0^2 \{g(x)-1\}\,dx=\int_0^2 2a(x-1)^2(x-2)\,dx$

$=2a\int_0^2 \{(x-1)^3-(x-1)^2\}\,dx$

$=2a\left[\frac{1}{4}(x-1)^4-\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_0^2$

$=-\frac{4}{3}a$

따라서 ㉠에서 $0<-\frac{4}{3}a<16$, $-12<a<0$이므로 정수 a는 11개이고, 함수 $f(x)$의 개수도 11개다.

77) [정답] 30

[해설]

$g(x)=\int_0^x \{f'(t+a)\times f'(t-a)\}dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $g'(x)=f'(x+a)\times f'(x-a)$

$f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이므로 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 0 또는 1 또는 2이다.

(i) 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 0 또는 1인 경우

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이므로

$g'(x)=f'(x+a)\times f'(x-a)\geq 0$

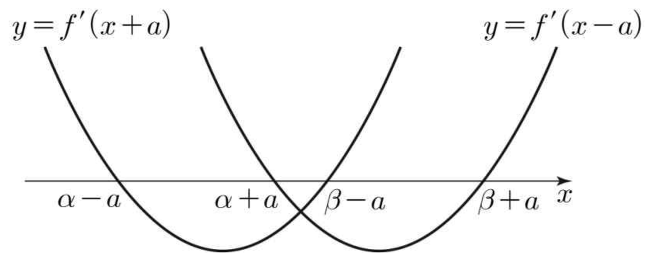
함수 $g(x)$는 극값을 갖지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2인 경우

$f'(x)=3(x-\alpha)(x-\beta)(\alpha<\beta)$라 하자.

(a) $\alpha+a<\beta-a$일 때

두 함수 $y=f'(x+a)$, $y=f'(x-a)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	$\alpha-a$	$\cdots$	$\alpha+a$	$\cdots$	$\beta-a$	$\cdots$	$\beta+a$	$\cdots$
$f'(x+a)$	+	0	−	−	−	0	+	+	+
$f'(x-a)$	+	+	+	0	−	−	−	0	+
$g'(x)$	+	0	−	0	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

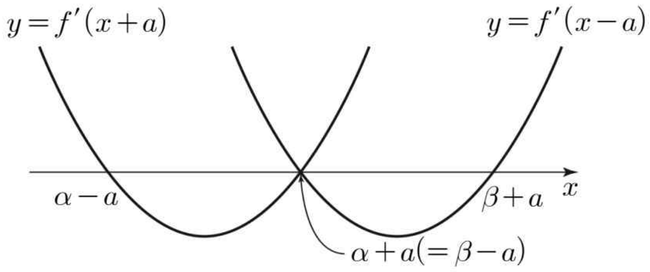
함수 $g(x)$는

$x=\alpha-a$, $x=\alpha+a$, $x=\beta-a$, $x=\beta+a$에서

극값을 가지므로 조건을 만족시키지 않는다.

(b) $\alpha+a=\beta-a$일 때

두 함수 $y=f'(x+a)$, $y=f'(x-a)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	$\alpha-a$	$\cdots$	$\alpha+a(=\beta-a)$	$\cdots$	$\beta+a$	$\cdots$
$f'(x+a)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x-a)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	극대	↘		↘	극소	↗

함수 $g(x)$는 $x=\alpha-a$, $x=\beta+a$에서만 극값을 가지므로 조건에 의하여

$(\beta+a)-(\alpha-a)=\dfrac{13}{2}-\dfrac{1}{2}=6$

$\beta-\alpha=2a$이므로

$(\beta+a)-(\alpha-a)=(\beta-\alpha)+2a=4a$

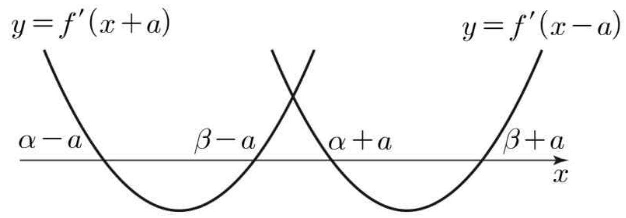
$4a=6$에서 $a=\dfrac{3}{2}$

그러므로 $\alpha-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}$에서 $\alpha=2$이고,

$\beta+\dfrac{3}{2}=\dfrac{13}{2}$에서 $\beta=5$이다.

(c) $\beta-a<\alpha+a$일 때

두 함수 $y=f'(x+a)$, $y=f'(x-a)$ 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	$\alpha-a$	$\cdots$	$\beta-a$	$\cdots$	$\alpha+a$	$\cdots$	$\beta+a$	$\cdots$
$f'(x+a)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x-a)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $g(x)$는 $x=\alpha-a$, $x=\beta-a$, $x=\alpha+a$, $x=\beta+a$에서 극값을 가지므로 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $f'(x)=3(x-2)(x-5)$

$f(x)=\displaystyle\int(3x^2-21x+30)dx$

$=x^3-\dfrac{21}{2}x^2+30x+C$($C$는 적분상수)

$f(0)=-\dfrac{1}{2}$이므로 $f(x)=x^3-\dfrac{21}{2}x^2+30x-\dfrac{1}{2}$

따라서 $a\times f(1)=\dfrac{3}{2}\times\left(1-\dfrac{21}{2}+30-\dfrac{1}{2}\right)=30$

78) [정답] ①

[해설]

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로 $x=0$에서 연속이다.

$g(0)=0$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to0-}g(x)=f(2)=0$

$f(x)=(x-2)(x-p)$(p는 상수)라 하면

$f(x+2)=x(x+2-p)$

$\displaystyle\lim_{h\to0-}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=2-p$

함수 $xf(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\displaystyle\lim_{h\to0+}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{F(h)-F(0)}{h}$

$=F'(0)=0$

$g'(0)=2-p=0$, $p=2$

$f(x)=(x-2)^2$

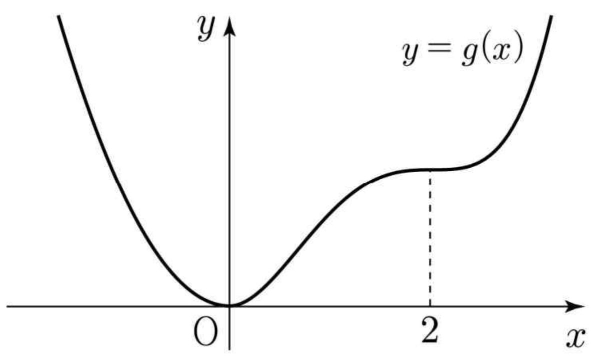
그러므로

$$g(x)=\begin{cases}x^2 & (x<0)\\ \displaystyle\int_0^x t(t-2)^2dt & (x\ge0)\end{cases}\quad g'(x)=\begin{cases}2x & (x<0)\\ 0 & (x=0)\\ x(x-2)^2 & (x>0)\end{cases}$$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗		↗

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



(i) $g(a)=0$인 경우

$h(x)=g(x)$이므로 함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수는 0

(ii) $0<g(a)<g(2)$ 또는 $g(2)<g(a)$인 경우 방정식 $h(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\displaystyle\lim_{x\to\alpha-}\frac{h(x)-h(\alpha)}{x-\alpha}\ne\lim_{x\to\alpha+}\frac{h(x)-h(\alpha)}{x-\alpha}$

$\displaystyle\lim_{x\to\beta-}\frac{h(x)-h(\beta)}{x-\beta}\ne\lim_{x\to\beta+}\frac{h(x)-h(\beta)}{x-\beta}$

함수 $h(x)$는 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 미분가능하지 않다.

함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수는 2

(iii) $g(a)=g(2)$인 경우

방정식 $h(x)=0$의 두 근을 $\gamma(\gamma<0)$, 2라 하면

$$\lim_{x\to\gamma-}\frac{h(x)-h(\gamma)}{x-\gamma}\neq\lim_{x\to\gamma+}\frac{h(x)-h(\gamma)}{x-\gamma}$$

함수 $h(x)$는 $x=\gamma$에서 미분가능하지 않다.

$0<x<2$일 때, $h(x)=g(2)-g(x)$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to2-}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}=-g'(2)=0 x>2$일 때,

$h(x)=g(x)-g(2)$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to2+}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}=g'(2)=0$

함수 $h(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다. 함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수는 1

$g(2)=\displaystyle\int_0^2 t(t-2)^2dt=\frac{4}{3}$이므로

$g(\gamma)=\gamma^2=\dfrac{4}{3}$, $\gamma=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

따라서 함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 모든 a의 값의 곱은

$$2\times\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

79) [정답] ④

[해설]

삼차함수 $g(x)$의 상수항이 0이므로 $g(x)$는 x를 인수로 갖는다. …… ㉠

조건 (가)의 $x|g(x)|=\displaystyle\int_{2a}^{x}(a-t)f(t)dt$에 $x=2a$를 대입하면

$2a|g(2a)|=0$

a가 양수이므로 $g(2a)=0$이고 $g(x)$는 $(x-2a)$를 인수로 갖는다. …… ㉡

㉠, ㉡에서 $g(x)=x(x-2a)(x-b)$ (단, b는 실수)

함수 $(a-x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

함수 $\displaystyle\int_{2a}^{x}(a-t)f(t)dt$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{2a}^{x}(a-t)f(t)dt=(a-x)f(x)$이다.

즉, 함수 $x|g(x)|$는 $x=2a$에서 미분가능하다.

$$\lim_{x\to2a+}\frac{x|g(x)|-2a|g(2a)|}{x-2a}=\lim_{x\to2a+}\frac{x|x(x-2a)(x-b)|}{x-2a}$$

$=\displaystyle\lim_{x\to2a+}x^2|x-b|$

$=4a^2|2a-b|$

$$\lim_{x\to2a-}\frac{x|g(x)|-2a|g(2a)|}{x-2a}=\lim_{x\to2a-}\frac{x|x(x-2a)(x-b)|}{x-2a}$$

$=\displaystyle\lim_{x\to2a-}(-x^2|x-b|)$

$=-4a^2|2a-b|$

이므로 $4a^2|2a-b|=-4a^2|2a-b|$에서 $b=2a$이다.

따라서 $g(x)=x(x-2a)^2$

$$\int_{2a}^{x}(a-t)f(t)dt=\begin{cases}-x^2(x-2a)^2 & (x<0)\\ x^2(x-2a)^2 & (x\ge0)\end{cases}$$

이고 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

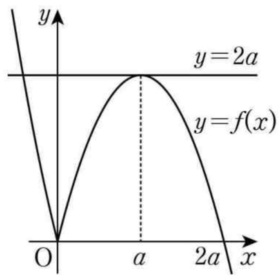
$$(a-x)f(x)=\begin{cases}-4x(x-a)(x-2a) & (x<0)\\ 4x(x-a)(x-2a) & (x\ge0)\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}4x(x-2a) & (x<0)\\ -4x(x-2a) & (x\ge0)\end{cases}$$

방정식 $g(f(x))=0$에서

$f(x)=0$ 또는 $f(x)=2a$

방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근 0, $2a$를 가지므로 조건 (나)에 의해 방정식 $f(x)=2a$는 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.



곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2a$의 교점의 개수가 2이어야 하므로

$f(a)=-4a(a-2a)$

$=4a^2=2a$

$a=\dfrac{1}{2}$

$\displaystyle\int_{-2a}^{2a}f(x)dx=\int_{-1}^{1}f(x)dx$

$=\displaystyle\int_{-1}^{0}(4x^2-4x)dx+\int_0^1(-4x^2+4x)dx$

$=\left[\dfrac{4}{3}x^3-2x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\dfrac{4}{3}x^3+2x^2\right]_0^1$

$=4$

80) [정답] 34

[해설]

(i) 집합 $A=\left\{(2+2\cos\theta,\ 2+2\sin\theta)\ \middle|\ -\dfrac{\pi}{3}\le\theta\le\dfrac{\pi}{3}\right\}$에서

$x=2+2\cos\theta$, $y=2+2\sin\theta$라 하면

$x-2=2\cos\theta$에서 $(x-2)^2=4\cos^2\theta$ …… ㉠

$y-2=2\sin\theta$에서 $(y-2)^2=4\sin^2\theta$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$(x-2)^2+(y-2)^2=4\left(-\dfrac{\pi}{3}\le\theta\le\dfrac{\pi}{3}\right)$

(ii) 집합 $B=\left\{(-2+2\cos\theta,\ 2+2\sin\theta)\ \middle|\ \dfrac{2\pi}{3}\le\theta\le\dfrac{4\pi}{3}\right\}$에서

$x=-2+2\cos\theta,\ y=2+2\sin\theta$라 하면

$x+2=2\cos\theta$에서 $(x+2)^2=4\cos^2\theta$ …… ㉢

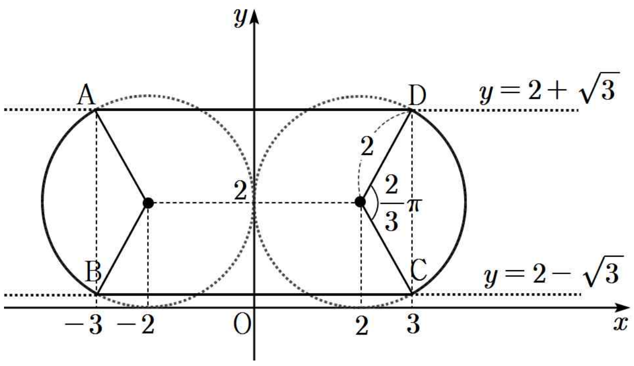
$y-2=2\sin\theta$에서 $(y-2)^2=4\sin^2\theta$ …… ㉣

㉢+㉣을 하면

$(x+2)^2+(y-2)^2=4\left(\frac{2\pi}{3}\le\theta\le\frac{4\pi}{3}\right)$

(iii) 집합 $C=\{(a,\ b)\,|\,-3\le a\le 3,\ b=2\pm\sqrt{3}\}$은 $-3\le x\le 3$에서 직선 $y=2+\sqrt{3}$, $y=2-\sqrt{3}$ 위의 점의 자취를 의미한다.

이상에서 나타내는 집합을 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 집합 $A\cup B\cup C$의 모든 원소가 나타내는 도형 X로 둘러싸인 부분의 넓이 α는

α=2×(활꼴 AB의 넓이)+(사각형 ABCD의 넓이)

$$=2\times\left(\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{2\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot\sin\frac{2}{3}\pi\right)+6\times\{2+\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})\}$$

$$=\frac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}+12\sqrt{3}$$

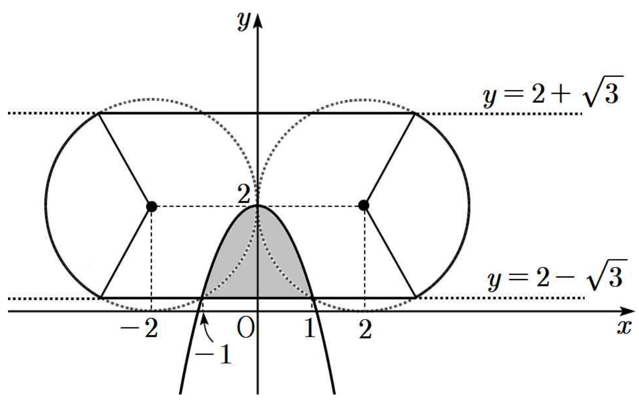
$$=\frac{8\pi}{3}+10\sqrt{3}$$

도형 X와 곡선 $y=-\sqrt{3}x^2+2$가 만나는 점의 y좌표를 c라 하면 $c=2-\sqrt{3}$

$-\sqrt{3}x^2+2=2-\sqrt{3}$에서

$x^2=1$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 곡선 $y=-\sqrt{3}x^2+2$와 직선 $y=2-\sqrt{3}$으로 둘러싸인 부분의 넓이 β는 다음 그림과 같다.



넓이 $\beta=\int_{-1}^{1}\{(-\sqrt{3}x^2+2)-(2-\sqrt{3})\}dx$이므로

$$\beta=-\sqrt{3}\int_{-1}^{1}(x^2-1)dx$$

$$=-2\sqrt{3}\int_{0}^{1}(x^2-1)dx$$

$$=-2\sqrt{3}\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_0^1$$

$$=-2\sqrt{3}\times\left(\frac{1}{3}-1\right)$$

$$=\frac{4}{3}\sqrt{3}$$

$$\alpha-\beta=\frac{8\pi}{3}+10\sqrt{3}-\frac{4}{3}\sqrt{3}$$

$$=\frac{8\pi}{3}+\frac{26}{3}\sqrt{3}$$

따라서 $p=8,\ q=26$이므로

$p+q=8+26=34$