Seoul Union of Math education

서울권 수학교육과 연합 동아리
SUM 소모임 해장 고3팀 주관

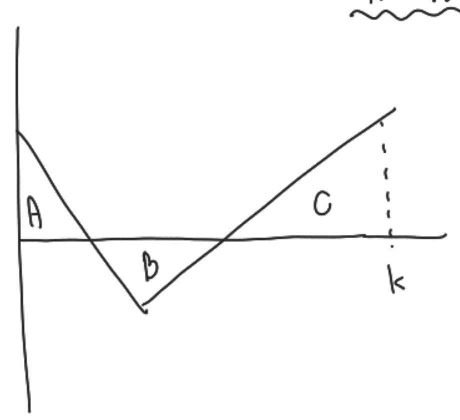
theme 1. 속도와 거리

- $\underbrace{\text{움직인 거리}}_{S(k)}$ vs $\underbrace{\text{위치의 변화량}}_{x(k)}$

0~t초 　　 a~b초

$$x(k)=\int_0^k v(t)\,dt \to \int_a^b v(t)\,dt$$
$$S(k)=\int_0^k |v(t)|\,dt \to \int_a^b |v(t)|\,dt$$

- 그래프로 계산하는 법 　 적분 대신.



$x(k)=A-B+C$

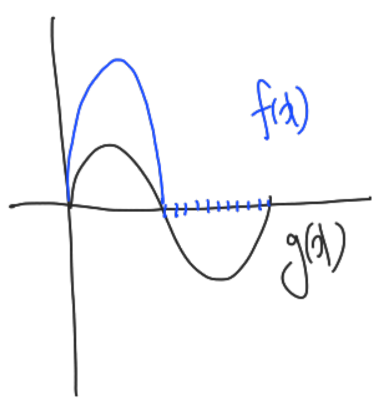
$S(k)=A+B+C$

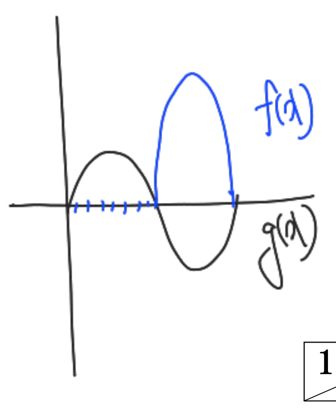
※ 대칭, 닮음 활용

- 원함수와 절댓값함수$(f(x)\pm|f(x)|)$

$$f(x)=|g(x)|+g(x)=\begin{cases}2g(x) & (g(x)\ge 0)\\ 0 & (g(x)<0)\end{cases}$$

$$f(x)=|g(x)|-g(x)=\begin{cases}0 & (g(x)\ge 0)\\ -2f(x) & (g(x)<0)\end{cases}$$





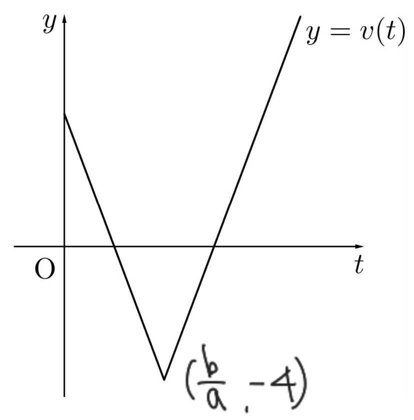
1. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\ge 0)$에서의 속도는

$$v(t)=|at-b|-4 \quad (a>0,\ b>4)$$

이다. 시각 $t=0$에서 $t=k$까지 점 P가 움직인 거리를 $s(k)$, 시각 $t=0$에서 $t=k$까지 점 P의 위치의 변화량을 $x(k)$라 할 때, 두 함수 $s(k)$, $x(k)$가 다음 조건을 만족시킨다.

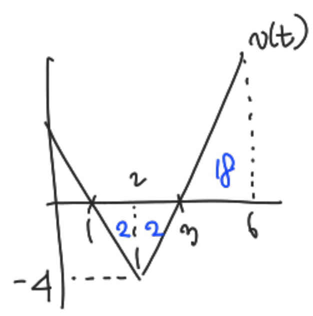
(가) $0\le k<3$이면 $s(k)-x(k)<8$이다.
(나) $k\ge 3$이면 $s(k)-x(k)=8$이다.

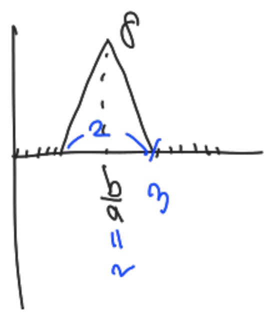
시각 $t=1$에서 $t=6$까지 점 P의 위치의 변화량을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)



2023 사관 20

$$S(k)=\int_0^k |v(t)|\,dt$$
$$-)\ x(k)=\int_0^k v(t)\,dt$$
$$S(k)-x(k)=\int_0^k |v(t)|-v(t)\,dt$$





① $b=2a$

② $v(3)=0$

$a=4,\ b=8$

$\therefore \int_1^6 v(t)\,dt$

$=\boxed{14}$

2. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$가 두 상수 a, b에 대하여

$$x(t)=t(t-1)(at+b) \quad (a \neq 0)$$

이다. 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $\int_0^1 |v(t)|dt=2$를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\int_0^1 v(t)dt=0$

ㄴ. $|x(t_1)|>1$인 t_1이 열린구간 $(0,\ 1)$에 존재한다.

ㄷ. $0 \leq t \leq 1$인 모든 t에 대하여 $|x(t_2)|<1$이면 $x(t_2)=0$인 t_2가 열린구간 $(0,\ 1)$에 존재한다.

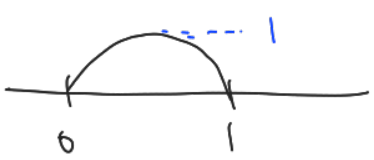
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2022 수능 14

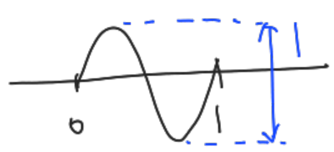
ㄱ. $\int_0^1 v(t)\,dt = x(1)-x(0)=0$

~~ㄴ.~~

i)



ii)



ㄷ. ii) 경우이므로 t_2 존재.

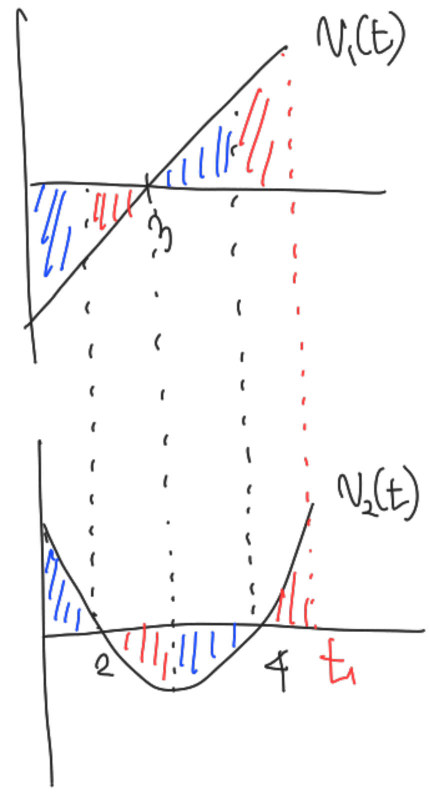
③

3. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=2(t-3), \quad v_2(t)=(t-2)(t-4)$$

이다. 시각 $t=0$부터 $t=t_1(t_1 \geq 4)$까지 두 점이 같은 방향으로 움직인 거리의 합과, 시각 $t=0$부터 $t=t_1$까지 두 점이 다른 방향으로 움직인 거리의 합이 같을 때, t_1의 값을 구하시오.

2021 문참시 자작문제



다 같 다 같

$\therefore t_1 = \boxed{6}$

theme 2. 미분가능성

• 구간별함수의 연속성과 미분가능성

$f(x) = \begin{cases} g(x) & (x<a) \\ h(x) & (x\ge a) \end{cases}$ $(g.h : 미가)$

연속 : $g(a) = h(a)$

미가 : ① $g(a) = h(a)$

② $g'(a) = h'(a)$

• 절댓값함수의 연속성과 미분가능성

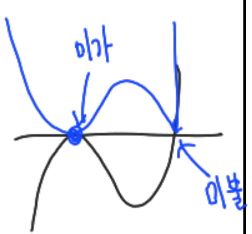
$f(x) = |g(x)|$ $(g : 미가)$

$f(x)$는 항상 연속.

$f(x)$가 미분가능하려면 $g(x)=0$인 곳에서 $g'(x)=0$

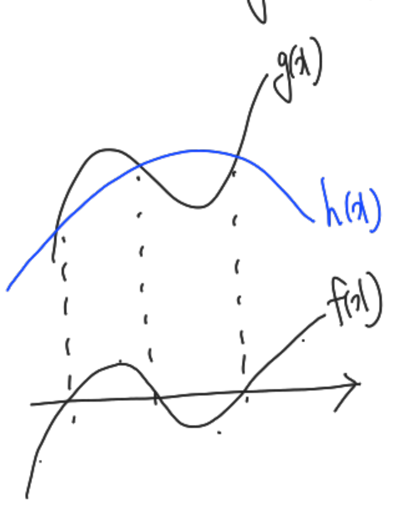
$g(a)=0 \Rightarrow g'(a)=0$

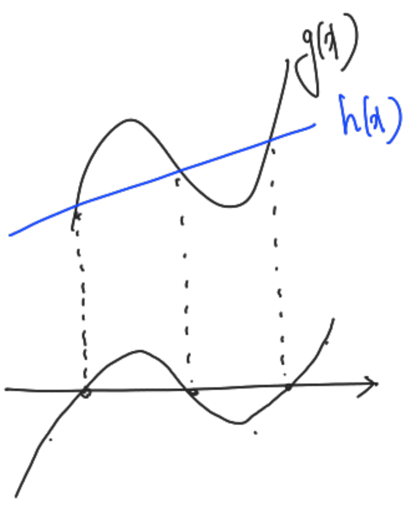
x축과 만나면 접해야 한다!



• 차함수

$f(x) = g(x) - h(x)$.



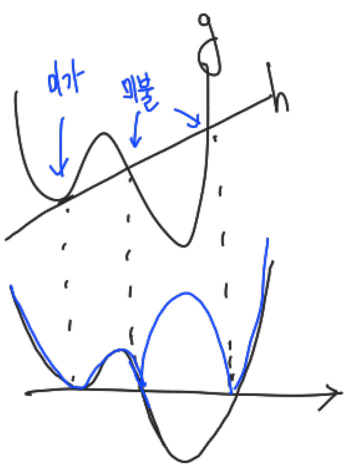


$f(x) = |g(x) - h(x)|$

$g(a)-h(a)=0 \Rightarrow g'(a)-h'(a)=0$

$g(a)=h(a) \Rightarrow g'(a)=h'(a)$

$g(x)$와 $h(x)$가 만나면 접해야 한다.



4. 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, 함수 $g(x)$는 일차함수이다. 함수 $h(x)$를

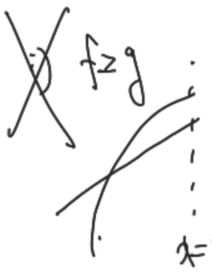
$$h(x) = \begin{cases} |f(x) - g(x)| & (x < 1) \\ f(x) + g(x) & (x \ge 1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, $h(0) = 0$, $h(2) = 5$일 때, $h(4)$의 값을 구하시오.

2020 수능 나 30

$x=1$ 기준으로 함숫값 같고, 미분계수 같다. & $f(a)=g(a) \Rightarrow f'(a)=g'(a)$

~~i)~~ $f \ge g$.



ii) $f<g$.

$h = \begin{cases} f-g \\ f+g \end{cases}$

$g(1)=0$, $g'(1)=0$.

$h = \begin{cases} g-f \\ f+g \end{cases}$

$f(1)=0$, $f'(1)=0$.

$h(0)=0$이므로 $f(0)=g(0)$, $f'(0)=g'(0)$.

$f(x) - g(x) = x^2(x-k)$.

$\rightarrow f(x) = x^2(x-k) + g(x)$

$f(1) = 1-k+g(1) = 0$ $f'(1) = 3-2k+g'(1) = 0$

$g(1) = k-1$ $g'(1) = 2k-3$

$\therefore g(x) = (2k-3)x - k + 2$.

$h(2) = f(2) + g(2) = 4(2-k) + 2g(2)$, $g(2) = 3k-4$

$= 2k = 5$

$\therefore h(4) = f(4) + g(4) = \boxed{39}$

5. 두 양수 p, q와 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-12$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $p+q$의 값은?

(가) 모든 실수 x에 대하여 $xg(x)=\lvert xf(x-p)+qx\rvert$이다.
(나) 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1이다.

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

2022 6월 14

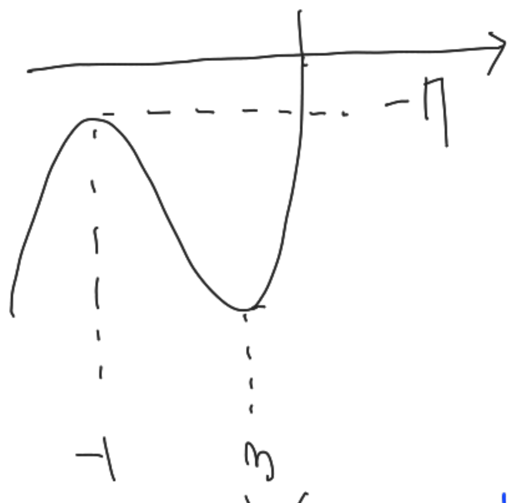
$$g(x)=\begin{cases} \lvert f(x-p)+q\rvert & (x>0) \\ k=0 & (x=0) \\ -\lvert f(x-p)+q\rvert & (x<0)\end{cases}$$

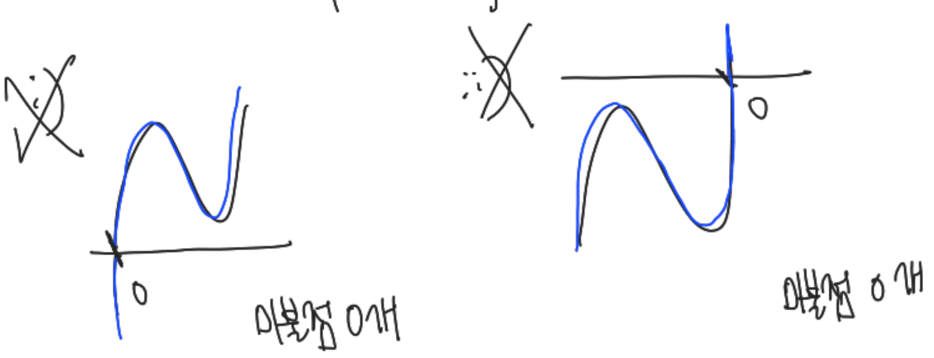
g: 연속 ⇒ $k=0$

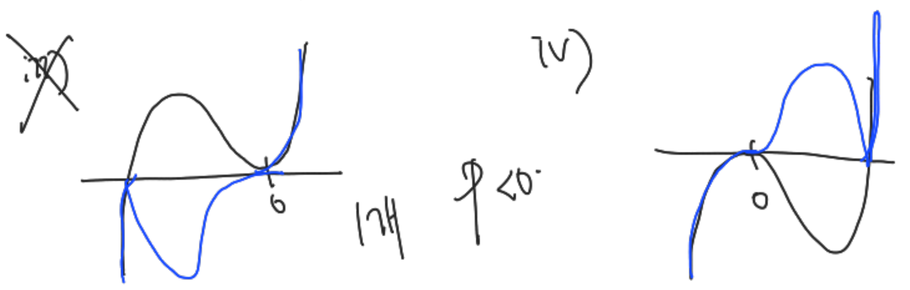
$f(x-p)+q$ 의 x절편 中 하나가 0.

x절편에서 접 (한 곳 빼고).

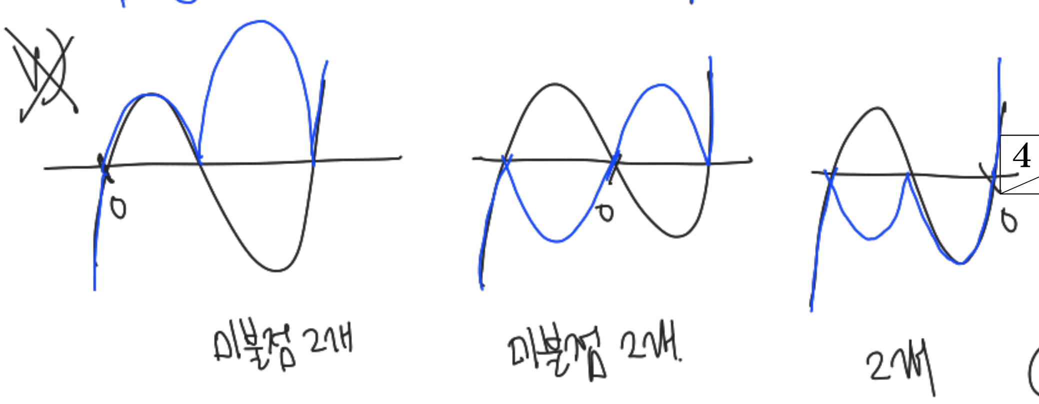
$f'(x)=3x^2-6x-9$







∴ $p=1$, $q=17$



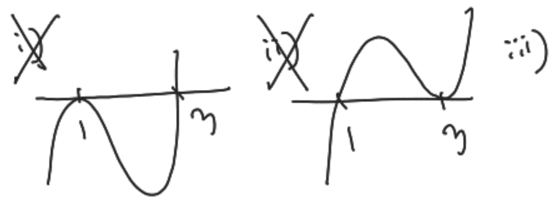
③

6. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

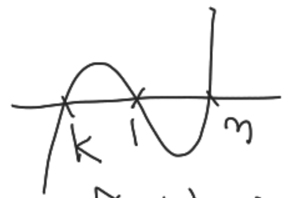
(가) $f(1)=f(3)=0$
(나) 집합 $\{x \mid x\geq 1$이고 $f'(x)=0\}$의 원소의 개수는 1이다.

상수 a에 대하여 함수 $g(x)=\lvert f(x)f(a-x)\rvert$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $\dfrac{g(4a)}{f(0)\times f(4a)}$의 값을 구하시오.

2021 9월 나형 30



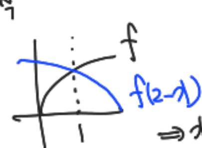
iii)



$f(x)=(x-k)(x-1)(x-3)$

$f(x)f(a-x)$: x축과 만나면 접.
→ $x=k$, $x=1$, $x=3$에서 접.
→ 근 2개씩

$\boxed{1}$ ∴ ✗ $f(a-x)$



⇒ $x=\frac{a}{2}$ 대칭

$\boxed{2}$ $f(a-x)=0$ 근
∴ $x=a-k,\ a-1,\ a-3$
$\quad\ \ 3,\quad\ 1,\quad\ k$
$a=2$, $k=-1$.

∴ $k=-1$, $a=2$

∴ $\dfrac{\lvert f(8)\times f(-6)\rvert}{f(0)\times f(8)} = \boxed{14}$

7. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (0\leq x\leq 2) \\ (x-1)f(x) & (x<0 \text{ 또는 } x>2)\end{cases}$$

와 상수 k는 다음 조건을 만족시킨다. (단, $g(2)\neq 0$)

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
(나) 함수 $g(x)$가 미분가능하지 않은 점의 개수는 1이다.
(다) $g(k)=0$, $g'(k)=18$

$g(4)\times\displaystyle\int_0^k \lvert f(x)\rvert dx$의 값을 구하시오.

2022-1 해장 자작문제

$$g'=\begin{cases} f' & (0<x<2) \\ f+(x-1)f' & (x<0 \text{ or } x>2)\end{cases}$$

연속 ⇒ $f(0)=0$.

i) $x=0$ 때 $f(0)=0$.

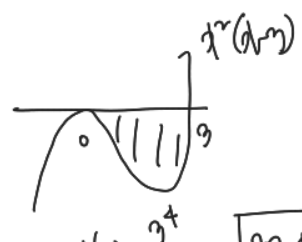
✗ $x=2$ 때 $f(2)=0$

$f(x)=x^2(x-k)$.

i) $0\leq k\leq 2$: $f(k)=0$, $f'(k)=18$
$k^2=18$.
(✗)

ii) $k<0$ or $k>2$: $f(k)=0$
$(k-1)f'(k)=18$.
$(k-1)k^2=18$
→ $k=3$.

$x^2(x-3)$



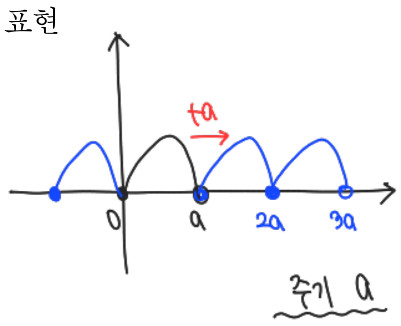
∴ $3\times 18\times \dfrac{3^4}{12} = \boxed{324}$

theme 3. 대칭성, 주기성

- 주기함수, 대칭함수의 표현

사이가 a

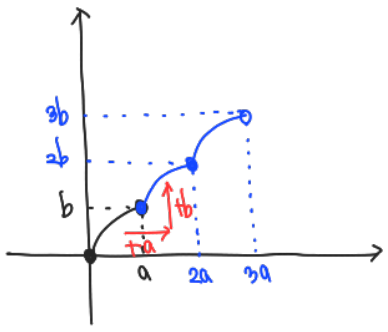
$f(x)=f(x-a)$:



사이가 a

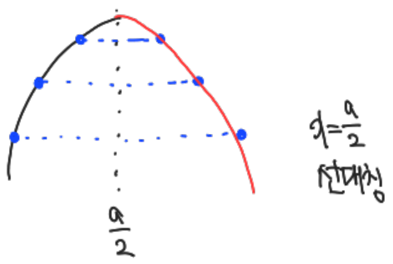
$f(x)=f(x-a)+b$:

사이가 b



평균이 $\frac{a}{2}$

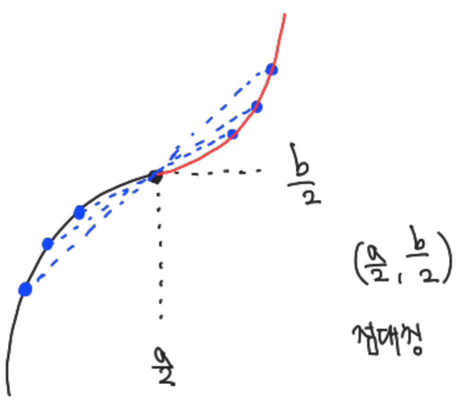
$f(x)=f(a-x)$:



평균이 $\frac{a}{2}$

$f(x)+f(a-x)=b$:

평균이 $\frac{b}{2}$



- 주기함수, 대칭함수의 정적분

$f(x)=f(x-a)$

$\int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$
$= \int_k^{2a+k} f(x)\,dx$

$f(x)=f(x-a)+b$

→ 직사각형을 분리

$f(x)=f(a-x)$

$\int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)\,dx$

$f(x)+f(a-x)=b$

→ 대칭 활용.
직사각형 넓이

8. 닫힌구간 $[0,1]$에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$f(0)=0,\quad f(1)=1,\quad \int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{6}$$

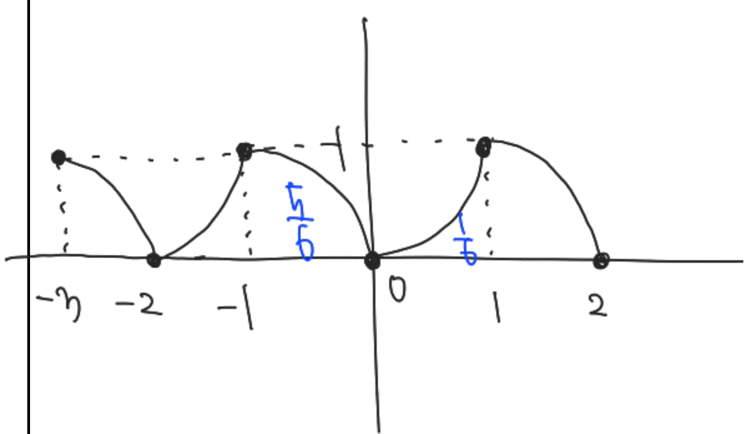
을 만족시킨다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_{-3}^{2} g(x)\,dx$의 값은?

(가) $g(x)=\begin{cases} -f(x+1)+1 & (-1<x<0) \\ f(x) & (0\le x\le 1)\end{cases}$

(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)$이다.

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{17}{6}$ ③ $\frac{19}{6}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{23}{6}$

2022 6월 11



$\frac{5}{6}\times 3 + \frac{1}{6}\times 2 = \frac{17}{6}$

2

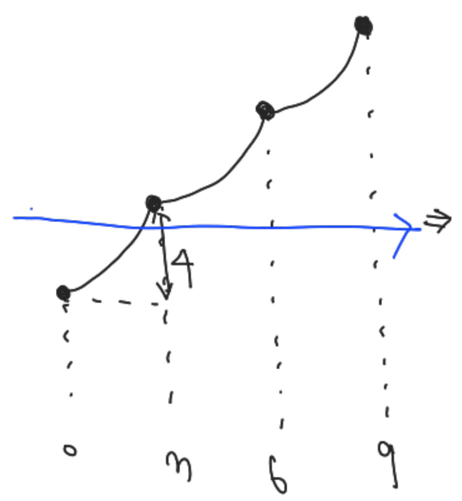
9. 실수 전체의 집합에서 증가하는 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x-3)+4$이다.
(나) $\int_0^6 f(x)\,dx=0$

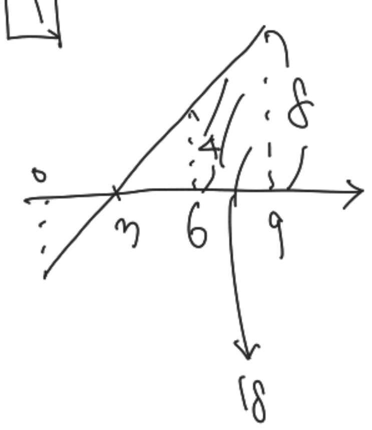
함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=6$, $x=9$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① 9 ② 12 ③ 15 ④ 18 ⑤ 21

2019 수능 나형 17



$\boxed{1}$



$\boxed{2}$

$$\int_6^9 f(x)\,dx = \int_6^9 f(x-3)+4\,dx$$

$$= \int_3^6 f(x)+4\,dx$$

$$\int_0^6 f(x)\,dx = \int_0^3 f(x)\,dx + \underbrace{\int_3^6 \overset{f(x-3)+4}{f(x)}\,dx}_{\int_0^3 f(x)+4\,dx}$$

$$\therefore \int_0^3 f(x)\,dx = -6$$

$$\int_3^6 f(x)\,dx = 6$$

$$\therefore 6+12=18$$

④

10. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

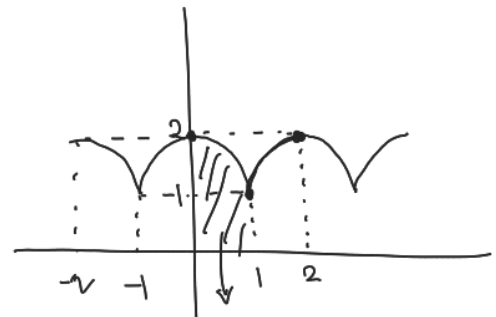
(가) $0 \le x \le 1$에서 $f(x)=-x^2+2$이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(1-x)=f(1+x)$이다.
(다) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이다.

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=\int_{-n}^{n} f(x)\,dx$$

를 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{15} n^2 a_n$의 값을 구하시오.

2022-1 해장 자작문제



$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{5}{3}$

$$a_1+\cdots+na_n = S_n = 2\underbrace{\int_0^n f(x)\,dx}_{=\frac{5}{3}n} = \frac{10}{3}n$$

$$na_n = S_n - S_{n-1} = \frac{10}{3} \quad (n\ge 2)$$
$$1\cdot a_1 = S_1 = \frac{10}{3}$$
$$\Rightarrow na_n = \frac{10}{3}.$$

$$\sum_{n=1}^{15} n^2 a_n = \sum_{1}^{15} \frac{10}{3} n = \frac{10}{3} \times \frac{15\times16}{2} = \boxed{400}$$

theme 1. 속도와 거리

1. 14
2. ③
3. 6

theme 2. 미분가능성

4. 39
5. ③
6. 105
7. 324

theme 3. 대칭성, 주기성

8. ②
9. ④
10. 400