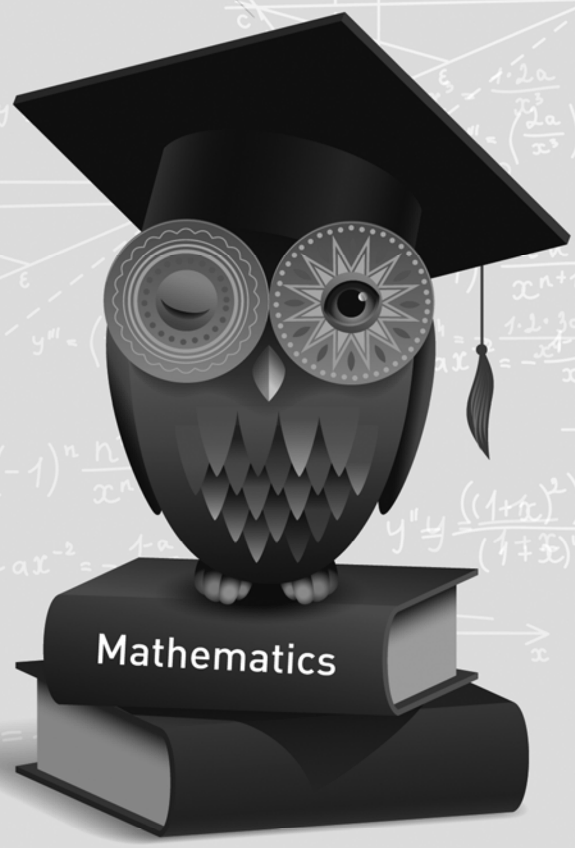
부산교육 2014-138

수리논술 나침반Ⅵ



Math Compass

부산광역시교육청
BUSAN METROPOLITAN CITY OFFICE OF EDUCATION

발/간/사

21세기 정보지식기반 사회에서는 창의성, 인성, 비판적 사고력, 문제해결력을 겸비한 창의 인재를 요구하고 있습니다. 창의 인재가 지녀야 할 중요한 능력 중 하나는 많은 지식과 쏟아지는 정보 속에서 자신만의 창의적인 아이디어로 새로운 문제 상황을 해결하는 융합적 사고 능력입니다. 그러므로 미래지향적인 인재는 논리적 분석력과 비판적 사고력을 바탕으로 한 문제해결 능력을 갖출 필요가 있습니다.

우리 교육청에서는 그동안 꾸준히 교실 수업 개선을 통하여 논리적 사고력과 비판적 사고력, 문제해결 능력, 소통을 위한 표현력 신장에 노력해 왔으며, 특히 수학 교육과 논술 교육 활동을 적극 장려하여 왔습니다. 학교 내 수리 논술 캠프를 비롯하여 논술 교재 발간, 논술 캠프 운영 및 모의면접교실 운영, 논술교육지원단 활동 등을 통하여, 교육 현장의 수학 교육과 논술 교육 지원을 위해 노력하고 있습니다.

이러한 분위기 속에서 자생적으로 결성된 수학 교사 동아리 나침반에서는 수학 교육과 논술 교육을 위한 연구 활동을 열성적으로 진행하였고, 올해로 6번째 『수리논술나침반』 교재를 교단 지원 자료로 발간하게 되었습니다.

이번에 발간되는 『수리논술나침반VI』 교재는 주요 대학의 수리 논술 모의고사 문제와 기출 문제 제시 및 문제 분석과 여러 가지 풀이 방법에 대한 해설을 담고 있습니다. 또한 『수리논술나침반VI』 교재는 대학별 문제와 관련되는 배경 지식과 읽기 자료, 수능 대비 문항까지 제시하고 있어서, 교재의 이름처럼 수학과 수리 논술 공부의 나침반이 되어 줄 것입니다.

그동안 수학 교육을 위한 연구 활동과 자료 개발을 위해 열정과 노력을 아끼지 않으신 수학 교사 동아리 나침반 선생님들께 감사의 말씀을 드리며, 이 교재가 학교 현장에서 널리 활용되기를 바랍니다.

2014. 6. 5.

부산광역시교육감 **임 혜 경**

수리논술

나침반VI

Contens

1 경북대학교 수시 AAT 자연계열 문제1

제시문 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.*

【제시문 1】

닫힌 구간 $[a,\ b]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 는 $f(a)$ 와 $f(b)$ 사이의 값 k 에 대하여 방정식 $f(x)-k=0$ 을 만족하는 근을 구간 $[a,\ b]$ 에서 적어도 하나 가진다.

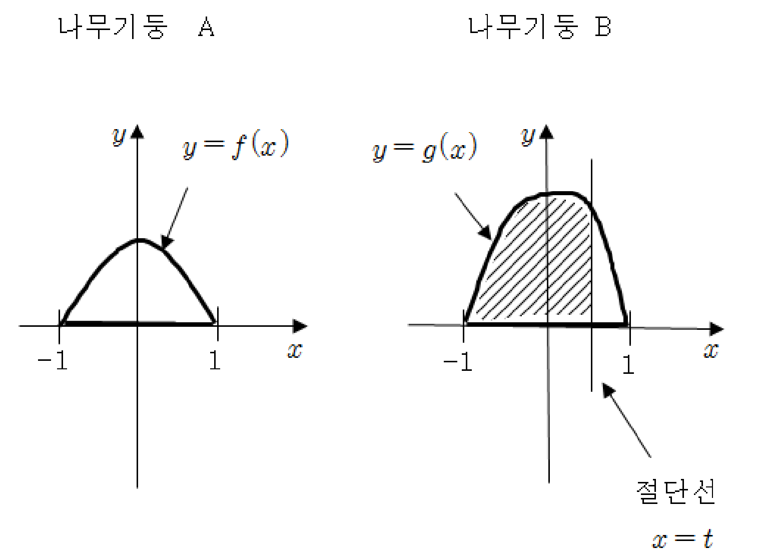
【제시문 2】

함수 $f(x)$ 가 미분가능할 때, 방정식 $f(x)=0$ 을 만족하는 근 α 를 구하는 뉴턴의 방법은 다음과 같다. 먼저 α 에 대한 적당한 근삿값 x_0 을 선택한다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x_0,\ f(x_0))$ 에서 접선을 구하고 접선의 x 절편 x_1 을 계산한다. x_1 은 x_0 보다 α 에 더 가까운 값이 되며 제1차 근삿값이라 한다. x_1 을 x_0 대신 사용하여 위의 과정을 따라가면, x_1 보다 α 에 더 가까운 값 x_2 를 구할 수 있고 이를 제2차 근삿값이라 한다. 이러한 과정을 계속 반복하면 근에 수렴하는 수열 $x_0, x_1,\ x_2,\ \cdots$ 을 얻을 수 있고, 이를 통해 근에 보다 가까운 근삿값을 구할 수 있다.

【제시문 3】

아래 그림은 길이와 밀도가 똑같은 두 개의 나무기둥 A , B 의 수평 단면에 좌표축을 설정하여 살펴 본 그래프이다. A 의 무게가 B 의 무게보다 훨씬 가벼울 경우 무게가 같아지도록 나무기둥 B 를 절단하는 방법을 알아보자. A 의 단면은 $y=f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸여 있고, B 의 단면은 $y=g(x)$ 와 x 축으로 둘러싸여 있다. a_0 는 A 의 단면적이고, $a(t)$ 는 B 단면의 빗금 친 부분의 면적이다. $S(t)=a(t)-a_0$ 이라 하면, $S(t)$ 는 닫힌 구간 $[-1,\ 1]$ 에서 연속인 함수가 된다. 방정식 $S(t)=0$ 을 만족하는 근 α 를 구하고 절단선 $x=\alpha$ 를 따라 나무기둥 B 를 잘라내면, 무게가 A 와 같은 나무기둥을 얻을 수 있다.

* 경북대학교 입학처



논제 I-1

【제시문 2】에서 점 $(x_0,\ f(x_0))$을 지나는 접선의 방정식은 (　㉠　)이다. 또한 제1차 근삿값 x_1은 이 접선의 x절편이므로 x_1과 x_0 사이의 관계식 $x_1 = x_0 - ($ ㉡ $)$을 유도할 수 있다. 괄호 안의 ㉠, ㉡을 구하시오. (단, $f'(x_0) \neq 0$이다.) (30점)

논제 I-2

【제시문 3】에서 정의한 연속함수 $S(t)$에 대하여 방정식 $S(t)=0$을 만족하는 근이 닫힌 구간 $[-1,\ 1]$에 적어도 하나 존재한다. 그 이유를 【제시문 1】에 근거하여 설명하시오. (30점)

논제 I-3

【제시문 3】에서 $a_0 = 1$, $g(x) = 1 - x^2$인 경우 【제시문 2】에 근거하여 방정식 $S(t)=0$을 만족하는 근의 제2차 근삿값 t_2를 구하시오. (단, $t_0 = \dfrac{1}{2}$이다.) (40점)

논술유형분석

문항 수	수학 1문항, 과학 1문항	시간	100분
연관 개념	연속함수의 성질, 중간값의 정리, 정적분의 활용, 접선의 방정식, 도형의 방정식		

제시문분석

제시문[1]

중간값의 정리에 대해 제시하고 있다.

제시문[2]

방정식 근의 근삿값을 구하는 뉴턴의 방법을 소개하고 있다.

제시문[3]

제시문[가]와 제시문[나]에서 제시한 중간값의 정리와 뉴턴의 방법을 사용하기 위해 실제 문제 상황을 제시하고 있다.

논제분석

논제 I-1

미분가능한 함수에 대한 접선의 방정식을 구하고 이 함수에 대한 x절편을 구하는 미적분학의 기본 지식을 묻는 쉬운 문제이다.

논제 I-2

주어진 상황에서 유추되는 연속함수 $S(t)$ 에 대한 성질을 묻는 문제이다. 특히, [제시문 3]의 상황에 근거하여 연속함수 $S(t)$ 가 근을 가짐을 중간값 정리를 활용하여 증명할 수 있는지를 묻고 있는 수학적 추론능력을 판단하고자 하였다.

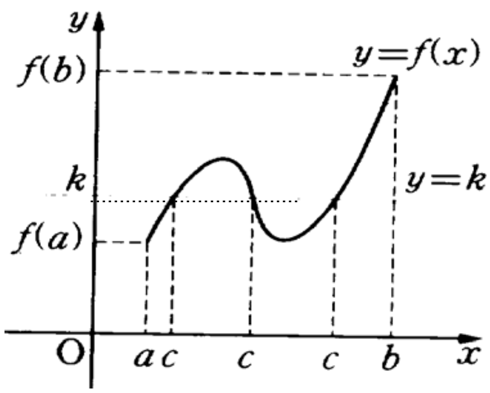
논제 I-3

[제시문 3]의 상황을 구체적으로 제한하고 정적분을 활용하여 연속함수 $S(t)$를 추론할 수 있는지를 판단하고자 하였다. 또한 이 연속함수에 대한 근의 존재성을 [논제 I -2]로부터 인지하고 이에 대한 근삿값을 [논제 I -1]을 이용하여 계산할 수 있는지에 대한 계산능력을 판단하고자 하였다.

배경지식쌓기

1. 중간값 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$일 때, $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값을 k라 하면, $f(c)=k$인 c가 열린구간 $(a,\ b)$ 안에 적어도 하나 존재한다.



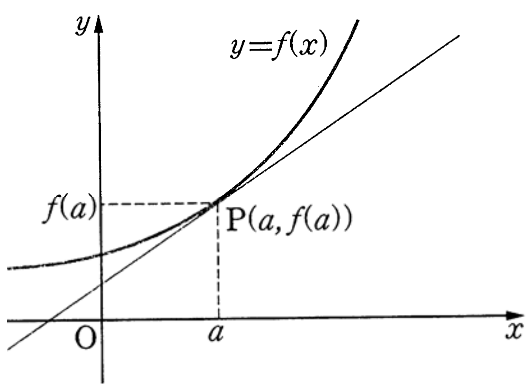
2. 중간값 정리의 응용

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(a)f(b)<0$이면, 방정식 $f(x)=0$은 a와 b 사이에 적어도 하나의 실근이 존재한다.

3. 미분을 이용한 접선의 방정식

① 접선의 기울기: $f'(a)$

② 접선의 방정식: $y-b=f'(a)(x-a)$



풀어보기

문제 1

이차함수 $f(x)$ 에 대하여 $(x+1)f(x)=0$ 이 세 개의 열린구간 $(-2,\ 0)$, $(0,\ 2)$, $(2,\ 4)$ 에서 각각 한 개의 실근을 가질 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (2013년 EBS 수능특강 수학Ⅱ)

[보 기]

ㄱ. $f(-2)g(2)<0$　　ㄴ. $f(0)f(4)>0$　　ㄷ. $f(0)f(2)f(4)<0$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제 2

곡선 $y=e^x$ 위의 점 $(1,\ e)$ 에서의 접선이 곡선 $y=2\sqrt{x-k}$ 에 접할 때, 실수 k 의 값은? (단, e 는 자연로그의 밑이다.) (2010학년도 수능)

① $\frac{1}{e}$　② $\frac{1}{e^2}$　③ $\frac{1}{e^4}$　④ $\frac{1}{1+e}$　⑤ $\frac{1}{1+e^2}$

문제 3

닫힌구간 $[0,\ 2]$ 에서 정의된 연속함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(0)=-1$, $f(1)=1$, $f(2)=-1$ 일 때, 열린구간 $(0,\ 2)$ 에서 방정식 $2f(x)+1=0$ 의 실근의 개수의 최솟값은? (2013년 EBS 수능완성 수학Ⅱ)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

읽기자료

뉴튼의 방법(Newton's Method)*

방정식 $f(x)=0$ 의 해를 근사적으로 구하는 방법의 하나.

미지의 해의 하나를 α 라 하고 x_0 는 α 에 가깝고 그보다 큰 값으로 한다.

또 α 와 x_0 를 포함하는 어떤 구간에서 $f'(x_0)>0$, $f^{(n)}(x)>0$ 이라 한다. 이때

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

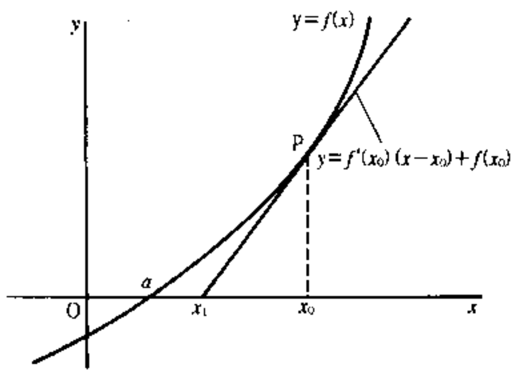
라 놓으면 x_1 은 $\mathrm{P}(x_0, f(x_0))$에서의 접선이 x 축과 교차하는 점이 되어 x_0 보다 α 에 가까운 값이 된다.

이것을 되풀이하여 $x_2, x_3, \cdots$을 차례로 구하면 $x_0 > x_1 > x_2 > \cdots > a$가 되어 차츰 해 α 에 근접하는 수열을 얻을 수 있다. 이를 뉴튼의 방법이라고 한다.

$f'(x_0)>0$, $f^{(n)}(x)>0$ 대신 $f'(x_0)<0$, $f^{(n)}(x)<0$ 이라도 마찬가지이다.

$f'(x_0)>0$, $f^{(n)}(x)<0$ 이나 $f'(x_0)<0$, $f^{(n)}(x)>0$ 일 때는 x_0 를 α 보다 작게 잡으면 된다.

뉴튼의 방법



---

* 한국과학창의재단, 사이언스올
http://www.scienceall.com/dictionary/dictionary.sca?todo=scienceTermsView&classid=&articleid=249128&bbsid=619&popissue=

예시답안

풀어보기

문제 1

$(x+1)f(x)=0$ 에서 $g(x)=(x+1)f(x)$ 라 하면 함수 $g(x)$ 는 삼차함수이므로 모든 실수에서 연속이다.
방정식 $g(x)=0$ 이 세 개의 열린구간 $(-2,\ 0)$, $(0,\ 2)$, $(2,\ 4)$ 에서 각각 한 개의 실근을 가지므로 중간값의 정리에 의하여

$$g(-2)g(0)=-f(-2)f(0)<0$$
$$\therefore\ f(-2)f(0)>0 \cdots\cdots ㉠$$
$$g(0)g(2)=f(0)3f(2)<0$$
$$\therefore\ f(0)f(2)<0 \cdots\cdots ㉡$$
$$g(2)g(4)=3f(2)5f(4)<0$$
$$\therefore\ f(2)f(4)<0 \cdots\cdots ㉢$$

ㄱ. ㉠, ㉡에서 변끼리 곱하면 $f(-2)\{f(0)\}^2 f(2)<0$

$$\therefore\ f(-2)f(2)<0\ (\text{참})$$

ㄴ. ㉡, ㉢에서 변끼리 곱하면 $f(0)\{f(2)\}^2 f(4)>0$

$$\therefore\ f(0)f(4)>0\ (\text{참})$$

ㄷ. 위의 ㉠, ㉡, ㉢을 만족시키는 경우는 다음의 두 가지이다.
(ⅰ) $f(-2)<0,\ f(0)<0,\ f(2)>0,\ f(4)<0$
(ⅱ) $f(-2)>0,\ f(0)>0,\ f(2)<0,\ f(4)>0$
(ⅰ)의 경우는 $f(0)f(2)f(4)>0$
(ⅱ)의 경우는 $f(0)f(2)f(4)<0$
이므로 항상 $f(0)f(2)f(4)<0$ 이라 할 수 없다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

문제 2

$f(x)=e^x$ 으로 놓으면 $f'(x)=e^x$ 이므로 $x=1$ 인 점에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=e$
따라서 점 $(1,\ e)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y-e=e(x-1) \qquad \therefore y=ex$$

이 접선이 곡선 $y=2\sqrt{x-k}$ 와 접하므로 $ex=2\sqrt{x-k}$ 에서

$$e^2x^2=4(x-k)$$
$$e^2x^2-4x+4k=0 \cdots\cdots ㉠$$

따라서 이차방정식 ㉠이 중근을 가진다. 이차방정식 ㉠의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-e^2\cdot 4k=0,\ \ 4e^2k=4 \quad \therefore k=\frac{1}{e^2}$$

문제 3

$g(x)=2f(x)+1$ 이라 하면 $g(x)$는 연속함수이고

$$g(0)=2f(0)+1=-2+1=-1,\ g(1)=2f(1)+1=2+1+3$$
$$g(2)=2f(2)+1=-2+1=-1$$

이므로 중간값의 정리에 의하여

$g(c_1)=0$인 실수 c_1이 열린구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 한 개 존재하고, $g(c_2)=0$인 실수 c_2가 열린구간 $(1,\ 2)$에서 적어도 한 개 존재한다.

그러므로 방정식 $g(x)=0$, 즉 $2f(x)+1=0$은 열린구간 $(0,\ 2)$에서 적어도 2개의 실근을 갖는다.

따라서 구하는 실근의 개수의 최솟값은 2이다.

논제 Ⅰ-1*

기울기가 $f'(x_0)$ 이고 점 $(x_0,\ f(x_0))$ 을 지나므로 접선의 방정식은

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

따라서, 이 접선의 x 절편 x_1 은 $x_1=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ 이다.

논제 Ⅰ-2

[제시문 3]에서 $S(t)$ 는 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 연속이다. 이제 $S(t)=0$ 을 만족하는 근이 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에 적어도 하나 존재하기 위해서는 $S(-1)S(1)<0$ 임을 보이면 된다.

$a(-1)=0$ 이고, $S(t)=a(t)-a_0$ 이므로 $S(-1)=a(-1)-a_0=-a_0<0$ 이다.

$S(1)=a(1)-a_0$ 이고, 이는 B 와 A 의 단면적의 차이이므로 $S(1)>0$ 이다.

따라서 [제시문 1]에 의하여 $S(t)=0$ 은 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 적어도 하나의 근을 가진다.

논제 Ⅰ-3

[제시문 3]으로부터 $S(t)=\displaystyle\int_{-1}^{t}(1-x^2)dx-1=t-\frac{t^3}{3}-\frac{1}{3}$이다. 또한 $S'(t)=1-t^2$이다. 따라서 [논제 Ⅰ-1]로부터 $t_k=t_{k-1}-\dfrac{S(t_{k-1})}{S'(t_{k-1})}=\dfrac{1-2t_{k-1}^3}{3(1-t_{k-1}^2)}$임을 알 수 있고, 위의 공식으로부터

제1차 근삿값은 $t_1=t_0-\dfrac{S(t_0)}{S'(t_0)}=\dfrac{1}{3}$이다.

t_1의 값으로부터 제2차 근삿값은 $t_2=t_1-\dfrac{S(t_1)}{S'(t_1)}=\dfrac{25}{72}$이다.

---

* 경북대 예시답안 참조

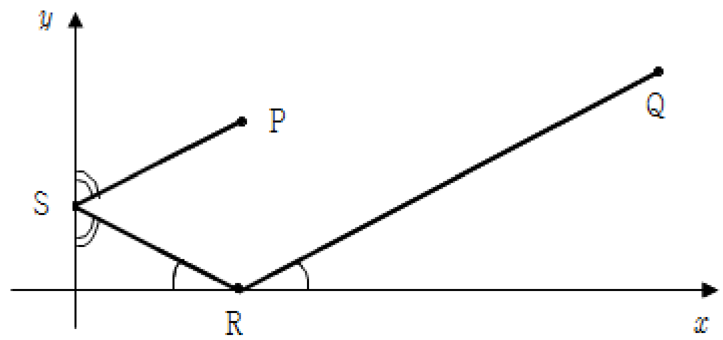
2

경북대학교 수시 AAT 자연계열 문제2

제시문 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.*

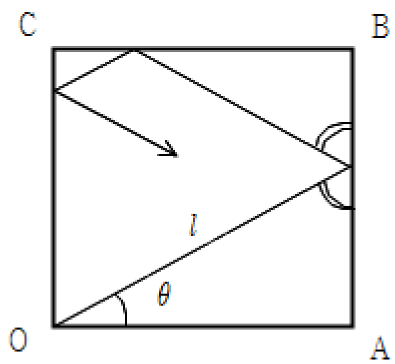
【제시문 1】

제1사분면에 두 점 P와 Q가 있다. x축과 y축을 적어도 한 번 이상 만나며 P와 Q를 연결하는 가장 짧은 경로는 아래 그림과 같은 세 선분으로 구성된다. P의 y축 대칭점을 P$'$, P$'$의 x축 대칭점을 P$''$라고 할 때, P와 Q를 잇는 가장 짧은 경로의 길이는 선분 P$''$Q의 길이와 같다.



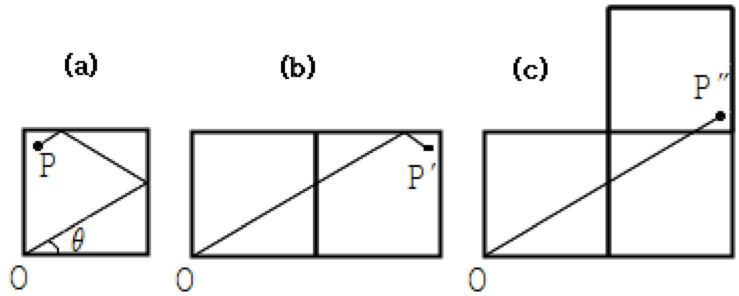
【제시문 2】

한 변의 길이가 1인 정사각형이 있다. 꼭짓점 O에서 사각형의 내부 방향으로 반직선 l을 그었다. l은 정사각형의 변과 만나면 레이저 광선처럼 입사각과 반사각의 크기가 같도록 반사하며 계속 진행한다. 이 과정을 반복하여 l을 계속 진행하게 함으로써 정사각형 속에 놓인 꺾은선 도형을 얻을 수 있다. 이때, l이 정사각형의 한 꼭짓점에 도달하면 더 이상 진행하지 않고 정지한다.



* 경북대학교 입학처

꺾은선 위의 점 P에 대하여, O에서 P까지 이르는 꺾은선의 길이는 대칭이동을 이용하여 구할 수 있다. 출발점 O에서 l을 따라 진행하다 정사각형의 변을 만나면 그 변을 대칭축으로 정사각형(지나온 부분을 제외한 꺾은선 포함)을 대칭 이동한다.(아래 그림 (a)⇒(b)) 대칭이동한 정사각형에서 꺾은선을 따라 계속 진행하다 다시 변을 만나면 그 변에 대한 사각형의 대칭이동을 같은 방법으로 반복한다.(아래 그림 (b)⇒(c)) 이러한 과정을 반복하여 정사각형 속의 꺾은선을 평면위의 선분으로 바꾼다. 처음 꺾은선의 길이는 선분의 길이와 같다. (아래 그림(c)의 선분OP″)



논제 I-1

【제시문 1】에서 점 R과 점 S는 P와 Q를 연결하는 꺾은선의 길이가 가장 짧을 때의 x축과 y축 위의 점이다. 점 P와 점 Q의 좌표가 각각 (1, 3), (2, 6)일 때, 직선 RQ의 기울기를 구하고 풀이 과정을 설명하시오. (30점)

논제 I-2

【제시문 2】에서 반직선 l의 출발 기울기($\tan\theta$)가 $\dfrac{2}{3}$일 때 얻어진 꺾은선 도형의 길이를【제시문 2】에 근거하여 구하고 풀이 과정을 설명하시오. (30점)

논제 I-3

【제시문 2】의 정사각형의 꼭짓점 O, A, B, C의 좌표가 각각 $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$이라고 하자. 반직선 l의 출발 기울기가 $\dfrac{q}{p}$ (p, q는 서로 소인 자연수)일 때 얻어진 꺾은선 도형의 길이를 구하는 방법을 설명하시오. (40점)

논술유형분석

문항 수	수학 1문항, 과학 1문항	시간	100분
연관 개념	평면좌표, 도형의 방정식, 도형의 대칭이동		

제시문분석

제시문[1]

대칭을 이용한 최단거리 구하는 방법을 소개하고 있다.

제시문[2]

정사각형 내의 직선의 진행에 대해 대칭이동을 사용한 정사각형의 확장으로 꺾은선의 길이는 선분의 길이와 같음을 소개하고 있다.

논제분석

논제 I-1

한 번 꺾은선의 길이를 구하는 방법을 두 번 꺾은선의 길이 구하는데 사용할 수 있음을 묻고 있는 쉬운 문제이다. 그러나 점의 선대칭 등 기초적인 기하학적 개념을 요구하고 있다.

논제 I-2

기울기가 $\frac{2}{3}$ 로 출발한 정사각형 속의 꺾은선의 길이를 직접 하나하나 펼쳐 그 길이를 구하는 경험을 하도록 유도하고 있다. 그 과정을 통하여 기울기가 펼쳤을 때의 끝점의 좌표와 밀접한 관계가 있음을 은연 중 암시하고 있다. 이를 해결하기 위하여 【제시문 2】를 정확히 읽고 이해하여야 하며, 선대칭을 익숙하게 다룰 수 있어야 한다.

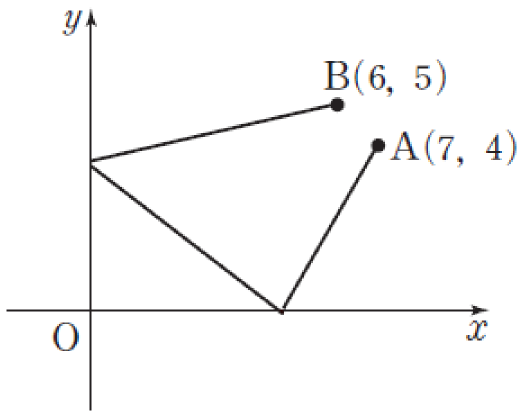
논제 I-3

【논제Ⅰ-2】에 암시된 내용을 구체화 하는 과정을 묻고 있다. 기울기를 유리수로 일반화 했을 때, 예상되는 결과를 예측할 수 있어야 하고 그 사실을 확인할 것을 요구 하고 있다. 꺾은선 도형의 모양과 직선의 기울기, 직선의 기울기와 선분의 길이와의 관계에 대한 통합적으로 사고 능력을 묻고 있다.

풀어보기

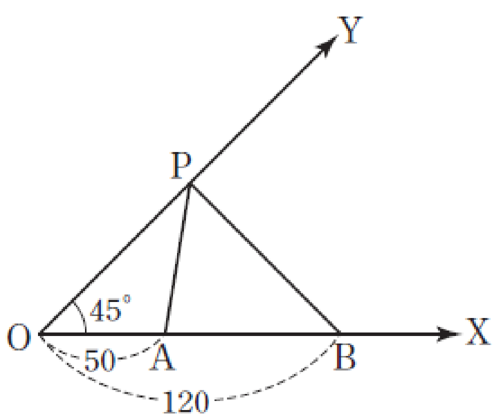
문제 1

다음 그림과 같이 좌표평면 위의 점 A(7, 4) 에서 x 축 위의 한 점과 y 축 위의 한 점을 지나 점 B(6, 5) 에 이르는 최단거리를 구하여라.



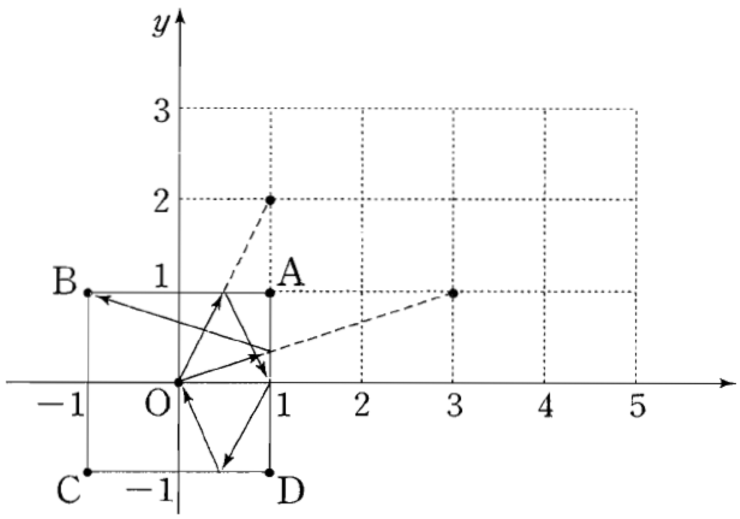
문제 2

$\angle XOY = 45°$ 인 반직선 OX 위에 $\overline{OA}=50$, $\overline{OB}=120$ 인 두 점 A, B가 있다. 반직선 OY 위의 임의의 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PB}$ 의 최솟값을 구하시오.



문제 3

아래 그림과 같이 네 점 $A(1,\ 1)$, $B(-1,\ 1)$, $C(-1,\ -1)$, $D(1,\ -1)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형이 있다. 원점 O를 출발하여 점 $(m,\ n)$ (m, n은 자연수)으로 향하는 광선이 정사각형 ABCD의 변과 만나면 반사되고, 원점 또는 네 꼭짓점과 만나면 흡수된다고 한다. (단, 입사각과 반사각의 크기는 같다.) 예를 들면, 원점 O를 출발하여 점 $(1,\ 2)$를 향하는 광선은 세 번 반사된 후 점 O에 흡수되고, 점 $(3,\ 1)$을 향하는 광선은 한 번 반사된 후 점 B에서 흡수된다. 이 때, 원점 O를 출발하여 점 $(5,\ 3)$을 향하는 광선은 어떤 점에서 흡수되는가? (2003년 학력평가)



읽기자료

이차곡선과 빛의 반사*

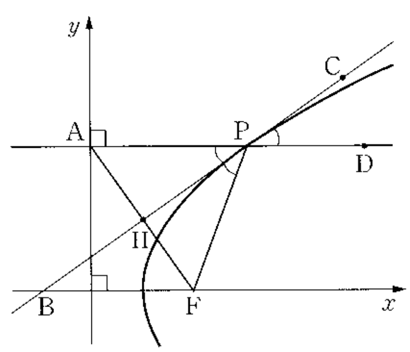
1. 포물선에서 빛의 반사

포물선에 평행하게 입사한 빛은 초점을 지나고, 또 초점에서 나간 빛은 축에 평행하게 반사된다는 것을 증명해 보자. 이 증명에서는 빛은 입사각과 반사각이 같게 반사된다는 사실을 이용한다.

(증명) x, y축 위에 각각 초점 F와 점 A를 잡는다. 선분 AF의 수직이등분선과 점 A를 지나고 y축에 수직인 직선의 교점을 P라고 하자.

점 A가 y축 위를 움직일 때 $\overline{PA} = \overline{PF}$이므로 점 P의 자취는 포물선이다.

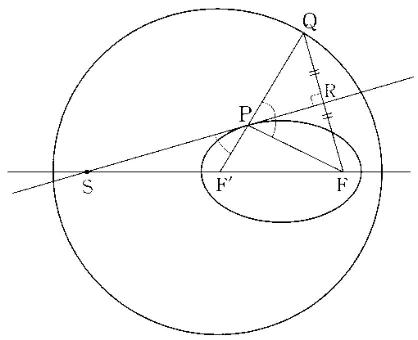
이 때, y축은 준선, 점 F는 초점이다.



그림에서 직선 AP 위에 점 D를 잡으면 $\angle CPD = \angle APH$ ($\because$맞꼭지각)
그런데 $\angle FPH = \angle APH$ 이므로 $\angle CPD = \angle FPH$ 가 성립한다.
따라서 점 D를 지나 축에 평행하게 들어온 빛은 점 P에서 포물선에 부딪혀 꺽인 후 초점 F를 지나게 되고 거꾸로 초점을 지난 빛은 축에 평행하게 반사된다.

2. 타원에서 빛의 반사

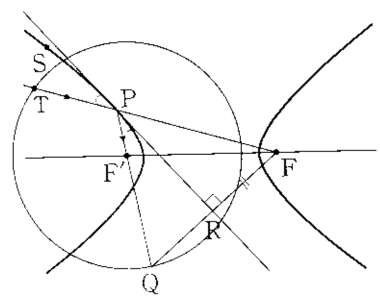
타원의 한 초점에서 나간 빛은 다른 초점으로 반사된다는 사실을 증명해 보자.



(증명) 원 F' 위의 점 Q, 원 내부의 임의의 점 F에 대하여
$\overline{FQ}$ 의 수직이등분선을 m 이라 하면
$\overline{PF'} + \overline{PF} = \overline{PF'} + \overline{PQ} = \overline{F'Q}$ =(원의 반지름)
이므로, 그림에서 점 Q가 원 위를 움직일 때
점 P의 자취는 타원이다.
$\angle F'PS = \angle QPR$(맞꼭지각), $\angle QPR = \angle FPR$
이므로 $\angle F'PS = \angle FPR$ 이 성립한다.
따라서, 타원의 초점에서 나간 빛은 다른 초점으로 반사된다.

3. 쌍곡선에서 빛의 반사

쌍곡선의 한 초점을 향해 직진하는 빛은 쌍곡선에 부딪히면 다른 초점을 향해 반사된다.
(증명) 그림에서 원 F' 위의 점 Q에 대하여



$\overleftrightarrow{PR}$ 은 $\overline{FQ}$ 의 수직이등분선이라고 하면,
점 Q가 원 F'위를 움직일 때의
점 P의 자취는 쌍곡선이다.
$\angle TPS = \angle FPR$(맞꼭지각)
$\triangle PQR$ 과 $\triangle PFR$ 은 합동이므로
$\therefore \angle FPR = \angle QPR$
$\therefore \angle TPS = \angle F'PR$
쌍곡선의 한 초점을 향해 직진하는 빛은 쌍곡선에 부딪히면 다른 초점을 향해 반사된다.

* 출처:「원뿔에서 태어난 이차곡선」(남호영외 3인, 수학사랑)

예시답안

풀어보기

문제 1

점 A를 x축 대칭하고, 점 B를 y축 대칭한 점을 각각 A′, B′이라고 하자.
그리고, x축 위의 임의의 점을 P, y축 위의 임의의 점을 Q라 하면
$\overline{AP}=\overline{A'P}$, $\overline{BQ}=\overline{B'Q}$ 이므로 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{BQ}=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{B'Q}$
이때, $\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{B'Q}$의 값이 최소일 때는 두 점 P, Q가 $\overline{A'B'}$ 위의 점일 때이므로

$$\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{B'Q}\geq \overline{A'B'}$$

즉, 구하고자 하는 최단거리는 $\overline{A'B'}=\sqrt{(-6-7)^2+(5+4)^2}=5\sqrt{10}$ 이다.

문제 2

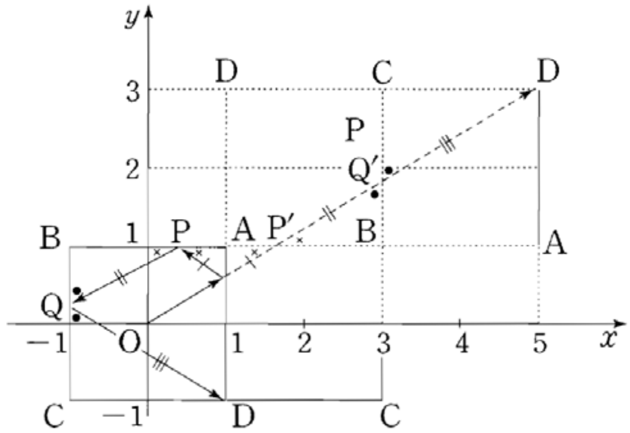
점 O를 원점, 반직선 OX를 x축으로 하는 좌표평면을 생각하자. 점 A를 반직선 OY에 대칭한 점을 A′라고 하면, A(50,0), A′(0,50), B(120,0) 이다.
그러면 다음 식이 성립한다.

$$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{A'P}+\overline{PB}\geq\overline{A'B}$$

따라서 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값은 $\overline{A'B}=\sqrt{120^2+50^2}=130$ 이다.

문제 3

입사각과 반사각의 크기가 같음을 이용하여 대칭이 되는 점들을 찾아보자.
아래 그림과 같이 대칭을 이용하여 살펴보면, 점 (5, 3)을 향한 빛은 정사각형의 변과 세 번 반사하여 점 D에서 흡수된다.



논제 Ⅰ-1*

점 $P(1,3)$ 의 y축 대칭점 P'의 좌표는 $(-1,3)$, 점 $P'(1,3)$ 의 x축 대칭점 P''의 좌표는 $(-1,\ -3)$ 이다.

직선 RQ 의 기울기는 직선 $P''Q$ 의 기울기와 같고 Q 의 좌표가 $(2,6)$ 이므로, 직선 RQ 의 기울기는 $\dfrac{3+6}{1+2}=3$이다.

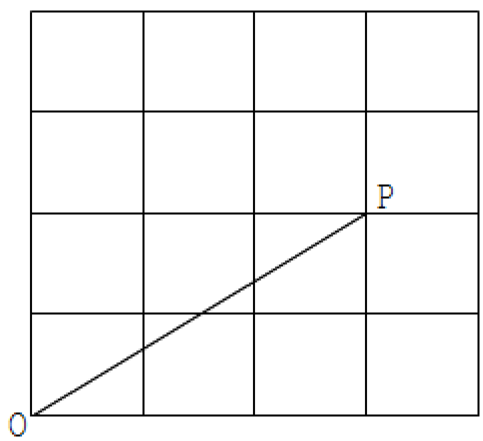
다른 풀이

$P(1,3)$ 을 y 축 대칭한 점은 $P'(-1,3)$, $Q(2,6)$ 을 x 축 대칭이동한 점은 $Q'(2,\ -6)$이다. 따라서 선분 $\overline{P'Q'}$ 을 나타내는 직선의 방정식은 $y=-3x$ 이고 직선과 x 축과의 교점이 R 이므로 $R(0,0)$ 이다. 따라서 직선 RQ 의 기울기는 3이다.

논제 Ⅰ-2

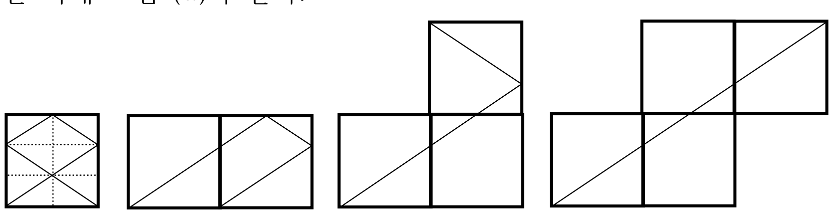
[제시문 2]에 의해 한 변의 길이가 1 인 정사각형을 대칭하여 여러 개 붙인 정사각형을 생각하자. 출발 기울기가 $\dfrac{2}{3}$ 이므로 꺾은선을 대칭시켜 나가면 점 P 에서 만난다.

따라서 꺾은선 도형의 길이는 $\overline{OP}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$ 이다.



다른 풀이

꺾은선의 모양은 아래 그림 (a)와 같다.



(a) (b) (c) (d)

* 경북대 예시답안 참조

반직선이 변에 도달할 때 마다 정사각형(지나온 부분을 제외한 꺾은선 포함)을 변에 대하여 대칭시키면 순차적으로 그림 (b), 그림 (c), 그림 (d)를 얻을 수 있다.
따라서 꺾은선의 길이는 피타고라스정리에 의하여 $\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$ 이다.

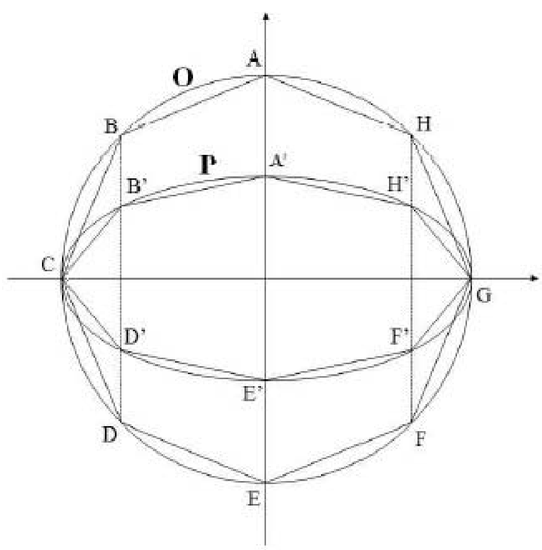
논제 I -3

기울기가 $\frac{q}{p}$ 인 직선은 정수점 $(p,\,q)$ 를 지난다. $p,\,q$ 가 서로 소인 자연수이므로 (p,q) 는 직선이 만나는 최초의 정수점이다. 원점과 점$(p,\,q)$ 를 잇는 선분을 【제시문 2】를 이용하여 꺾은선으로 바꾸면 l 의 출발 기울기가 $\frac{q}{p}$ 일 때의 꺾은선이다. 따라서 꺾은선의 길이는 원점에서 $(p,\,q)$ 까지의 거리인 $\sqrt{p^2+q^2}$ 이다.

3 경희대학교 모의

제시문 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.*

[가] 아르키메데스(약 기원전 287년 ~ 기원전 212년)는 고대 그리스 시칠리아 섬의 시라쿠사 출신의 철학자, 수학자, 천문학자, 물리학자, 공학자이다. 아르키메데스 나선양수기, 해상에 있는 배를 공격하기 위한 거울 등의 기계를 제작하기도 하였다. 또한, 아르키메데스는 고전 고대 시기의 가장 뛰어난 수학자 가운데 한 명으로 서거법의 도입, 포물선으로 둘러싸인 도형의 넓이 계산, 원주율의 계산과 같은 업적들이 있다. 타원은 평면 위의 서로 다른 두 정점에서의 거리의 합이 일정한 점들의 집합을 말하며, 두 정점을 타원의 초점이라고 한다. 아르키메데스는 아래와 같은 방법으로 타원의 넓이를 계산하는 방법을 생각하였다. 아래 그림에서 P는 장축의 길이가 $2a$이고 단축의 길이가 $2b$인 타원이고, O는 이 타원의 장축을 지름으로 하는 원이다. 원 O에 내접하는 정 $2n$각형을 그리고, 정 $2n$각형의 각 꼭짓점에서 장축에 내린 수직선과 타원이 만나는 점들을 연결하여 $2n$각형을 그린다. 이때, n이 증가할수록 각 다각형의 넓이는 원과 타원의 넓이에 수렴하게 된다.



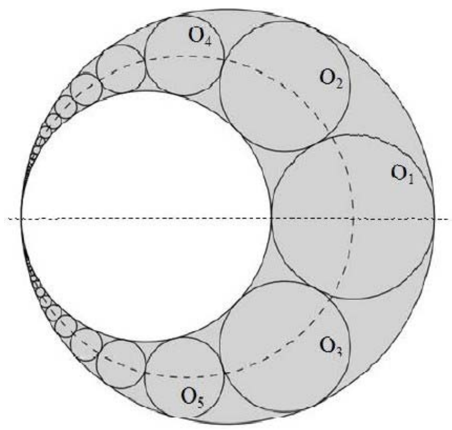
원 O의 방정식 : $x^2+y^2=a^2$

타원 P의 방정식 : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

---

* 경희대학교 입학처

[나] 파푸스(약 기원후 290년~기원후 350년)는 고대 그리스의 수학자이다. 파푸스는 그리스 기하학의 기존 정리와 증명에 주석을 붙이고, 개선한 기하학 연구 총서와 같은 <수학집성(Collection)>을 저술하였다. 파푸스가 남긴 기하학 연구 주제 중에 아래 그림과 같은 파푸스 체인이라는 것이 있다. 먼저 큰 원 안에 작은 원이 내접하고 있다. 그러면 두 원의 중심을 연결하는 직선 위에 중심이 있으면서 두 원에 동시에 접하는 원을 한 개 (O_1) 그릴 수 있다. 그 다음에 이 세 원에 동시에 접하는 원을 두 개 (O_2, O_3) 그릴 수 있다. 이와 같은 과정을 반복하면 아래 그림과 같이 원들($O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, \cdots$)이 서로 접하고 있는 체인 형태를 얻게 된다. 이것을 파푸스 체인이라고 부른다. 파푸스 체인은 여러 가지 재미있는 성질을 가지고 있다. 한 예로, 파푸스 체인의 모든 원들의 중심은 어떤 한 타원 위에 있다.



논제 I-1

제시문 [가]를 참조하여 다음 질문에 답하시오.

장축의 길이가 $2a$, 단축의 길이가 $2b$인 타원의 넓이를 구하는 공식을 구하려고 한다. 제시문 [가]에 주어진 아르키메데스의 방법을 이용하여 타원의 넓이 공식을 유도하고 유도과정을 설명하시오.

논제 I-2

제시문 [나]를 참조하여 다음 질문에 답하시오.

파푸스 체인의 각 원들의 중심이 지나는 타원의 두 초점과 장축, 단축의 길이를 설명하시오.

논제 I-3

제시문 [가]와 [나]를 참조하여 다음 질문에 답하시오.

파푸스 체인을 만들기 위하여 주어진 처음 두 원의 반지름이 각각 $12, 8$일 때, 파푸스 체인의 각 원의 중심들이 지나는 타원의 넓이를 구하고, 그 근거를 논술하시오.

논술유형분석

문항 수	수학 1문항, 과학1-2문항(총 2-3문항)	시간	120분
연관 개념	이차곡선, 다각형의 넓이		

제시문분석

제시문[가]

타원의 면적을 원과 타원에 각각 내접하는 다각형의 닮음을 이용하여 설명하고 있다.

제시문[나]

한 원에 외접하는 동시에 다른 한 원에 내접하는 원들의 중심을 이어 만든 도형이 타원이 됨을 설명하고 있다.

논술유형분석

논제 I-1

제시문 [가]에 의해 만들어진 다각형들의 한 변을 기준삼아 넓이의 비를 구할 수 있는지를 묻고 있다.

논제 I-2

제시문 [나]에 의해 만들어진 타원의 장축과 단축을 각 원들의 중심까지의 거리들을 이용하여 구할 수 있는지를 묻고 있다.

논제 I-3

[논제 Ⅰ-2]에서 구한 파푸스 체인에 의해 만들어진 타원들의 장축과 단축을 이용하여 타원의 넓이를 구할 수 있는지를 묻고 있다.

배경지식쌓기

1. 이차곡선의 정의와 자취

가. 포물선

1) 정의 및 성질

- 정의 : 평면 위의 한 정점 F 와 이 점을 지나지 않는 한 정직선 l 에 이르는 거리가 같은 점들의 집합
- 초점이 $\mathrm{F}(p, 0)$, 준선이 $x=-p$ 인 포물선의 방정식은 $y^2=4px$ (단, $p\neq 0$)
- 초점이 $\mathrm{F}(0, p)$, 준선이 $y=-p$ 인 포물선의 방정식은 $x^2=4py$ (단, $p\neq 0$)
- 기울기가 m 인 접선의 방정식
  ① $y^2=4px$ 에 접하는 경우: $y=mx+\dfrac{p}{m}(m\neq 0)$
  ② $x^2=4py$ 에 접하는 경우: $y=mx-m^2p$
- 접점이 (x_1, y_1) 인 접선의 방정식
  ① $y^2=4px$ 에 접하는 경우: $y_1y=2p(x+x_1)$
  ② $x^2=4py$ 에 접하는 경우: $x_1x=2p(y+y_1)$

2) 자취

가) 반지름의 차가 일정한 동심원과 이에 접하는 평행선의 교점의 자취
나) 직선 l 에 접하고 이 직선 위에 있지 않은 한 점 A 를 지나는 원의 중심 P 의 자취
다) 직선 l 과 만나지 않는 한 원 D 에 동시에 접하는 원 C 의 중심 P 의 자취
라) 직선 l 과 이 직선 위에 있지 않는 한 점 A 와, 직선 l 위의 임의의 한 점 B 에서 그은 수선과 선분 AB 의 수직이등분선의 교점 P 의 자취

나. 타원

1) 정의 및 성질

- 정의 : 평면 위의 두 정점 F, F′ 으로부터의 거리의 합이 일정한 점들의 집합
- 초점 $\mathrm{F}(c, 0), \mathrm{F}'(-c, 0)$ 으로부터의 거리의 합이 $2a$ 인 타원의 방정식은
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ (단, } a>b>0,\ c^2=a^2-b^2\text{)}$$
  꼭짓점:$(\pm a, 0), (0, \pm b)$, 중심$(0, 0)$, 장축의 길이: $2a$, 단축의 길이:$2b$
- 초점 $\mathrm{F}(0, \mathrm{c}), \mathrm{F}'(0, -c)$ 으로부터의 거리의 합이 $2b$ 인 타원의 방정식은
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ (단, } b>a>0,\ c^2=b^2-a^2\text{)}$$
  꼭짓점:$(\pm a, 0), (0, \pm b)$, 중심$(0, 0)$, 장축의 길이: $2b$, 단축의 길이: $2a$
- 접선의 방정식
  ① 기울기가 m 인 경우: $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$
  ② 접점의 좌표가 (x_1, x_2) 인 경우: $\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

2) 자취

가) 수직인 벽면에 걸쳐진 사다리가 미끄러질 때, 사다리 위의 중점이 아닌 점 P 의 자취

나) 중심이 O 인 원 위에 임의의 한 점 A 와 원 내부의 한 점 B 를 잡을 때, 선분 AB 의 수직이등분선이 반지름 OA 와 만나는 교점 P 의 자취

다) 원 O 의 내부에 다른 원 O′ 에 대하여 원 O 에 내접하고 동시에 원 O′ 에 외접하는 원의 중심 P 의 자취 (단, 두 원 O, O′ 은 동심원이 아니다.)

다. 쌍곡선

1) 정의 및 성질

- 정의: 평면 위의 두 정점 F, F′으로부터의 거리의 차가 일정한 점들의 집합
- 초점 $\mathrm{F}(c, 0), \mathrm{F}'(-c, 0)$ 으로부터의 거리의 차가 $2a$ 인 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \ (\text{단, } c>a>0,\ b^2=c^2-a^2)$$

  꼭짓점:$(\pm a, 0)$, 중심$(0, 0)$, 주축의 길이: $2a$
- 초점 $\mathrm{F}(0, \mathrm{c}), \mathrm{F}'(0, -c)$ 으로부터의 거리의 차가 $2b$ 인 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \ (\text{단, } c>b>0,\ a^2=c^2-b^2)$$

  꼭짓점:$(0, \pm b)$, 중심$(0, 0)$, 주축의 길이: $2b$
- 기울기가 m 인 접선의 방정식

  ① $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 에 접하는 경우: $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ (단, $a^2m^2-b^2>0$)

  ② $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ 에 접하는 경우: $y=mx\pm\sqrt{b^2-a^2m^2}$ (단, $b^2-a^2m^2>0$)
- $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm1$ 의 접점의 좌표가 (x_1, x_2) 인 접선의 방정식

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=\pm1 \ (\text{복호동순})$$

2) 자취

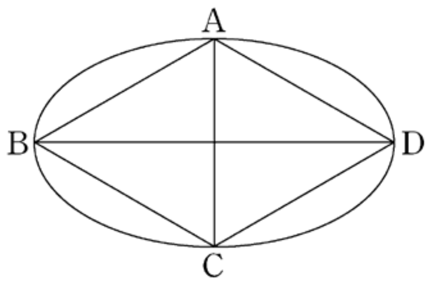
가) 두 원의 중심으로부터 같은 속도로 반지름이 증가할 때, 나타나는 두 원의 교점 P 의 자취

나) 중심이 O 인 원 위에 임의의 한 점 A 와 원 외부의 한 점 B 를 잡을 때, 선분 AB 의 수직이등분선이 반지름 OA 와 만나는 교점 P 의 자취

풀어보기

문제 1

한 변의 길이가 10인 마름모 ABCD에 대하여 대각선 BD를 장축으로 하고, 대각선 AC를 단축으로 하는 타원의 두 초점 사이의 거리가 $10\sqrt{2}$ 이다. 마름모 ABCD의 넓이는? (2011년 대수능)



① $55\sqrt{3}$　　② $65\sqrt{2}$　　③ $50\sqrt{3}$　　④ $45\sqrt{3}$　　⑤ $45\sqrt{2}$

문제 2

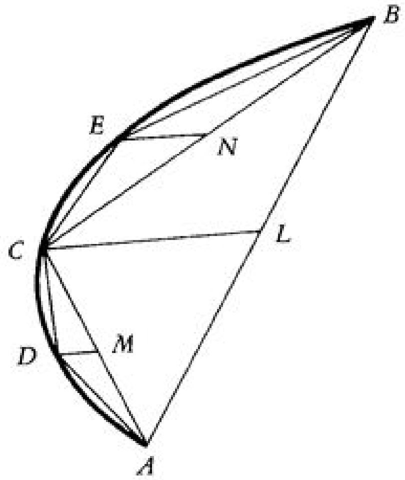
원 $(x-6)^2+(y-5)^2=36$ 과 x 축의 두 교점을 초점으로 하고, 원의 중심을 지나는 타원의 장축의 길이를 구하시오. (2012년 7월 전국연합)

읽기자료

아르키메데스 - 유한으로 무한을 생각하기(적분법의 시작)*

1. 아르키메데스의 포물선에 대한 착출법

아르키메데스는 고대인 중에서 실진법을 가장 잘 응용하고 나아가 오늘날의 적분에 가장 근접한 착출법을 연구한 사람이다. 그의 최초의 예 중의 하나로 포물선 분절 구적법을 다음 그림에서 생각해 보자.



그림에서 점 $\mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{E}$ 는 선분 $\mathrm{AB}, \mathrm{CA}, \mathrm{CB}$ 의 중점을 지나고, 포물선의 축에 평행한 선분 $\mathrm{LC}, \mathrm{MD}, \mathrm{NE}$ 를 그어 얻는 포물선의 호 위의 점이다. 포물선의 기하학적 성질로부터 아르키메데스는 다음 식이 성립함을 밝혔다.

$$\triangle\mathrm{CDA} + \triangle\mathrm{CEB} = \frac{\triangle\mathrm{ABC}}{4}$$

이 발상을 반복하여 적용하면 포물선의 부분 면적은

$$\begin{aligned}
\triangle\mathrm{ABC} + \frac{\triangle\mathrm{ABC}}{4} + \frac{\triangle\mathrm{ABC}}{4^2} + \frac{\triangle\mathrm{ABC}}{4^3} + \cdots \\
= \triangle\mathrm{ABC}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots\right) \\
= \frac{4}{3}\triangle\mathrm{ABC}
\end{aligned}$$

2. 아르키메데스 이야기

'포물선이나 타원 면적 구하기는 소젓 짜기를 닮았다?' 아르키메데스의 수학적 업적 중에 가장 중요한 것은 포물선이나 타원형에 관한 연구이다. 특히 '무한 소진법(消盡法)'이라

고 불리는 면적 구하기는 후세에 큰 영향을 미쳤다. 지금은 타원이나 곡선의 함수식만 구하면 적분법을 이용해 쉽게 면적을 구할 수 있다. 하지만 아르키메데스는 무한히 많은 도형을 그림으로써 면적을 구했다. 포물선의 경우 포물선과 직선으로 둘러싸인 부분에 삼각형과 사다리꼴의 수를 계속 늘려 가면 곡선으로 둘러싸인 면적에 근접하게 된다.
삼각형과 사다리꼴로 나타낼 수 있다면 쉽게 면적을 구할 수 있는 원리를 이용한 것이다. 사다리꼴의 수를 늘려가며 포물선 내의 면적을 구해 나가는 모습이 마치 소의 젖을 짜내는 것과 닮았다 해서 '착출법(搾出法)'이라는 이름도 붙었다. 이같은 방법은 아르키메데스보다 앞서 기원전 4세기에 살았던 수학자로 플라톤의 제자이자 친구였던 에우독소스가 고안하고 아르키메데스가 완성한 것으로 알려져 있다고 이만근 교수는 설명했다. 에우독소스나 아르키메데스 시대에는 무수히 많은 도형을 그려 나간다는 생각은 했지만 '극한'이나 '무한'이라는 개념은 없었다. 오히려 '무한'은 '무질서'라고 생각해 기피하기도 했다고 한다. 하지만 아르키메데스가 '무수히 많은 도형을 그려 면적을 구한 것'은 18세기 아이작 뉴턴과 라이프니츠 시대에 개발된 적분 개념의 원형이 된다. 아르키메데스를 미적분의 선구자라고 부르는 것은 그 때문이다. 적분이란 무한히 쪼갠 조각을 쌓는 것이다.

아르키메데스가 수학사에 남긴 가장 큰 업적 중 하나는 지금도 그대로 쓰고 있는 '원주율 3.14 ($\pi=3.14$)'이다. 아르키메데스는 원의 둘레의 길이는 원에 내접하는 정다각형보다는 크고 외접하는 정다각형보다는 작다는 원리에 착안했다. 그는 내·외접하는 정 96 각형을 각각 그려 원의 둘레의 길이를 계산했다. '원의 둘레 길이=$2\times\pi$ (원주율)×r (반지름)'이다. 따라서 지름($2r$)을 1 이라고 하면 원의 둘레 길이가 바로 π 에 해당한다. 아르키메데스는 이를 활용해 원주율 π는 $\dfrac{223}{71}$(내접 다각형의 둘레의 길이)과 $\dfrac{22}{7}$(외접 다각형의 둘레의 길이) 사이의 수라고 계산했다. 다만 $\dfrac{223}{71}<\dfrac{22}{7}$라는 수가 어떻게 나왔는지에 대해서는 구체적인 설명을 남겨놓지 않았다. 이를 소수로 변환해 보면

$$3.14084507<\pi<3.14285714$$

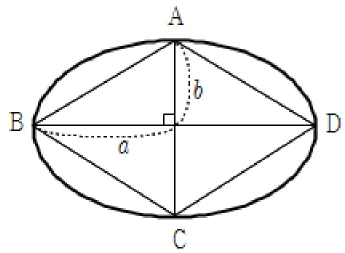
이다. 현재 사용하는 원주율 3.14159265 도 이 범주에 들어간다.

* 수학의 고향을 찾아서 - 아르키메데스

예시답안

풀어보기

문제 1



마름모 ABCD 에 대하여 대각선 BD 의 길이를 $2a$, 대각선 AC 의 길이를 $2b$ 라 하면 마름모의 한 변의 길이가 10 이므로

$$a^2+b^2=10^2 \cdots\cdots ㉠$$

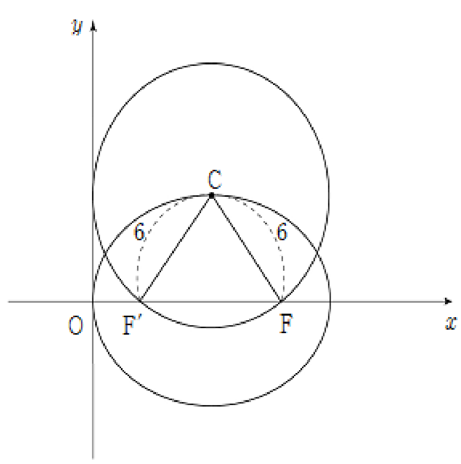
이 성립한다. 또한 타원의 중심을 $(0,\ 0)$ 이라 하면 타원의 두 초점 사이의 거리가 $10\sqrt{2}$ 이므로 두 초점의 좌표는 $(-5\sqrt{2},\ 0)$, $(5\sqrt{2},\ 0)$ 이고

$$a^2-b^2=(5\sqrt{2})^2 \cdots\cdots ㉡$$

이다. ㉠+㉡을 하면 $2a^2=150$, $a^2=75$, $\therefore a=5\sqrt{3}$ 이고 $a=5\sqrt{3}$ 을 ㉠에 대입하면 $b^2=25$ $\therefore$ $b=5$ 이다. 따라서 마름모 ABCD 의 넓이는

$$4\times\frac{1}{2}\times a\times b=4\times\frac{1}{2}\times5\sqrt{3}\times5=50\sqrt{3}$$

문제 2



원 $(x-6)^2+(y-5)^2=36$ 의 중심을 C , 타원의 초점을 각각 F, F′ 이라 하면 장축의 길이는 $\overline{\mathrm{F'C}}+\overline{\mathrm{CF}}=12$ 이다.

논제 Ⅰ-1*

n 이 증가할수록 각 다각형의 넓이가 원과 타원의 넓이에 수렴하므로 원과 타원의 넓이비는 원에 내접하는 정 $2n$각형의 넓이와 타원에 내접하는 $2n$ 각형의 넓이비와 같다. 각각의 $2n$ 각형은 제시문 [가]의 그림처럼 2 개의 삼각형과 $n-2$ 개의 사다리꼴로 나눌 수 있다.
이때, 각각의 대응되는 삼각형과 사다리꼴들은 높이가 같다. 따라서 삼각형의 넓이비는 밑변의 길이비와 같다.

$$\triangle\mathrm{GHF} : \triangle\mathrm{GH'F'} = \overline{\mathrm{HF}} : \overline{\mathrm{H'F'}}$$

H 와 H$'$ 의 x 좌표를 h 라고 할 때, y 좌표는 각각 $\sqrt{a^2-h^2}$, $\left|\dfrac{b}{a}\right|\sqrt{a^2-h^2}$ 이다.

따라서 $\triangle\mathrm{GHF} : \triangle\mathrm{GH'F'} = \overline{\mathrm{HF}} : \overline{\mathrm{H'F'}} = a : b$ 이다.
사다리꼴 AHFE 와 사다리꼴 A$'$H$'$F$'$E$'$ 의 경우도 마찬가지로 밑변과 윗변의 길이비가 모두 $a : b$ 이므로 넓이비도 $a : b$ 이다.
그러므로 원에 내접하는 정 $2n$각형의 넓이와 타원에 내접하는 $2n$각형의 넓이비가 $a : b$ 가 되며, 원과 타원의 넓이비도 $a : b$ 이므로, 타원의 넓이는 $\pi a^2 \times \dfrac{b}{a} = \pi ab$ 이다.

논제 Ⅰ-2

큰 원과 작은 원의 반지름을 각각 R 과 r 이라 하고, 파푸스 체인의 원 O_k 의 반지름을 x_k 라고 하자. 원 O_k 는 작은 원과 외접하고, 큰 원에 내접하므로, 작은 원과 원 O_k 의 중심거리는 $r+x_k$ 이고, 큰 원과 원 O_k 의 중심거리는 $R-x_k$ 이다.
이 두 중심거리의 합 $(R-x_k)+(r+x_k)=R+r$ 은 모든 원 O_k 에 대하여 일정하므로, 원 O_k 의 중심에서 작은 원의 중심과 큰 원의 중심에 이르는 거리의 합이 모든 k 에 대하여 같다고 할 수 있다.
따라서 타원의 정의에 의하여 원 O_k 의 중심은 작은 원의 중심과 큰 원의 중심을 초점으로 갖는 타원 위에 있다. 큰 원과 작은 원의 중심거리는 $R-r$ 이므로, 장축의 길이는 $2\left(\dfrac{R+r}{2}\right)=R+r$ 이고, 단축의 길이는 $2\sqrt{\left(\dfrac{R+r}{2}\right)^2-\left(\dfrac{R-r}{2}\right)^2}=2\sqrt{Rr}$ 이다.

논제 Ⅰ-3

$R=12$, $r=8$ 이므로 장축의 길이는 20 이고, 단축의 길이는 $8\sqrt{6}$ 이다. 따라서 타원의 넓이는 $\pi\times10\times4\sqrt{6}=(40\sqrt{6})\pi$ 이다.

---

* 경희대 예시답안 참조

4 경희대학교 수시

제시문 I 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.*

[가]

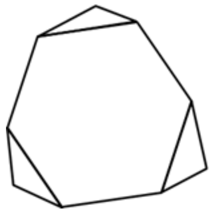
우리는 일상생활에서 그림이나 사진을 확대하거나 축소하는 경우를 자주 볼 수 있다. 한 도형을 확대하거나 축소하여 얻은 도형은 처음 도형과 크기는 다르지만 모양은 같다. 이와 같이 한 도형을 일정한 비율로 확대하거나 축소하여 얻게 된 도형이 다른 도형과 합동일 때, 이들 두 도형은 서로 닮음인 관계가 있다고 하며, 닮음인 관계가 있는 두 도형을 닮은 도형이라고 한다. 서로 닮은 도형에서 대응하는 선분의 길이의 비를 닮음비라고 한다.

[나]

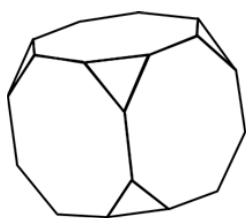
기원전 430 년 경 그리스 델로스 섬에는 전염병이 돌고 있었다. 델로스 사람들은 아폴론 신으로부터 '전염병을 퇴치하려면 신전에 있는 정육면체 모양의 제단과 닮은 도형이면서 부피가 2 배인 제단을 만들라'는 신탁을 받았다. 델로스 사람들은 정육면체 모양의 제단을 2 개 붙여 제단을 만들었는데, 아폴론 신은 부피는 2 배이지만 닮은 도형이 아니라고 했다. 그래서 델로스 사람들은 정육면체 각 모서리의 길이를 2 배로 늘인 정육면체 제단을 만들었다. 그러자 아폴론 신은 이번에는 닮은 도형이지만 부피가 8 배가 되었다며 다시 만들라고 하였다.

[다]

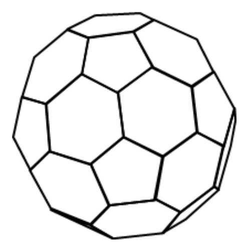
각 면이 모두 합동인 정다각형이고 각 꼭짓점에 모인 면의 수가 같은 볼록한 다면체를 정다면체라고 한다. 정다면체는 정사면체, 정육면체, 정팔면체, 정십이면체, 정이십면체의 5 가지가 있다. 한편, 두 종류 이상의 정다각형인 면으로 둘러싸여 있으면서 구에 내접하는 다면체를 준정다면체라고 한다. 대표적인 것으로 아르키메데스의 입체라 불리는 13 개의 준정다면체가 있다. 아르키메데스의 입체는 아르키메데스의 저서가 전해지지 않아 그 구체적인 모양이 한동안 알려지지 않았었다. 그러나 르네상스 시대부터 여러 수학자들의 노력의 결과로 차츰 모양이 밝혀졌으며, 마침내 1619 년 케플러에 의해서 모두 밝혀졌다. 아르키메데스의 입체 중에서 '깎은 정사면체', '깎은 정육면체', '깎은 정팔면체', '깎은 정십이면체', '깎은 정이십면체' 등 깎은 정다면체들은 정다면체를 각 꼭짓점으로부터 일정한 거리에 있는 지점을 지나는 평면으로 잘라 내어 만든 것이다. 예를 들어 깎은 정사면체는 정사면체로부터 만들어진 것으로 정삼각형 4 개, 정육각형 4 개로 이루어져 있다.



깎은 정사면체



깎은 정육면체



깎은 정이십면체

* 경희대학교 입학처

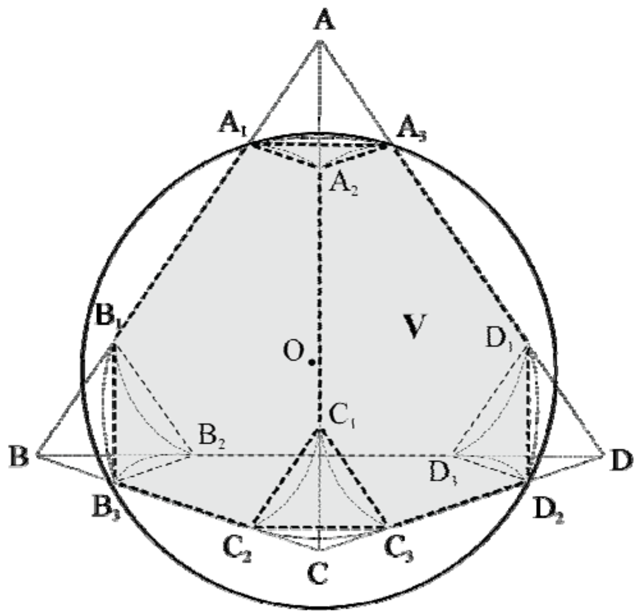


그림 1. 정사면체 ABCD 와 구 O 가 만나는 12 개의 점을 꼭짓점으로 갖는 팔면체 V 가 있다. 여기서 정사면체 ABCD 의 한 모서리의 길이는 6 이고, 구 O 의 중심은 정사면체 ABCD 에 외접하는 구의 중심과 같다. 이때 면 $A_1A_2A_3$ 와 면 BCD , 면 $B_1B_2B_3$ 와 면 ACD , 면 $C_1C_2C_3$ 와 면 ABD , 면 $D_1D_2D_3$ 와 면 ABC 는 각각 서로 평행하다.

논제 I-1

팔면체 V 가 깎은 정사면체일 때, 팔면체 V 의 한 모서리의 길이와 부피를 구하고 그 근거를 논술하시오. (배점 15점)

논제 I-2

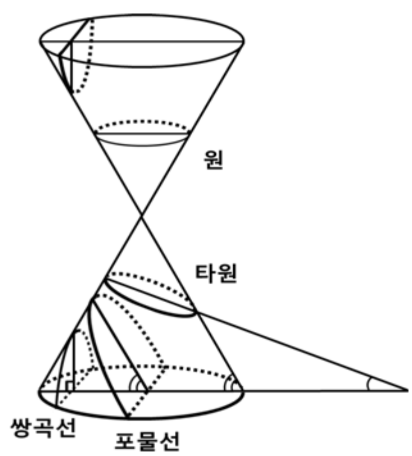
팔면체 V 가 깎은 정사면체일 때, 구 O 의 반지름의 길이를 구하고 그 방법을 서술하시오. (배점 10점)

논제 I-3

팔면체 V 에 외접하는 구 O 의 반지름의 길이가 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ 일 때, 팔면체 V 의 겉넓이를 구하고 그 근거를 논술하시오. (배점 15점)

제시문 Ⅱ **다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.**

[가] 좌변이 인수분해 되지 않는 x, y 에 대한 이차방정식 $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ 이 한 변수만의 방정식이 되는 경우가 아니면, 이 방정식이 나타내는 곡선을 이차곡선이라고 한다. 이때, 계수의 관계에 따라 원, 포물선, 타원, 쌍곡선이 된다. 이차곡선은 공간에서 원뿔을 한 평면으로 자를 때 생기는 단면의 둘레와 같아 원뿔곡선이라고도 한다. 고대 그리스 수학자 아폴로니오스는 그의 저서 “원뿔곡선론”에서 직원뿔을 자르는 평면이 원뿔의 밑면과 이루는 각을 모선과 밑면이 이루는 각과 비교하여 포물선, 타원, 쌍곡선으로 분류하였다. 밑면과 평행한 평면으로 자를 때 생기는 원은 타원의 한 종류로 생각할 수 있다. 아라비아 수학자 카얌은 원뿔곡선을 이용하여 삼차방정식의 근을 구하였다. 근세의 천문학자이자 수학자인 케플러는 스승인 티코로부터 물려받은 관측 자료를 분석하여 태양계의 행성이 타원 궤도를 따라 움직인다는 것을 발견하였다. 원뿔곡선은 천문 현상을 비롯한 여러 자연 현상을 기술하는 데 없어서는 안 될 중요한 곡선이다.



[나] 평면 위에 그려진 원뿔곡선들은 다음과 같이 정의된다. 원은 한 정점에서의 거리가 일정한 점들의 집합이고, 포물선은 한 정점과 그 점을 지나지 않는 한 정직선에 이르는 거리가 같은 점들의 집합이다. 타원은 두 정점에서의 거리의 합이 일정한 점들의 집합이고, 쌍곡선은 두 정점에서의 거리의 차가 일정한 점들의 집합이다.

[다] 분수방정식을 변형하여 얻은 다항식으로만 이루어진 방정식의 근 중에서, 분모를 0 이 되게 하여 변형 전 분수방정식을 만족하지 않는 것을 무연근(無緣根, extraneous root)이라고 한다. 무연근은 주어진 방정식과 인연이 없는 근이라는 뜻에서 붙여진 이름이다. 마찬가지로 무리방정식을 변형하여 얻은 다항식으로만 이루어진 방정식의 근 중에서, 변형 전 무리방정식을 만족하지 않는 것도 무연근이다.

논제 Ⅱ-1

어떤 외계 행성 지표면의 한 지점 O 에 탐사선이 착륙하여 지표면 위의 네 개의 서로 다른 지점 A, B, C, D 에 소리를 감지하는 장치를 설치하였다. 지표면 위의 어떤 지점 P 에서 외계 생물이 소리를 두 번 냈다. 첫 번째 소리를 지점 A 에서는 9 시 10 분 10 초, B 에서는 같은 날

9시 10분 13초에 각각 감지하였다. 두 번째 소리를 지점 C 에서는 9시 20분 30초, D 에서는 같은 날 9시 20분 31초에 각각 감지하였다. 이 정보를 이용하여 지점 A 에서 지점 P 까지 거리를 구하는 방법과, 외계 생물이 첫 번째 소리를 낸 시각을 구하는 방법을 서술하시오. (단, 이 행성의 지표면은 평평하고, 소리의 속력은 1 km/초 로 일정하다고 가정한다). (배점 10점)

논제Ⅱ-2

[논제Ⅱ-1]에서 지점 O 를 기준으로 지점 A 는 동쪽으로 2 km , B 는 서쪽으로 2 km , C 는 북쪽으로 1 km , D 는 남쪽으로 1 km 떨어진 곳에 위치할 때, 소리가 발생한 지점 P 의 위치를 구하고, 그 근거를 논술하시오. (단, 이 행성의 동서남북 방향은 지구에서처럼 동서와 남북 방향이 서로 수직이다). (배점 15점)

논제Ⅱ-3

소리를 감지하는 장치를 지점 O 를 기준으로 동쪽으로 0.5 km 떨어진 지점 E 와 서쪽으로 0.5 km 떨어진 지점 F 에 각각 추가로 설치하였다. 어떤 이차곡선을 따라 이동하고 있는 외계 생물과 지점 A , B , E , F 사이의 거리를 각각 d_A , d_B , d_E , d_F 라고 할 때, 시각 t $(0.25 \le t \le 0.5)$에서 이 거리들 사이의 관계식은 다음과 같다.

$$d_A - d_B + d_E - d_F = 3\sqrt{t}$$

$$d_A - d_B - d_E + d_F = \sqrt{t}$$

이때, 이 외계 생물이 움직이고 있는 경로를 유추하고, 그 근거를 논술하시오. (단, 지점 A , B 의 위치는 [논제Ⅱ-2]에서와 동일하다). (배점 15점)

논술유형분석

문항 수	수학 2문항(소문항 6개), 과학1문항(소문항 6개)	시간	120분
연관 개념	정다면체, 공간도형, 이차곡선		

제시문분석

제시문 I

[가]는 닮은 도형, 닮음비에 대해 설명하고 있고, [나]는 정육면체 제단의 부피를 2배로 만드는 고대 그리스 이야기를 소개하고 있다. [다]는 정다면체와 준정다면체에 대해 설명하고 있다.

제시문 II

[가]는 원뿔곡선에 대한 소개를 하고 있으며 [나]는 원, 포물선, 타원, 쌍곡선의 정의에 대해 설명하고 있다. [다]는 분수방정식과 무리방정식의 무연근에 대해 설명하고 있다.

논제분석

논제 Ⅰ-1

팔면체 V 가 깎은 정사면체일 때, 팔면체 V 의 한 모서리의 길이와 부피를 구하는 문항이다. 제시문 [다]에 제공된 깎은 정사면체는 정삼각형 4 개, 정육각형 4 개로 이루어졌다는 사실을 이용하면 풀 수 있다.

논제 Ⅰ-2

팔면체 V 가 깎은 정사면체일 때, 구 O 의 반지름의 길이를 구하는 문항이다. 단면을 이용하여 구 O 의 반지름이 되는 부분을 정확하게 표현할 수 있어야 하며, 정사면체의 높이와 무게중심에 대한 사전지식이 있으면 문제를 해결하는 시간을 줄일 수 있다.

논제 Ⅰ-3

팔면체 V 에 외접하는 구 O 의 반지름의 길이가 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 일 때 팔면체 V 의 겉넓이를 구하는 문항이다. 팔면체 V 가 깎은 정사면체가 아님을 알아야 한다.

논제 Ⅱ-1

소리를 감지하는 시간차를 이용하여 외계 생물이 소리를 내는 위치를 파악하는 방법을 묻고 있다. 소리의 속력이 일정할 때 거리의 차가 일정하다는 사실을 이용하면 해결할 수 있다.

논제 Ⅱ-2

감지장치가 있는 지점의 위치를 제시하고 외계생물이 소리를 내는 위치를 구하라는 문항이다. 각 지점을 좌표평면위의 좌표로 나타내면 감지장치가 있는 지점을 초점으로 하는 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있다.

논제 Ⅱ-3

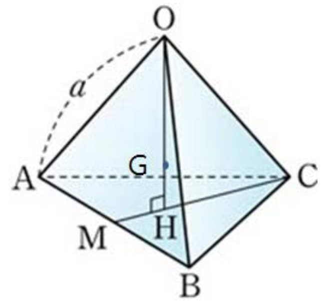
네 지점 A ,B ,E ,F 에서 외계생물과의 거리에 대한 식을 제시하고 외계 생물이 움직이는 경로를 유추하는 문항이다. 주어진 식의 합과 차를 이용해서 두 지점 사이의 거리의 차를 구한다.

배경지식쌓기

1. 정사면체의 높이와 무게중심

① 높이 $\overline{\mathrm{OH}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}a$

② 무게중심 G $\Rightarrow$ $\overline{\mathrm{OG}} : \overline{\mathrm{GH}} = 3 : 1$



2. 쌍곡선의 방정식

가. 두 정점 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$ 에서의 거리의 차가 일정한 값 $2a(c > a > 0)$ 인 쌍곡선의 방정식은

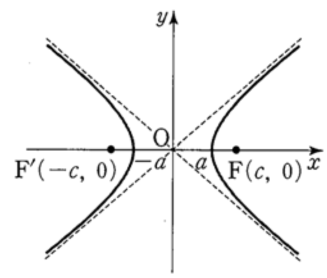
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (단, } b^2 = c^2 - a^2 \text{)}$$

① 주축의 길이 : $2a$

② 초점의 좌표 : $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$

③ 꼭짓점의 좌표 : $\mathrm{A}(a, 0)$, $\mathrm{A}'(-a, 0)$

④ 점근선의 방정식 : $y = \pm\dfrac{b}{a}x$



나. 두 정점 $\mathrm{F}(0, c)$, $\mathrm{F}'(0, -c)$ 에서의 거리의 차가 일정한 값 $2b(c > b > 0)$ 인 쌍곡선의 방정식은

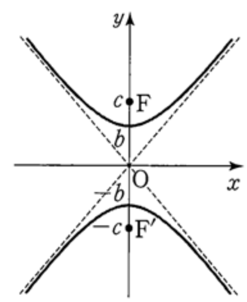
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \text{ (단, } a^2 = c^2 - b^2 \text{)}$$

① 주축의 길이 : $2b$

② 초점의 좌표 : $\mathrm{F}(0, c)$, $\mathrm{F}'(0, -c)$

③ 꼭짓점의 좌표 : $\mathrm{A}(0, b)$, $\mathrm{A}'(0, -b)$

④ 점근선의 방정식 : $y = \pm\dfrac{b}{a}x$

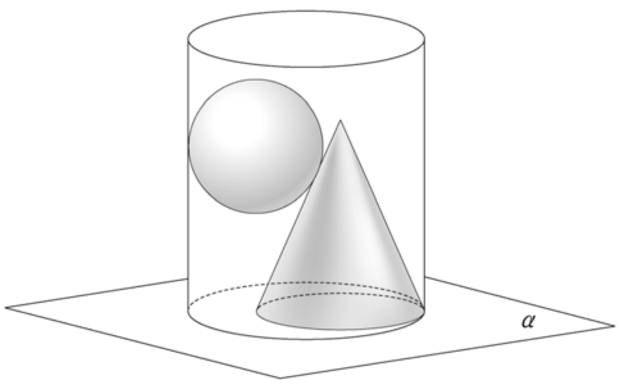


풀어보기

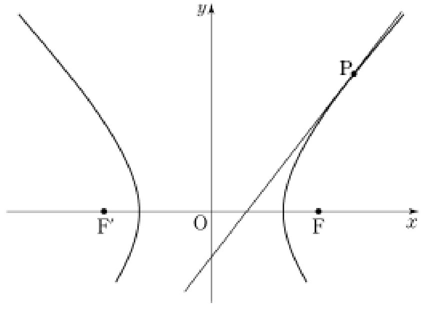
문제 1 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 7 인 원기둥과 밑면의 반지름의 길이가 5 이고 높이가 12 인 원뿔이 평면 α 위에 놓여 있고, 원뿔의 밑면의 둘레가 원기둥의 밑면의 둘레에 내접한다. 평면 α 와 만나는 원기둥의 밑면의 중심을 O, 원뿔의 꼭짓점을 A 라 하자. 중심이 B 이고 반지름의 길이가 4 인 구 S 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 구 S 는 원기둥과 원뿔에 모두 접한다.
(나) 두 점 A , B 의 평면 α 위로의 정사영이 각각 A′, B′ 일 때, $\angle A'OB' = 180^\circ$ 이다.

직선 AB 와 평면 α 가 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $\tan\theta = p$ 이다. $100p$ 의 값을 구하시오. (단, 원뿔의 밑면의 중심과 점 A′ 은 일치한다.) (2011년 대수능)



문제 2 그림과 같이 두 초점이 F(3,0),F'(−3,0) 인 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 $P(4, k)$ 에서의 접선과 x 축과의 교점이 선분 F′F 를 2 : 1 로 내분할 때, k^2 의 값을 하시오. (단, a,b 는 상수이다.) (2013년 9월 평가원)



읽기자료

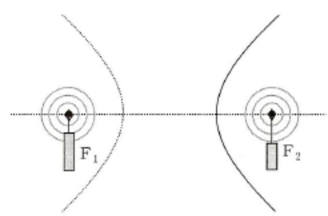
쌍곡선의 응용 (위치파악)*

두 지점에서의 거리의 차로 정의되는 쌍곡선은 위치를 파악하는데 매우 유용하게 이용된다. 망망대해를 항해하는 배나 하늘 높이 상공을 운행하는 비행기는 주변의 지형지물을 이용하여 자신의 위치를 알기 어렵다. 망망대해와 하늘에서 자신의 위치를 어떻게 알 수 있을까?

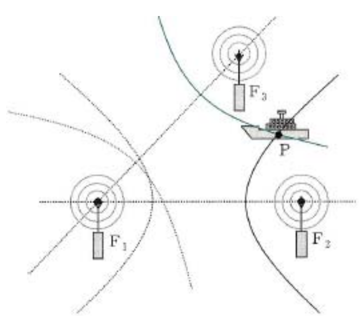
거리의 차 즉, 쌍곡선을 이용하여 자신의 위치를 파악할 수 있는데 먼저, 정해진 두 지점 F_1 , F_2 에서 일정하게 전파신호를 보내고 항해하는 배 P 에서 수신장치를 달고 전파신호를 수신한다고 하면, 전파는 일정한 속도 c 로 이동하므로 두 송신지점으로부터 배에 이르는 거리의 차에 따라 전파신호가 배에 도달하는 시간의 차(Δt)가 생기고 이를 측정하므로 거리의 차($c\Delta t$)를 알 수 있다.

$$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = c\Delta t$$

두 송신지점 즉, 두 초점의 위치와 거리의 차를 알고 있으므로 하나의 쌍곡선을 그릴 수 있고 배는 쌍곡선 위 어느 점에 위치한다. (F_2 로부터 전파신호가 보다 빨리 왔다고 가정하면, 쌍곡선의 두 곡선 중에 F_2 와 가까운 곡선 위에 P 가 위치한다.)



물론 이 상태로는 배의 위치를 정확히 알 수 없지만, 세 번째 송신지점 F_3 와 F_1 으로부터의 전파신호의 시간차를 이용하여 다른 쌍곡선을 그리고 처음 쌍곡선과의 교점을 구함으로써 배의 위치를 정확히 알 수 있다.

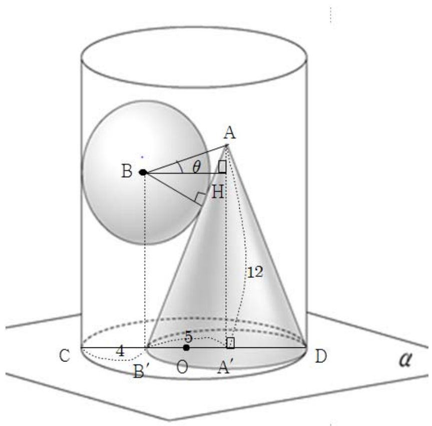


* 김경환, 유난히 설명이 잘된 수학 (이차곡선), 사피엔스

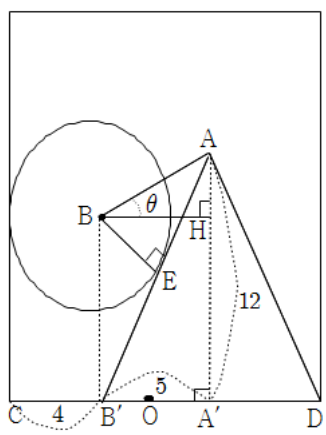
예시답안

풀어보기

문제 1



세 점 A′, B′, B 를 지나는 평면으로 입체도형을 자른 단면은 아래 그림과 같다.



구와 원뿔의 접점을 E, 점B 에서 $\overline{AA'}$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하자. $\triangle BB'E$ 와 $\triangle B'AA'$ 에서 $\angle BEB' = \angle B'A'A = 90^\circ$, $\angle BB'E = \angle B'AA'$ (엇각) 이므로
$\triangle BB'E \backsim \triangle B'AA'$ 즉, $\overline{BB'} : \overline{BE} = \overline{B'A} : \overline{B'A'}$ 이므로

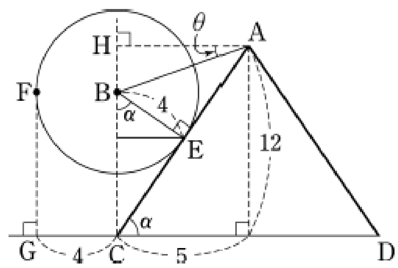
$$\overline{BB'} : 4 = 13 : 5,\ \left(\because\ \overline{B'A} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13\right)$$

$$5\overline{BB'} = 52 \quad \therefore\ \overline{BB'} = \frac{52}{5}$$

$\overline{\mathrm{AH}} = 12 - \frac{52}{5} = \frac{8}{5}$, $\overline{\mathrm{BH}} = 5$ 이므로 $\tan\theta = \frac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{BH}}} = \frac{\frac{8}{5}}{5} = \frac{8}{25} = p$

$$\therefore\ 100p = 100 \times \frac{8}{25} = 32$$

다른 풀이



조건 (나)에서 구와 원기둥의 접점 F , 원뿔과 원기둥의 접점 D , A , B 는 한 평면 위에 있다. 또, $2 \times 7 - 2 \times 5 = 4$ 에서, B 에서 α 에 내린 수선의 발은 원기둥의 밑면 원주 위에 있다. A , B , D 를 지나는 평면으로 자른 단면을 그려보면,

$$\cos\alpha = \frac{5}{13} \text{ 이므로 } \overline{\mathrm{BC}} = \frac{4}{\cos\alpha} = \frac{52}{5}$$

$$\therefore\ \tan\theta = \frac{\overline{\mathrm{BH}}}{\overline{\mathrm{AH}}} = \frac{12 - \frac{52}{5}}{5} = \frac{\frac{8}{5}}{5} = \frac{8}{25} \qquad \therefore\ 100\tan\theta = 32$$

문제 2

쌍곡선 위의 점 $\mathrm{P}(4, k)$ 에서의 접선의 방정식은 $\frac{4x}{a^2} - \frac{ky}{b^2} = 1$ 이다.

접선과 x 축과의 교점은 선분 $\mathrm{F'F}$ 를 $2:1$ 로 내분하는 점이므로 $(1,0)$ 이고
이것을 접선의 방정식에 대입하면

$$\frac{4}{a^2} = 1 \qquad \therefore a^2 = 4$$

한편, 쌍곡선의 초점의 좌표가 $(\pm 3, 0)$ 이므로 $a^2 + b^2 = 9$

따라서 $b^2 = 9 - 4 = 5$ 이고 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 이다.

점 $\mathrm{P}(4, k)$ 를 위의 쌍곡선에 대입하여 풀면 $k^2 = 15$ 이다.

논제 Ⅰ-1

깎은 정사면체(팔면체 V)는 정삼각형 4개, 정육각형 4개로 이루어져 있으므로

$\overline{AA_1}=\overline{A_1B_1}=\overline{B_1B}$ 이므로 한 모서리의 길이는 $\dfrac{6}{3}=2$ 이다.

팔면체 V 의 부피는 정사면체 $ABCD$ 에서 정사면체 $AA_1A_2A_3$ 의 부피의 4배를 빼면 된다.

정사면체 $ABCD$ 의 밑면의 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 6^2=9\sqrt{3}$ 이고, 높이는 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}\times 6=2\sqrt{6}$ 이다.

따라서 정사면체 $ABCD$ 의 부피는 $\dfrac{1}{3}\times 9\sqrt{3}\times 2\sqrt{6}=18\sqrt{2}$ 이다.

또한 $\overline{AA_1}=\dfrac{1}{3}\overline{AB}$ 이므로 정사면체 $AA_1A_2A_3$ 의 부피는 $18\sqrt{2}\times\dfrac{1}{27}$ 이다.

그러므로 팔면체 V 의 부피는 $18\sqrt{2}\times\dfrac{23}{27}=\dfrac{46\sqrt{2}}{3}$ 이다.

논제 Ⅰ-2

아래 그림과 같이 선분 BC 의 중점을 M, 선분 A_1A_2 의 중점을 M_1, 삼각형 BCD 의 무게중심을 G, 삼각형 $A_1A_2A_3$ 의 무게중심을 G_1 이라 두면 삼각형 AMD 에서 선분 OA_3 가 구 O 의 반지름의 길이이다.

$\overline{OA}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\times 6\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{2}\sqrt{6}$, $\overline{AG_1}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\times 2=\dfrac{2}{3}\sqrt{6}$ 이므로

$$\overline{OG_1}=\frac{3\sqrt{6}}{2}-\frac{2\sqrt{6}}{3}=\frac{5}{6}\sqrt{6}$$

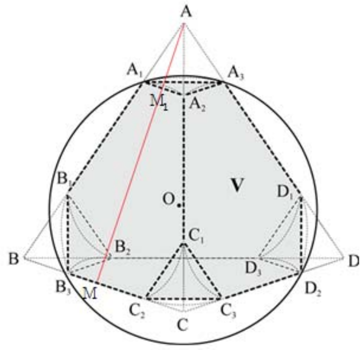
이다. 또한 $\overline{A_3M_1}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}$ 이므로

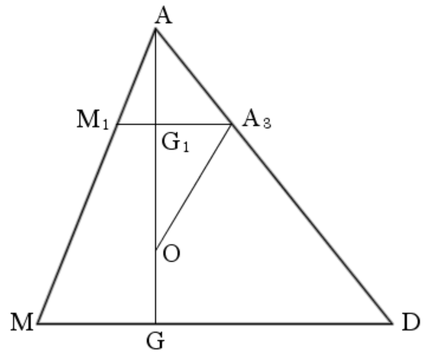
$$\overline{A_3G_1}=\sqrt{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

이다. 그리고 $\overline{OA_3}^{\,2}=\overline{OG_1}^{\,2}+\overline{A_3G_1}^{\,2}$ 에서

$$\overline{OA_3}^{\,2}=\left(\frac{5\sqrt{6}}{6}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{11}{2}$$

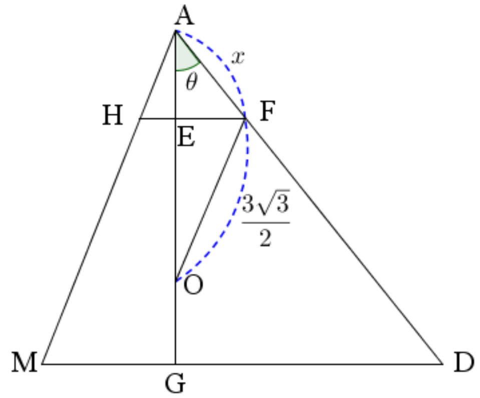
이므로 구 O 에서 반지름의 길이는 $\dfrac{\sqrt{22}}{2}$ 이다.





논제 I -3

팔면체 V 와 구 O 가 외접할 때 단면은 아래 그림과 같다. $\angle \mathrm{OAF} = \theta$ 라 두자.



삼각형 AGD 에서 $\cos\theta = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 이다. 삼각형 AOF 에서 제2 코사인 법칙을 적용하면

$\overline{\mathrm{OF}}^2 = \overline{\mathrm{AF}}^2 + \overline{\mathrm{AO}}^2 - 2\overline{\mathrm{AF}} \cdot \overline{\mathrm{AO}} \cos\theta$ 에서

$$\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = x^2 + \left(\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{3\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}$$

이다. 정리하면

$$4x^2 - 24x + 27 = 0$$

이므로 $x = \frac{3}{2}$ 또는 $x = \frac{9}{2}$ 이다. 여기서 $0 < x < 3$ 이므로 $x = \frac{3}{2}$ 이다.

그러므로 팔면체 V 는 한 변의 길이가 $\frac{3}{2}$ 인 정삼각형 4 개, 변의 길이가 $\frac{3}{2}$, 3, $\frac{3}{2}$, 3, $\frac{3}{2}$, 3 인 육각형 4 개로 이루어져 있다.

한 변의 길이가 $\frac{3}{2}$ 인 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9\sqrt{3}}{16}$ 이다.

또한 육각형의 넓이는 한 변의 길이가 6 인 정삼각형에서 한 변의 길이가 $\frac{3}{2}$ 인 정삼각형 3 개의 넓이를 뺀 것과 같다. 즉,

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^2 \times 3 = \frac{117\sqrt{3}}{16}$$

이다. 그러므로 팔면체 V 의 겉넓이는

$$4\left(\frac{9\sqrt{3}}{16} + \frac{117\sqrt{3}}{16}\right) = \frac{63\sqrt{3}}{2}$$

이다.

논제 Ⅱ-1

소리의 속력이 1km/초 로 일정하므로 시간(초)차와 거리(km)의 차가 같다. 지점 A 에서 첫 번째 소리를 감지한 후 3 초 후에 지점 B 에서 소리를 감지하였으므로 두 지점의 거리 차는 3(km) 이다. 따라서 A 와 B 를 초점으로 하고 거리의 차가 3 인 쌍곡선 위에서 지점 A 에 가까운 곡선 위에 지점 P 가 위치한다. 그리고 지점 C 에서 첫 번째 소리를 감지한 후 1 초 후에 지점 D 에서 소리를 감지하였으므로 두 지점의 거리 차는 1(km) 이다. 따라서 C 와 D 를 초점으로 하고 거리의 차가 1 인 쌍곡선 위에서 지점 C 에 가까운 곡선 위에 지점 P 가 위치한다.
해당되는 두 쌍곡선의 교점은 1 개이므로 지점 P 의 위치를 정할 수 있다. 지점 P 에서 지점 A 까지의 거리를 계산하면 지점 P 에서 첫 번째 소리를 낸 시각을 구할 수 있다.

논제 Ⅱ-2

행성의 지표면을 지점 O 를 원점으로 하는 좌표평면으로 생각한다.

$A(2,0)$, $B(-2,0)$ 을 초점으로 하고 거리의 차가 3 이므로 $c=2$, $a=\frac{3}{2}$ 이고

$b^2=2^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{7}{4}$ 이다. 따라서 쌍곡선의 방정식은

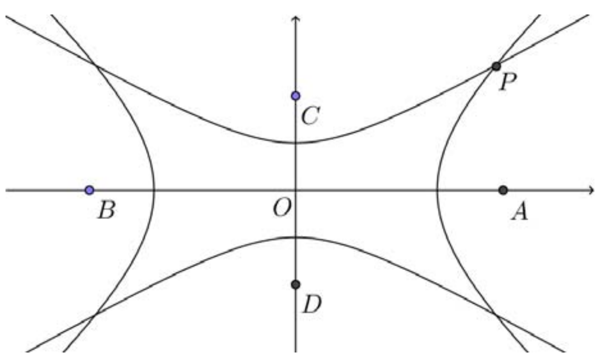
$$\frac{x^2}{\frac{9}{4}}-\frac{y^2}{\frac{7}{4}}=1$$

이다. $C(0,1)$, $D(0,-1)$ 을 초점으로 하고 거리의 차가 1 이므로 $c=1$, $b=\frac{1}{2}$ 이고

$a^2=1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$ 이다. 따라서 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{\frac{3}{4}}-\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=-1$$

이다. 두 쌍곡선의 교점에서 지점 P 의 위치는 아래 그림과 같다.



두 방정식을 정리하면

$$28x^2-36y^2=63\ ,\ 4x^2-12y^2=-3$$

이고, 연립하여 해를 구하면

$$(x,y)=\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{7}}{2}\right),\ \left(\frac{3\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{7}}{2}\right),\ \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{7}}{2}\right),\ \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$$

이다. 이 중에서 조건을 만족하는 지점 P 의 좌표는 $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$ 이다. 따라서 지점 O 를 기준으로 동쪽으로 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$km , 북쪽으로 $\frac{\sqrt{7}}{2}$km 떨어진 곳에 지점 P 가 위치한다.

논제 Ⅱ-3

[논제 Ⅱ-2]와 같이 좌표를 정하면 $\mathrm{E}\left(\frac{1}{2},0\right)$, $\mathrm{F}\left(-\frac{1}{2},0\right)$ 이다.

두 관계식을 더하면 $d_{\mathrm{A}}-d_{\mathrm{B}}=2\sqrt{t}$ 에서 $c=2$, $a=\sqrt{t}$ 이므로 $b^2=4-t$ 이다. 따라서 외계생물은

$$\frac{x^2}{t}-\frac{y^2}{4-t}=1$$

인 쌍곡선 위를 움직이고 있다. 두 관계식을 빼면 $d_{\mathrm{E}}-d_{\mathrm{F}}=\sqrt{t}$ 에서 $c=\frac{1}{2}$, $a=\frac{\sqrt{t}}{2}$ 이므로 $b^2=\frac{1-t}{4}$ 이다. 따라서 외계생물은

$$\frac{x^2}{t}-\frac{y^2}{1-t}=4$$

인 쌍곡선 위를 움직이고 있다. 두 방정식을 연립하여 풀면

$$x^2=\frac{-t^2+5t}{4}\ ,\ y^2=\frac{t^2-5t+4}{4}$$

이고, $x^2+y^2=1$ 이다. 그러므로 외계 생물은 탐사선에서 거리 1km 를 유지하며 원의 일부분을 따라 움직이고 있다.

5

고려대학교 수시(오전)

제시문 수학은 필수입니다.*

(가)

그림 1에서와 같이 부등식 $y \le |x|$의 영역에서 원 $x^2+y^2=1$과 내접하고 $y=|x|$와 한 점에서 만나는 원의 중심을 D 라 하자.

(나)

그림 2에서와 같이 점 $\mathrm{A}(t, t^2)$가 곡선 $y=x^2$ 위를 움직일 때 점 A 에서 이 곡선과 접하고 x 축과 점 B 에서 접하는 원의 중심을 $\mathrm{C}(x, y)$라 하고 중심 C 의 자취를 매개변수로 나타내면 $x=f(t)$, $y=g(t)$가 된다고 하자.

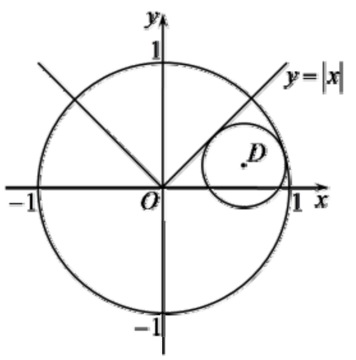


그림 1

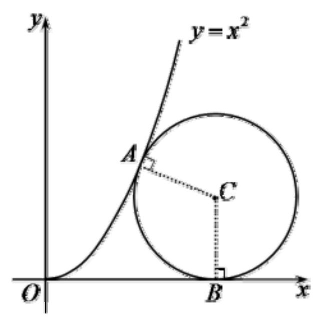


그림 2

(다)

좌표평면 위의 원점 O 와 세 점 $\mathrm{A}_1(1,0)$, A_2, A_3이 다음 조건을 만족한다.

(ㄱ) 점 A_2는 제2사분면에 있고 점 A_3은 제3사분면에 있다.
(ㄴ) $\angle \mathrm{A}_1\mathrm{O}\mathrm{A}_2=\alpha$, $\angle \mathrm{A}_2\mathrm{O}\mathrm{A}_3=\beta$, $\angle \mathrm{A}_3\mathrm{O}\mathrm{A}_1=\alpha$ 이다.
(ㄷ) $\left\lvert \overrightarrow{\mathrm{OA}_2} \right\rvert = \left\lvert \overrightarrow{\mathrm{OA}_3} \right\rvert = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

좌표평면에서 부등식 $y \ge 0$의 영역을 원점을 중심으로 θ만큼 회전이동 시켜서 얻어진 영역을 H_θ라 하고 위치벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}$ 중에서 H_θ에 포함되는 벡터들의 합의 크기를 $L(\theta)$라 하자.

* 고려대학교 입학처

논제 a

제시문 (가)에서 점 D 의 좌표를 (x, y) 라 할 때 (x, y) 가 만족시키는 방정식을 구하시오.

논제 b

제시문 (나)의 매개변수에 의해서 나타내어지는 함수 $x = f(t)$, $y = g(t)$ 를 구하시오. (단, $t > 0$)

논제 c

논제 (b)에서의 두 함수 $x = f(t)$, $y = g(t)$ 가 $t = 0$ 에서 연속이기 위한 함숫값 $f(0)$와 $g(0)$을 각각 구하고 이때 적분값 $\int_0^1 f(t)\,dt$ 를 구하시오.

논제 d

제시문 (다)의 함수 $L(\theta)$ 를 구하시오. (단, $0 < \theta \le 2\pi$)

논제 e

제시문 (다)의 함수 $L(\theta)$ 의 최댓값을 가장 작게 만드는 모든 α, β 에 대하여 점 $(\cos\alpha, \cos\beta)$ 를 좌표평면 위에 나타내시오.

논술유형분석

문항 수	수학1문항 필수, 과학4문항 중 택1	시간	100분
연관 개념	원과 접선, 점의 자취, 함수의 연속성, 정적분, 벡터의 합과 내적		

제시문분석

제시문 [가], [나]

직선과 원에 접하는 원의 중심의 자취와 포물선과 직선에 접하는 원의 중심이 그리는 자취를 설명하고 있다.

제시문 [다]

x 축 위에 있는 고정된 벡터와 x 축에 대칭인 움직이는 두 벡터를 설명하고 있다.

논제분석

논제 a

원과 직선이 접할 때는 원의 중심에서 직선까지의 거리와 반지름이 같다는 사실을 이용한다. 단, x 의 범위에 따라 원의 중심의 자취가 달라짐에 유의해야 한다.

논제 b

두 곡선이 접한다는 것은 접점에서 공통접선을 가진다는 사실을 이용한다.

논제 c

연속함수의 정의를 이용하면 연속일 조건을 쉽게 구할 수 있다. 다만 정적분 값을 구할 때 적분 함수가 다소 복잡하므로 치환적분을 사용해야 한다.

논제 d

주어진 조건을 활용하면 θ 의 범위에 따라 $L(\theta)$ 의 값이 달라짐을 알 수 있다. θ 의 값을 다양하게 하여 직접 그려보는 것이 중요하다.

논제 e

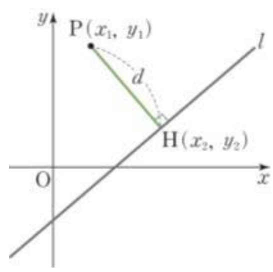
α 와 β 의 변화에 따라 $L(\theta)$ 의 최댓값 M의 범위를 추측할 수 있다. 이 때, M을 가장 작게 만드는 경우의 조건을 찾아내는 것이 중요하다.

배경지식쌓기

1. 점과 직선사이의 거리

점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ 과 직선 l : $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d 는

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



2. 함수의 연속

일반적으로 함수 $f(x)$ 가 실수 a 에 대하여

(ⅰ) $x=a$ 에서 함숫값 $f(a)$ 가 정의되어 있고

(ⅱ) 극한값 $\lim_{x\to a}f(x)$ 가 존재하며

(ⅲ) $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 **연속**이라고 한다.

한편, 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이 아닐 때, 곧 위의 세 가지 조건 가운데 어느 한 가지라도 만족하지 않을 때, 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 **불연속**이라고 한다.

3. 치환적분법

닫힌 구간 $[a,\ b]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 에 대하여 미분가능한 함수 $x=g(t)$ 의 도함수 $g'(t)$ 가 닫힌 구간 $[\alpha,\ \beta]$ 에서 연속이고, $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$ 이면

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$$

풀어보기

문제 1 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=16$에 내접하고 두 직선 $x=2$, $y=2$ 에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이의 최댓값은?

문제 2 이차항의 계수가 1 인 이차함수 $f(x)$ 와 함수

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\ln(x+1)} & (x\neq 0) \\ 8 & (x=0) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$ 가 구간 $(-1,\infty)$ 에서 연속일 때, $f(3)$ 의 값은? (2014년 대수능)

① 6　② 9　③ 12　④ 15　⑤ 18

문제 3 두 연속함수 $f(x)$, $g(x)$ 가

$$g\left(e^x\right)=\begin{cases} f(x) & (0\le x<1) \\ g\left(e^{x-1}\right)+5 & (1\le x\le 2) \end{cases}$$

를 만족시키고, $\displaystyle\int_1^{e^2} g(x)dx=6e^2+4$ 이다. $\displaystyle\int_1^e f(\ln x)\,dx=ae+b$ 일 때, a^2+b^2 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 정수이다.) (2013년 9월 평가원)

읽기자료

세종대왕과 수학

세종대왕은 조선 제 4 대 왕으로서, 우리의 글 '한글'을 고안한 최대의 업적 외에 측우기, 해시계 등 여러 가지 과학 발명품을 만들었고 도량형을 정하고 음악적 조예도 깊었던 것으로 알려진다. 게다가 수학에 있어서도 지대한 관심을 갖고 연구를 하였다고 하는데 특히 수학에 대한 열의 때문에 왕 스스로가 당시 부제학이었던 정인지로부터 『산학계몽』에 대한 강의를 받았다는 기록이 『세종실록』에 전해진다.


[측우기와 해시계 앙부일구]*

임금이 계몽산(啓蒙算)을 배우는데, 부제학 정인지가 들어와서 모시고 질문을 기다리고 있으니 임금이 말하기를, "산수(算數)를 배우는 것이 임금에게는 필요가 없을 듯하나, 이것도 성인이 제정한 것이므로 나는 이것을 알고자 한다"고 하였다.

『세종실록』 12년 10월 23일

임금이 승정원(承政院)에 이르기를, "산학은 비록 술수(術數)라 하겠지만 국가의 긴요한 사무이므로, 역대로 내려오면서 모두 폐하지 않았다. 정자(程子), 주자(朱子)도 비록 이를 전심하지 않았다 하더라도 알았을 것이요, 최근에 농토를 측량할 때에 만일 이순지, 김달의 무리가 아니었다면 어떻게 쉽게 계량을 하였겠는가. 지금 산학을 예습하게 하려면 그 방책이 어디에 있는지 의논하여 아뢰라."

『세종실록』 25년 11월 17일

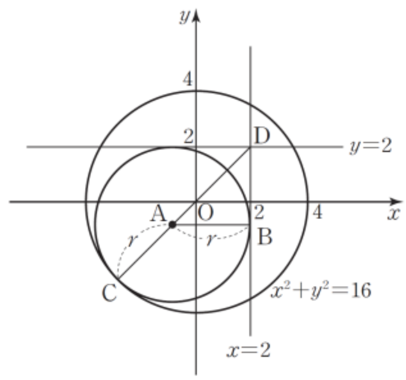
따라서 세종대왕은 관리들에게 수학을 배우게 하고 수학 연구를 위해 중국에 관리들을 유학시키는가 하면 중국의 수학책을 복각하거나 수학과 관련한 새로운 관직을 마련하기도 하였다. 왕 스스로가 수학을 배우고 관리들에게 수학 연구를 장려하는 입장은 현실적이고 구체적인 방안을 마련함으로써 적극 지지되었다. 예컨대 과학 기술상의 재능만 있으면 신분과 무관하게 파격적으로 등용이 보장된 것이다. 세종대왕의 탁월하고 천부적인 과학적 탐구력을 현실화한 과학자 장영실은 천민 출신의 관노였다.

* 그림출처 : 위키백과

예시답안

풀어보기

문제 1



원 $x^2+y^2=16$ 에 내접하고, 두 직선 $x=2$, $y=2$ 에 동시에 접하는 원 중에서 반지름의 길이가 최대인 원을 A 라 하면, 원 A 는 그림과 같이 중심이 제3사분면에 있는 원이다.

이때, 두 직선 $x=2$, $y=2$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이고, 원 $x^2+y^2=16$ 도 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭인 도형이므로 구하는 원의 중심 A 는 직선 $y=x$ 위에 있다.

원 A 와 직선 $x=2$ 의 접점을 B, 원 A 와 원 $x^2+y^2=16$ 의 접점을 C, 두 직선 $x=2$, $y=2$ 의 교점을 D 라 하자. 원 A 의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\overline{\mathrm{CA}}+\overline{\mathrm{AD}}=r+\sqrt{2}r \ , \ \overline{\mathrm{CO}}+\overline{\mathrm{OD}}=4+2\sqrt{2} \ , \ \overline{\mathrm{CA}}+\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{CO}}+\overline{\mathrm{OD}}$$

이므로

$$r+\sqrt{2}r=4+2\sqrt{2} \ , \ r+\sqrt{2}r=2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1) \qquad \therefore \ r=2\sqrt{2}$$

문제 2

[정답] ②

$f(x)=x^2+ax+b$ 라 두면

$$f(x)g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+ax+b}{\ln(x+1)} & (x\neq 0\,,\ x>-1) \\ 8b & (x=0) \end{cases}$$

함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+ax+b}{\ln(x+1)}=8b$ $x\to 0$ 일 때 분자도 0 즉,

$b=0$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+ax}{\ln(x+1)}=0$ 에서 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+a}{\dfrac{\ln(x+1)}{x}}=\dfrac{a}{1}=0$ 이므로 $a=0$

따라서 $f(x)=x^2$ 이므로 $f(3)=9$

문제 3

$$g\left(e^x\right)=\begin{cases} f(x) & (0\le x<1) \\ g\left(e^{x-1}\right)+5 & (1\le x\le 2) \end{cases}$$

에서 $e^x = t$ 로 놓으면 $x = \ln t$ 이고 x 가 0, 1, 2 일 때, t 는 각각 1, e, e^2 이므로

$$g(t) = \begin{cases} f(\ln t) & (1 \le t < e) \\ g\left(\dfrac{t}{e}\right) + 5 & (4 \le t \le e^2) \end{cases}$$

$$\int_1^{e^2} g(x)dx = \int_1^e g(x)dx + \int_e^{e^2} g(x)dx$$

$$= \int_1^e f(\ln x)dx + \int_e^{e^2} \left\{ g\left(\frac{x}{e}\right) + 5 \right\} dx = 6e^2 + 4 \cdots\cdots ㉠$$

$\displaystyle\int_e^{e^2} \left\{ g\left(\frac{x}{e}\right) + 5 \right\} dx$ 에서 $\dfrac{x}{e} = u$ 라 하면 $dx = e \cdot du$ 이고 x 가 e, e^2 일 때, u 는 각각 $1, e$이므로

$$\int_e^{e^2} \left\{ g\left(\frac{x}{e}\right) + 5 \right\} dx = \int_1^e \{g(u) + 5\} e \cdot du = e\int_1^e g(u)du + 5e(e-1)$$

$$= e\int_1^e f(\ln u)du + 5e(e-1) = e\int_1^e f(\ln x)dx + 5e(e-1)$$

이다. 따라서 ㉠은

$$\int_1^e f(\ln x)dx + e\int_1^e f(\ln x)dx + 5e(e-1) = (e+1)\int_1^e f(\ln x)dx + 5e(e-1) = 6e^2 + 4$$

$$\therefore \int_1^e f(\ln x)dx = \frac{6e^2 + 4 - 5e(e-1)}{e+1} = \frac{e^2 + 5e + 4}{e+1} = e + 4$$

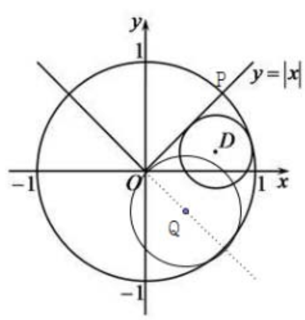
$$\therefore a = 1, \ b = 4 \qquad \therefore a^2 + b^2 = 17$$

논제 a

그림과 같이 $y = x$ 와 원 $x^2 + y^2 = 1$ 이 만나는 점을 P 라 두면 $P\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 이다. 직선 $y = x$ 의 위의 점 $(0, 0)$과 원 $x^2 + y^2 = 1$ 의 내부에 동시에 접하는 원의 중심의 좌표를 Q라 하면 $Q\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}, -\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$ 이다.

x 의 범위에 따라 원의 중심 $D(x, y)$ 의 자취가 달라지므로 경우를 나누면 다음과 같다.

(ⅰ) $\dfrac{\sqrt{2}}{4} \le x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때 $y < x$ 이다. 또한 점 D 에서 $y = x$ 까지의 거리가 반지름 r 이고, $r = 1 - \overline{OD}$ 이므로



$$\frac{x-y}{\sqrt{2}} = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$$

이다. 이 식을 정리하면

$$x^2 + y^2 + 2xy + 2\sqrt{2}(x-y) - 2 = 0$$

인 포물선*의 일부이다.

* $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$에서 $C^2 - 4AB = 0$이면 포물선이다.

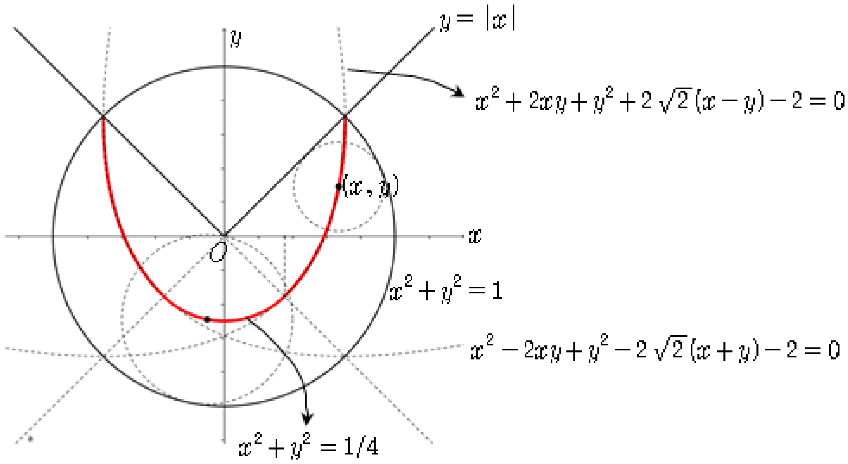
(ⅱ) $-\dfrac{\sqrt{2}}{4} < x < \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ 일 때는 반지름이 $\dfrac{1}{2}$ 인 원의 일부이다. 즉,

$$x^2+y^2=\frac{1}{4}$$

(ⅲ) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} < x \le -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ 일 때는 (ⅰ)의 경우와 y 축에 대칭이다. 따라서

$$x^2+y^2-2xy-2\sqrt{2}(x+y)-2=0$$

이다. 따라서 원의 중심 D 의 자취는 아래 그림과 같다.



논제 b

원의 중심의 좌표 C(x,y) 에서 A(t,t^2) 까지의 거리가 y 와 같으므로

$$(t-x)^2+(t^2-y)^2=y^2 \quad \cdots ①$$

이고 점 (x,y) 는 $y=x^2$ 위의 점 (t,t^2) 에 그은 법선위에 있으므로

$$y-t^2=-\frac{1}{2t}(x-t)$$

를 만족한다.

$$x-t=-2t(y-t^2) \cdots ②$$

을 ①에 대입하면

$$4t^2(t^2-y)^2+(t^2-y)^2=y^2 \text{ 즉, } (t^2-y)^2(1+4t^2)=y^2$$

이고 $t^2 \ge y$ 이므로 $y=(t^2-y)\sqrt{1+4t^2}$ 이다. 따라서 $y=\dfrac{t^2\sqrt{1+4t^2}}{1+\sqrt{1+4t^2}}$

이다. 이것을 ②식에 대입하면 $x=t-\dfrac{2t^3}{1+\sqrt{1+4t^2}}+2t^3=t+\dfrac{2t^3}{1+\sqrt{1+4t^2}}$ 이다. 즉, 매개변수방정식은

$$x=t+\frac{2t^3}{1+\sqrt{1+4t^2}}\quad ,\ y=\frac{t^2\sqrt{1+4t^2}}{1+\sqrt{1+4t^2}}\quad (\text{단, } t>0\ )$$

이고 각각의 분모를 유리화하여 정리하면

$$x=\frac{t}{2}+\frac{t}{2}\sqrt{1+4t^2}\ ,\ y=\frac{1-\sqrt{1+4t^2}}{4}+t^2\quad (\text{단, } t>0\ )$$

이다.

다른 풀이

점 $\mathrm{A}(t,t^2)$ 에서 접선의 방정식은 $y-t^2=2t(x-t)$ 이고, x 절편의 좌표는 $\left(\frac{t}{2},0\right)$ 이다.
원의 중심을 $\mathrm{C}(x,y)$ 이므로

$$x-\frac{t}{2}=\sqrt{\left(t-\frac{t}{2}\right)^2+\left(t^2\right)^2}=\sqrt{\frac{t^2}{4}+t^4}=\frac{t}{2}\sqrt{1+4t^2}$$

이다. 따라서

$$x=\frac{t}{2}+\frac{t}{2}\sqrt{1+4t^2}$$

이다. 또한 선분 AC 의 기울기가 $-\frac{1}{2t}$ 이므로 $\frac{y-t^2}{x-t}=-\frac{1}{2t}$ 이고 위에서 구한 $x=\frac{t}{2}+\frac{t}{2}\sqrt{1+4t^2}$ 를 대입하면

$$y-t^2=-\frac{1}{2t}\left(\frac{t}{2}+\frac{t}{2}\sqrt{1+4t^2}-t\right)$$

이고, 이 식을 정리하면

$$y=\frac{1-\sqrt{1+4t^2}}{4}+t^2$$

이다. 그러므로

$$x=\frac{t}{2}+\frac{t}{2}\sqrt{1+4t^2}\ ,\ y=\frac{1-\sqrt{1+4t^2}}{4}+t^2\quad (\text{단, } t>0\ )$$

이다.

논제 c

$t=0$ 에서 연속이 되려면 $\lim_{t\to+0}f(t)=f(0)$, $\lim_{t\to+0}g(t)=g(0)$ 가 되어야 하므로

$$f(0)=g(0)=0$$

이다. 그리고

$$\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1\left(t+\frac{2t^3}{1+\sqrt{1+4t^2}}\right)dt=\frac{1}{2}+\int_0^1\left(\frac{2t^3}{1+\sqrt{1+4t^2}}\right)dt\quad \cdots③$$

이다. 여기서 $1+4t^2=s$ 라 두면 $t=\frac{\sqrt{s-1}}{2}$ $(\because\ t>0)$ 이므로 $2t^3=\frac{1}{4}(s-1)^{\frac{3}{2}}$ 이다. 그리고

$8t\,dt=ds$ 이므로 $dt=\dfrac{ds}{8t}=\dfrac{ds}{4\sqrt{s-1}}$ 이다. 이것을 ③식에 대입하면

$$\int_0^1 f(t)dt=\frac{1}{2}+\int_0^1\left(\frac{2t^3}{1+\sqrt{1+4t^2}}\right)dt=\frac{1}{2}+\frac{1}{16}\int_1^5\frac{(s-1)^{\frac{3}{2}}}{1+\sqrt{s}}\cdot\frac{ds}{\sqrt{s-1}}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{16}\int_1^5\frac{s-1}{1+\sqrt{s}}ds=\frac{1}{2}+\frac{1}{16}\int_1^5(\sqrt{s}-1)ds$$
$$=\frac{5}{24}(\sqrt{5}+1)$$

이다.

다른 풀이

$t=0$ 에서 연속이기 위해서는 $\lim_{t\to+0}f(t)=f(0)$, $\lim_{t\to+0}g(t)=g(0)$ 을 만족해야 한다. 따라서

$$f(0)=\lim_{t\to+0}\left(\frac{t}{2}+\frac{t}{2}\sqrt{1+4t^2}\right)=0\ ,\ g(0)=\lim_{t\to+0}\left(\frac{1-\sqrt{1+4t^2}}{4}+t^2\right)=0$$

이다. $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^1\frac{t}{2}dt+\int_0^1\frac{t}{2}\sqrt{1+4t^2}\,dt$ 에서

$$\int_0^1\frac{t}{2}dt=\left[\frac{t^2}{4}\right]_0^1=\frac{1}{4}$$

이다. 또한 $\displaystyle\int_0^1\frac{t}{2}\sqrt{1+4t^2}\,dt$ 에서 $1+4t^2=s$ 라 치환하면 $8t\,dt=ds$ 이므로

$$\int_0^1\frac{t}{2}\sqrt{1+4t^2}\,dt=\frac{1}{16}\int_1^5\sqrt{s}\,ds=\frac{1}{24}(5\sqrt{5}-1)$$

이다. 그러므로

$$\int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^1\frac{t}{2}dt+\int_0^1\frac{t}{2}\sqrt{1+4t^2}\,dt=\frac{5(1+\sqrt{5})}{24}$$

이다.

논제 d

그림과 같이 점 A_2, A_3 는 반지름이 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 인 원위에 존재하며 서로 x 축에 대칭이다. 그러므로 θ 의 범위에 따라 $L(\theta)$ 는 다음과 같다.

(ⅰ) $0<\theta<\dfrac{\beta}{2}$ 일 때, $L(\theta)=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(ⅱ) $\dfrac{\beta}{2}\le\theta\le\alpha$ 일 때,

$L(\theta) = \left|\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}\right| = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\frac{\beta}{2}$

(iii) $\alpha < \theta < \pi$ 일 때, $L(\theta) = \left|\overrightarrow{OA_3}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(iv) $\pi \le \theta \le \alpha + \beta$ 일 때,

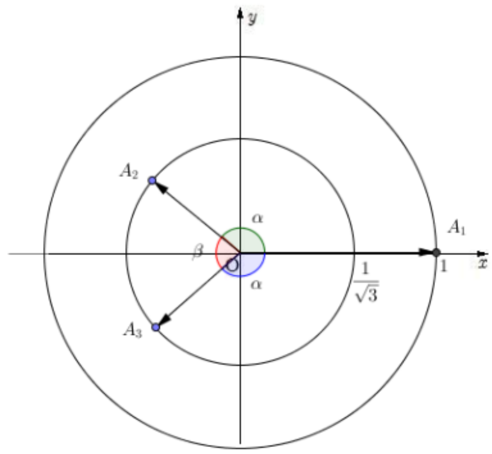
벡터의 합과 코사인 제 2법칙을 이용하면,

$L(\theta) = \left|\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_3}\right| = \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}\cos\alpha}{3}}$

(v) $\alpha + \beta < \theta < \alpha + \pi$ 일 때, $L(\theta) = \left|\overrightarrow{OA_1}\right| = 1$

(vi) $\alpha + \pi \le \theta \le 2\pi$ 일 때, $L(\theta) = \left|\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}\right|$

$= \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}\cos\alpha}{3}}$



논제 e

$L(\theta)$ 의 최댓값을 M이라 두면 α 와 β 의 변화에 따라 M의 값은

$$1 \le M < \frac{2}{\sqrt{3}}$$

의 값을 취한다. 이 때, $L(\theta)$ 의 최댓값을 가장 작게 만드는 경우는 $M = 1$, 즉

$$\left|\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}\right| \le 1,\ \left|\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_3}\right| \le 1,\ \left|\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}\right| \le 1$$

일 때 이다. 여기서 $\overrightarrow{OA_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OA_2} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OA_3} = \vec{c}$ 라 두면 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = |\vec{c}| = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이고

$|\vec{a} + \vec{b}| \le 1$ 이어야 하므로 양변을 제곱하면

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha \le 1 \qquad \therefore \cos\alpha \le -\frac{\sqrt{3}}{6}$$

그리고 $|\vec{b} + \vec{c}| \le 1$ 이어야 하므로 $0 < 2|\vec{b}|\cos\frac{\beta}{2} \le 1$ 이고 $\alpha + \frac{\beta}{2} = \pi$ 이므로

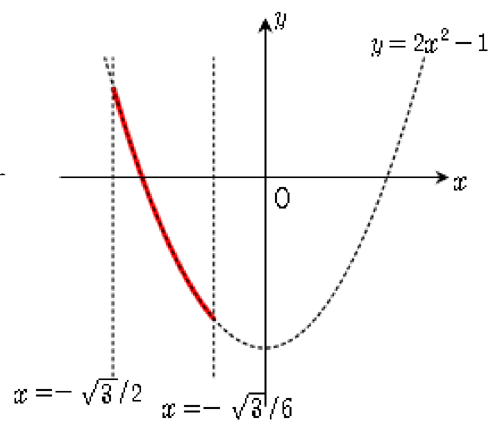
$\cos\alpha \ge -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다. 따라서

$$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{2} \le \cos\alpha \le -\frac{\sqrt{3}}{6}$$

한편 $\cos\beta = \cos(2\pi - 2\alpha) = \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ 이므로 $(\cos\alpha, \cos\beta) = (x, y)$ 라 두면 점 (x, y) 는

$$y = 2x^2 - 1 \ (\text{단, } -\frac{\sqrt{3}}{2} \le x \le -\frac{\sqrt{3}}{6})$$

가 되고 이를 그리면 아래 그림과 같다.



6 고려대학교 수시(오후)

제시문 **수학은 필수입니다.***

(가)

그림 1과 같이 둘레의 길이가 1인 정삼각형 ABC 를 직선 ℓ 위에서 한 바퀴 굴린다. 이때 꼭짓점 A 는 꼭짓점 C 를 중심으로 하는 원의 호를 따라 A$'$ 의 위치로 이동한 후 다시 점 B$'$ 를 중심으로 하는 원의 호를 따라 A$''$ 의 위치로 이동한다.

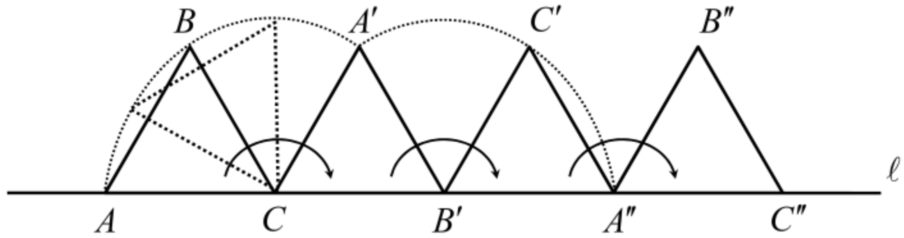


그림 1

(나)

그림 2와 같이 둘레의 길이가 1인 정사각형 ABCD 가 직선 ℓ 위에서 한 바퀴 굴러 정사각형 A$''$B$''$C$''$D$''$ 의 위치에 도달한다.

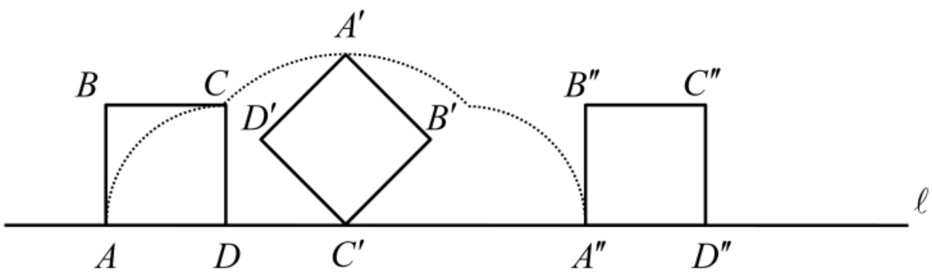


그림 2

(다)

그림 3에서 원점 O 를 지나는 직선 ℓ 이 세 점 O, A$(2,4,4)$, B$(3,0,3)$ 를 포함하는 평면 α 와 수직으로 만난다. 세 점 O, A, B 를 지나는 원이 직선 ℓ 의 둘레로 각 θ 만큼 회전할 때 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ 가 지나가는 영역을 S 라 한다. S 위의 임의의 점 (a,b,c) 를 점 $(a,b,2c)$ 로 대응시켜 얻은 영역을 S' 라 한다.

* 고려대학교 입학처

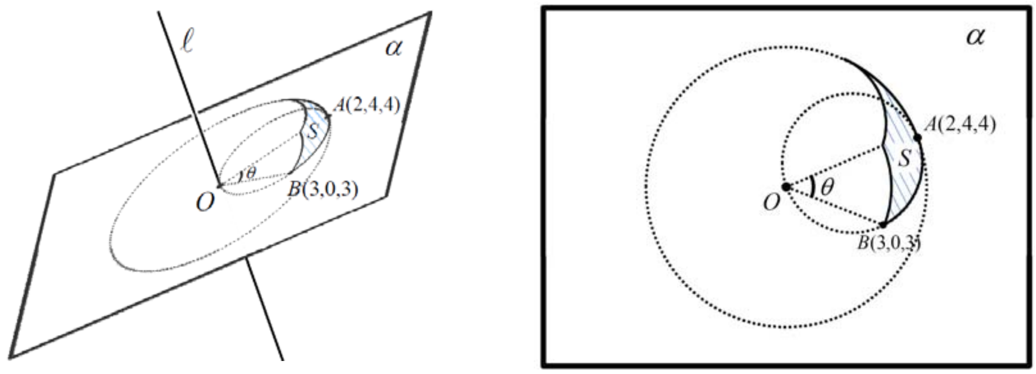


그림 3

논제 a

제시문 (가)에서 꼭짓점 A 가 움직인 거리를 구하시오.

논제 b

제시문 (나)에서 꼭짓점 A 가 움직인 거리를 구하시오.

논제 c

둘레의 길이가 1인 정 n 각형 $\mathrm{A_1A_2\cdots A_n}$ 에서 선분 $\overline{\mathrm{A_kA_n}}$ 의 길이를 구하시오. (단, $1 \le k \le n-1$)

논제 d

둘레의 길이가 1인 정 n 각형을 직선 위에서 한 바퀴 굴릴 때 한 꼭짓점이 움직인 거리 d_n 과 극한값 $\lim_{n\to\infty} d_n$ 을 구하시오.

논제 e

제시문 (다)에서 내적 $\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ 를 구하고 θ 가 2π 일 때 S 의 넓이를 구하시오.

논제 f

제시문 (다)에서 S 의 넓이 $f(\theta)$ 와 S' 의 넓이 $g(\theta)$ 를 구하시오. (단 $0 \le \theta \le 2\pi$)

논술유형분석

문항 수	수학1문항 필수, 과학4문항 중 택1	시간	100분
연관 개념	함수의 극한, 정적분의 정의, 이면각의 크기 및 정사영		

제시문분석

제시문 [가], [나]

정삼각형과 정사각형이 한 바퀴 구를 때 꼭짓점이 그리는 자취를 설명하고 있다.

제시문 [다]

공간상의 한 평면위에 있는 도형을 회전축 둘레로 회전했을 때 생기는 도형의 모양을 설명하고 있다.

논제분석

논제 a, b

도형위의 한 꼭짓점이 한 바퀴 구를 때 그리는 호의 길이를 구하는 간단한 문제다.

논제 c

정 n각형의 대각선 길이를 구하는 문제로, 원주각을 생각해서 원의 반지름을 n으로 표현할 수 있어야 한다.

논제 d

앞의 논제를 이용하여 d_n을 합의 기호 시그마로 표현하고 정적분의 정의를 이용하여 $\lim_{n\to\infty} d_n$의 값을 구한다.

논제 e

내적의 정의를 이용하면 두 벡터가 직교한다는 것을 확인할 수 있고 넓이도 쉽게 상상할 수 있다.

논제 f

S 의 넓이는 부채꼴의 넓이로 생각할 수 있고, S' 의 넓이는 정사영을 이용하여 생각할 수 있다. 이때 두 평면의 이면각의 크기는 두 평면의 법선벡터가 이루는 각과 일치함을 알아야 한다.

배경지식쌓기

1. 벡터의 평행과 수직조건

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$이다. $\vec{a}/\!/\vec{b}$ 이면 $\theta=0$ 또는 $\theta=\pi$ 이므로 다음이 성립한다.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}||\vec{b}|$$

또, $\vec{a}$ 와 $\vec{b}$ 가 이루는 각이 직각일 때, 두 벡터 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 는 서로 수직이라 하고 기호로 $\vec{a}\perp\vec{b}$ 와 같이 나타낸다. $\vec{a}\perp\vec{b}$ 이면 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 이므로 다음이 성립한다.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=0$$

또한 이들의 역도 성립한다. 즉, 두 공간벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ 이 서로 수직일 조건을 성분으로 나타내면 $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$ 이다.

2. 정적분과 무한급수

함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때,

(1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)\,dx$

(2) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{p}{n}k\right)\frac{p}{n}=\int_0^p f(x)\,dx$

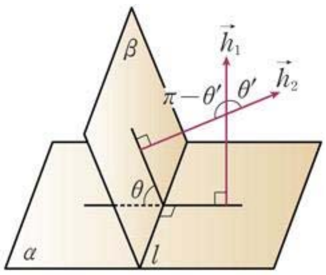
(3) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{p}{n}k\right)\frac{p}{n}=\int_a^{a+p} f(x)\,dx=\int_0^p f(a+x)\,dx$

3. 두 평면이 이루는 각의 크기

두 평면

$$\alpha : a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$$
$$\beta : a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$

이 이루는 각의 크기 $\theta\left(0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}\right)$를 구하여 보자.



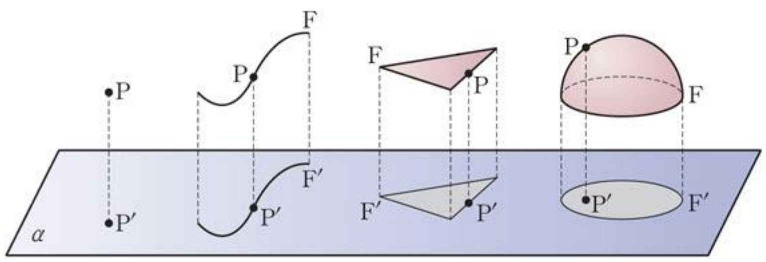
두 평면의 법선벡터 $\overrightarrow{h_1}=(a_1,\ b_1,\ c_1)$, $\overrightarrow{h_2}=(a_2,\ b_2,\ c_2)$가 이루는 각의 크기를 θ'이라 하면, θ는 θ'과 $\pi-\theta'$ 중에서 크지 않은 쪽과 같다. 따라서 다음이 성립한다.

$$\cos\theta=\frac{\left|\overrightarrow{h_1}\cdot\overrightarrow{h_2}\right|}{\left|\overrightarrow{h_1}\right|\left|\overrightarrow{h_2}\right|}=\frac{\left|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2\right|}{\sqrt{a_1{}^2+b_1{}^2+c_1{}^2}\sqrt{a_2{}^2+b_2{}^2+c_2{}^2}}$$

4. 정사영과 그 넓이

평면 α 밖의 한 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발 P′을 점 P의 평면 α 위로의 **정사영**이라고 한다.

또, 도형 F의 각 점의 평면 α 위로의 정사영으로 이루어진 도형 F′을 도형 F의 평면 α 위로의 정사영이라고 한다.

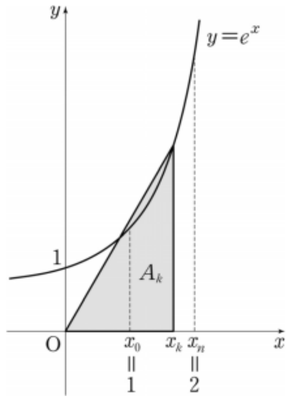


평면 β 위에 있는 도형의 넓이를 S, 이 도형의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S'이라고 할 때, 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

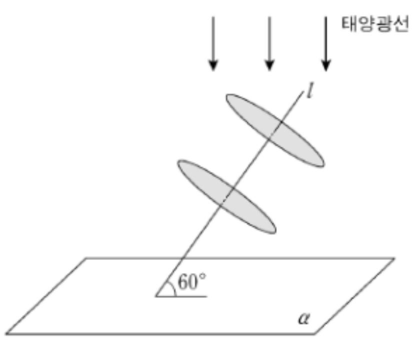
$$S'=S\cos\theta$$

풀어보기

문제 1 함수 $f(x)=e^x$ 이 있다. 2 이상인 자연수 n 에 대하여 닫힌 구간 $[1, 2]$ 를 n 등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례로 $1=x_0$, x_1, x_2, $\cdots$, x_{n-1}, $x_n=2$ 라 하자. 세 점 $(0, 0)$, $(x_k, 0)$, $(x_k, f(x_k))$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 A_k $(k=1, 2, \cdots, n)$ 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}A_k$ 의 값은? (2013년 6월 평가원)



문제 2 그림과 같이 중심 사이의 거리가 $\sqrt{3}$ 이고 반지름의 길이가 1 인 두 원판과 평면 α 가 있다. 각 원판의 중심을 지나는 직선 l 은 두 원판의 면과 각각 수직이고, 평면 α 와 이루는 각의 크기가 60° 이다. 태양광선이 그림과 같이 평면 α 에 수직인 방향으로 비출 때, 두 원판에 의해 평면 α 에 생기는 그림자의 넓이는? (단, 원판의 두께는 무시한다.) (2010년 대수능)



① $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{3}{8}$ ② $\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{1}{8}$

④ $\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{16}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{3}{4}$

읽기자료

2014 서울 ICM과 필즈상

모든 학문의 기초가 되고, 특히 자연과학의 모체가 되는 수학 분야에 대하여는 노벨상이 제정되어 있지 않다. 전하는 말에 의하면 Novel과 같은 시대에 유명한 해석학자 Mittag Leffler가 수학계에 태두로 활동하고 있었다. 그런데 어떤 이유인지는 몰라도 Leffler와는 사이가 매우 좋지 못하였던 모양이다. 이러한 이유로 Novel은 Leffler와 관계된 수학 부문만은 노벨상의 대상에서 제외하고 말았다고 한다.

한편, 캐나다의 수학자 John Charles Field (1863.5.15-1932)는 Toronto대학에서 수학교수로 일생을 마감하였는데, Field는 수학분야에도 이에 상당하는 상을 재정 하겠다는 것이 그의 염원이었다. 그는 1880년에 17세로 Toronto대학을 졸업하고, 미국의 Johns Hoppins대학의 대학원에서도 수학을 전공하였다.

그는 처음 5년간은 파리에서 연구를 하고, 다음에는 독일의 Gotingen대학에서 공부하였는데, 당시의 공책을 살펴보면 일류 수학자인 Pucks, Frobenius, Hensel, Schwarz, Weieerstrass 등의 강의를 듣고 있었음을 알 수 있다. Field의 10년간의 유럽 생활은 극히 검소한 생활로서 아르바이트를 하여 생활을 유지하면서 절약과 근면을 생활의 신조로 삼고, 일생 동안 담배도 피우지 않고 독신으로 청교도적 생활을 계속한 훌륭한 사람이다.

이와 같은 표현을 하고 보면 그는 완고하고 딱딱한 인간으로서 사교성도 없고 남과 잘 접촉 안 하는 편협한 인간같이 생각되나, 사실은 그와는 정반대의 성격의 소유자였다. 자기 자신의 일상생활을 위해서 말하는 바와 같이 검소하고 근면하였지만 이러 한 자신의 생활습관을 타인에까지 강요하는 그런 일은 절대로 하지 않고 남에게 대할 때는 항상 유머러스하고 너그럽고 원만한 인품을 지니고 있었다고 한다. 일상생활은 검소할망정 그는 스포츠를 즐기고 음악에도 많은 취미를 가지고 이를 감상하는 동시에 스스로 바이올린도 연주하는 음악 애호가이기도 했다.

Field교수는 고국에 돌아와 30 여 년간 모교인 토론토 대학에서 연구하면서 국내외적으로 눈부신 활동을 했다. 특히 제 7회 국제수학자 대회가 토론토에서 개최되었을 때, 제 일차 세계대전(1914-1918)의 패전국인 독일의 수학자를 제거하려는 국제수학 연합파와 독일 동정파의 수학자들 사이에 갈등이 심화되었을 때, 수학자들 상호간의 갈등을 해소하고 이 회의를 무난하게 수행해 나간 사람이 바로 Field교수였다.

1928년에는 bologna에서 제 8회 국제 수학자 회의가 열렸다. 교수는 7회 회의에서 회의비, 출판비를 결산한 상당한 금액이 남아 있었으므로 이를 기금으로 하여 수학 분야에

노벨상에 해당하는 상을 제정하기 위하여 자금 조달과 세계수학자의 단합을 위하여 노력하였다. 1932년 제 9회 국제 수학자 회의가 스위스의 쥬리히에서 열릴 때, 그의 제자들이 정식으로 제안하여 만장일치로 채택되었으나 Field교수는 과로로 회의 수 주 전에 죽었으며, 필드는 자기의 전 재산을 이 상의 기금으로 희사하였다. 필드는 상의 의미를 다음과 같이 규정했다. “상의 수여는 이미 이루어진 업적을 기리면서, 동시에 향후 연구를 지속하도록 격려하고 다른 수학자들의 분발을 촉구하는 뜻에서 이루어진다.”

[2014 서울 ICM과 필즈메달]

노벨상은 매년 수상하지만 Field상은 4년에 한번 씩 수여되기 때문에 노벨상보다 4배의 가치가 있으며, 노벨상에는 연령의 제한이 없지만 이 상은 40세 미만인 젊은 수학자만이 자격이 있기 때문에 노벨상보다 우위에 있다고 볼 수 있다.

첫 번째 Field 메달은 1936년(제1회) V. Athfors 교수(핀란드), J. Douglas 교수(미국)이었다. Field 메달 수상자 중에는 동양에서는 일본인 3명(코다리아 쿠니히코(1954), 히로나카 헤이스케(1970), 모리시게 후미(1990)이 있고, 중국계 2명(야우싱통(1982), 테린스 타오, 2006), 베트남 1명(응오바우쩌우, 2010)이 있다.

여러 수학자들의 노력으로 드디어 올해 8월에 서울에서 국제수학자대회(ICM)가 열릴 예정이다. 개회 첫 날 Field상을 수상하게 되는데, 조심스럽지만 여기서 사상 최초로 우리나라에서 영광의 수상자가 나오길 기대해본다.

예시답안

풀어보기

문제 1

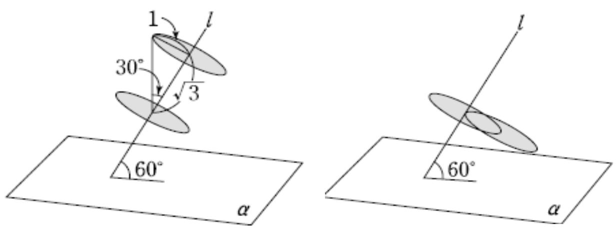
$x_k = 1 + \frac{k}{n}$ 따라서, 넓이 $A_k = \frac{1}{2}\left(1+\frac{k}{n}\right)f\left(1+\frac{k}{n}\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}A_k = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(1+\frac{k}{n}\right)f\left(1+\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)f\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

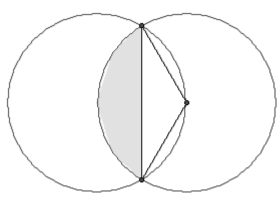
$$= \frac{1}{2}\int_1^2 xf(x)dx = \frac{1}{2}\int_1^2 xe^x dx = \frac{1}{2}\left\{[xe^x]_1^2 - \int_1^2 e^x dx\right\} = \frac{1}{2}e^2$$

문제 2

그림의 원판을 태양광선 방향으로 평행 이동하여 만나게 하면 위 원판이 아래 원판의 중심을 지난다.



겹친 원판의 넓이 S는 아래 그림에서 색칠한 부분의 넓이를 S_1이라 하면



$S = 2\times\pi\times1^2 - 2S_1$ 이다. S_1 은 중심각이 $\frac{2}{3}\pi$ 인 활꼴이므로

$$S_1 = \frac{1}{2}\times1^2\times\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\times1^2\times\sin\frac{2}{3}\pi = \frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

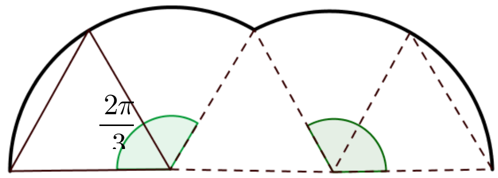
$$\therefore S = 2\pi - \frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

그런데 구하는 그림자의 넓이 S' 은 평면과 이루는 각이 $\frac{\pi}{6}$ 인 정사영이므로

$$S' = \left(\frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\cos\frac{\pi}{6} = \left(\frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi + \frac{3}{4}$$

논제 a

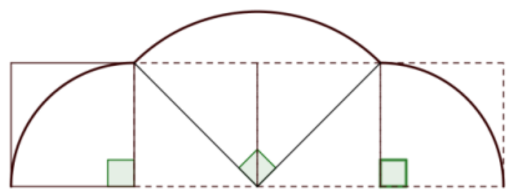
둘레의 길이가 1 인 정삼각형을 한 바퀴 굴렸을 때 점 A 가 이동한 거리는 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 $\frac{1}{3}$ 이고 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$ 인 부채꼴의 호의 길이의 2 배와 같다.



따라서 점 A 가 이동한 거리는 $\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\pi\times 2=\frac{4}{9}\pi$ 이다.

논제 b

제시문 (나)에서 둘레의 길이가 1 인 정사각형을 한 바퀴 굴렸을 때 점 A 가 이동한 거리는 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 $\frac{1}{4}$ 이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴의 호의 길이의 2배와 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴의 호의 길이와의 합이다.



따라서 점 A 가 이동한 거리는 $\frac{1}{4}\times\frac{\pi}{2}\times 2+\frac{\sqrt{2}}{4}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{8}\pi=\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{2}}{8}\right)\pi$

논제 c

둘레가 1 인 정 n 각형의 외접원의 반지름을 r 이라 하면

$$\overline{\mathrm{A_kA_n}}=2r\sin\frac{k\pi}{n}\quad\cdots①$$

이다. 그리고 코사인 제2 법칙에 의하면

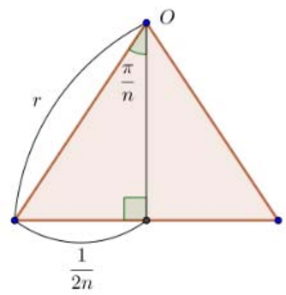
$$\frac{1}{n^2}=r^2+r^2-2r\cdot r\cos\frac{2\pi}{n}=2r^2\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)=4r^2\sin^2\frac{\pi}{n}\quad(\because 1-\cos 2\theta=2\sin^2\theta)$$

이므로 $r=\dfrac{1}{2n\sin\frac{\pi}{n}}$ 이고 이것을 ①식에 대입하면

$$\therefore\ \overline{\mathrm{A_kA_n}}=2r\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n\sin\frac{\pi}{n}}\quad(k=1,2,\cdots,n-1)$$

다른 풀이

둘레의 길이가 1인 정n각형의 한 변의 길이는 $\dfrac{1}{n}$ 이고, 이 정n각형에 외접하는 원의 반지름의 길이를 r 이라고 하면 아래 그림에서



$\sin\dfrac{\pi}{n}=\dfrac{\frac{1}{2n}}{r}$ 이므로 외접원의 반지름은 $r=\dfrac{1}{2n}\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{n}}$ 이다.

이 때, 일반성을 잃지 않고 원의 중심을 좌표평면위의 원점에 두고, 점A_n을 x축의 양의방향 위에 오도록 두면 점A_n의 좌표는 $\mathrm{A}_n(r,0)$ 이고 점$\mathrm{A}_k(k=1,2,\cdots,n-1)$의 좌표는

$\mathrm{A}_k\left(r\cos\dfrac{2k\pi}{n},r\sin\dfrac{2k\pi}{n}\right)$ 이다.

따라서

$$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_k}=\sqrt{\left(r-r\cos\frac{2k\pi}{n}\right)^2+r^2\sin^2\frac{2k\pi}{n}}=\sqrt{2r^2\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}\right)}=\sqrt{2r^2\times 2\sin^2\frac{k\pi}{n}}$$

$$=2r\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n\sin\frac{\pi}{n}}\quad\left(\because r=\frac{1}{2n\sin\frac{\pi}{n}}\right)$$

논제 d

논제 (a), (b)를 통해 유추해보면 정n각형을 직선 위에서 한 바퀴 굴렸을 때, 한 점A가 이동한 거리는 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(\overline{\mathrm{A_kA_n}}\times \text{한 외각의 크기})$이다. 따라서

$$d(n)=\sum_{k=1}^{n-1}\overline{\mathrm{A_kA_n}}\times\frac{2\pi}{n}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n\sin\frac{\pi}{n}}\times\frac{2\pi}{n}=\frac{2\pi}{n^2\sin\frac{\pi}{n}}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\ \cdots②$$

이다. 그러므로

$$\lim_{n\to\infty} d(n)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\pi}{n^2\sin\frac{\pi}{n}}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k}{n}\pi=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}\times\frac{1}{\pi}}}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k}{n}\pi$$

$$=\frac{2}{\pi}\times\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\frac{2}{\pi}\times[-\cos x]_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\times 2=\frac{4}{\pi}$$

이다.

다른 풀이

$S=\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k}{n}\pi$ 의 값을 요구하는 경우

$$\begin{aligned}2\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\cdot S &=2\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\left\{\sin\left(\frac{1}{n}\pi\right)+\sin\left(\frac{2}{n}\pi\right)+\cdots+\sin\left(\frac{n-1}{n}\pi\right)\right\}\\ &=\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2n}-\frac{\pi}{n}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{\pi}{n}\right)\right\}+\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2n}-\frac{2\pi}{n}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{2\pi}{n}\right)\right\}+\cdots\\ &\quad+\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2n}-\frac{(n-1)\pi}{n}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\right\}\\ &=\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)-\cos\left(\frac{2n-1}{2n}\pi\right)\end{aligned}$$

이므로

$$S=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)-\cos\left(\frac{2n-1}{2n}\pi\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

이다. 이 식을 ②에 대입하여 정리하면

$$d(n)=\frac{2\pi}{n^2\sin\frac{\pi}{n}}\times\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)-\cos\left(\frac{2n-1}{2n}\pi\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

이고

$$\lim_{n\to\infty} d(n)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}}\times\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)-\cos\left(\frac{2n-1}{2n}\pi\right)}{\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}}\times\frac{1}{\pi}=2\times 2\times\frac{1}{\pi}=\frac{4}{\pi}$$

이다.

논제 e

$\overrightarrow{OB}=(3,0,3)$, $\overrightarrow{AB}=(-1,-4,1)$ 이므로 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AB}=-3+0+3=0$ 이다.

$$\therefore \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AB}=0$$

즉, $\overrightarrow{OB}$ 와 $\overrightarrow{AB}$ 는 수직이다.

$\theta=2\pi$ 인 경우에 호 AB 가 지나간 부분의 넓이 $S(\theta)$ 는 반지름의 길이가 $\overline{OA}$ 인 원의 넓이에서 $\overline{OB}$ 인 원의 넓이를 뺀 값과 같다. 여기서

$$\overline{OA}=\sqrt{4+16+16}=\sqrt{36}=6 \text{ 이고 } \overline{OB}=\sqrt{9+0+9}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

이므로

$$S(2\pi)=\pi(36-18)=18\pi$$

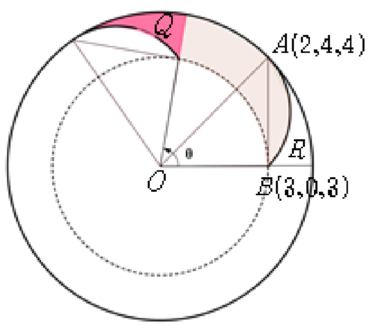
이다.

논제 f

아래 그림에서 활꼴 Q의 넓이(검은색)가 활꼴 R의 넓이(흰색)와 같으므로 구하려는 넓이는 반지름이 $\overline{OA}=6$ 이고 중심각이 θ 인 부채꼴의 넓이

$$f(\theta)=\frac{36\theta}{2}-\frac{18\theta}{2}=9\theta$$

이다.



평면 S의 법선벡터를 $\vec{n}=(l,m,n)$ 이라하면 $2l+4m+4n=0$, $3l+3n=0$ 에서

$$\vec{n}=(l,m,n)=(-2,-1,2)$$

가 된다. 또 이 변환에 의해 점 A 는 점 $A'(2,4,8)$, 점 B 는 점 $B'(3,0,6)$로 옮겨가고 S' 는 세 점 O, $(2,4,8)$, $(3,0,6)$ 을 지나는 평면위에 있으므로 그 법선벡터는 $\overrightarrow{n_1}=(-2,-1,1)$ 이다. 여기서 평면 xy 와 평면 S, S' 가 이루는 각을 각각 α, β 라 하면

$$\cos\alpha=\frac{2}{3},\quad \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

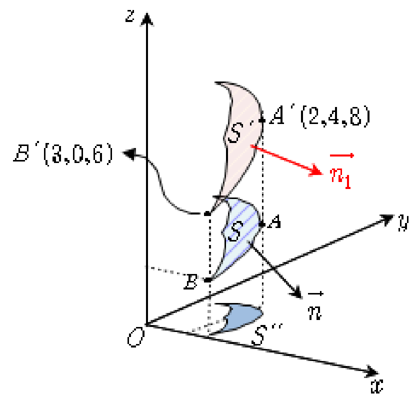
이다. S를 xy 평면에 정사영시킨 도형을 S'' 라 하면

$$S''=S\cos\alpha=6\theta$$

이므로 $S''=S'\cos\beta$ 에서 $S'=6\sqrt{6}\,\theta$ 가 된다. 따라서 S' 의 넓이 $g(\theta)$는

$$g(\theta)=6\sqrt{6}\,\theta$$

이다.



다른 풀이

영역 S 위의 세 점 O, A$(2,4,4)$, B$(3,0,3)$ 의 대응점은 O, A$'(2,4,8)$, B$(3,0,6)$ 이고 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ 이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ 이다.

그러므로 두 벡터 $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}$, $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}$ 로 결정되는 정사각형은 평면 S 위의 단위 정사각형이다.

또한, 두 벡터 $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}$, $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}$ 에 대응하는 평면 S' 상의 벡터를 각각 $\vec{p}$, $\vec{q}$ 라고 하면

$$\vec{p}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,2),\quad \vec{q}=\frac{1}{3\sqrt{2}}(1,-4,-2)$$

이고 그 두 벡터로 결정되는 평행사변형의 넓이는

$$\sqrt{(|\vec{p}||\vec{q}|)^2-(\vec{p}\cdot\vec{q})^2}=\sqrt{\frac{5}{2}\cdot\frac{21}{18}-\left(-\frac{3}{6}\right)^2}=\frac{4}{\sqrt{6}}$$

따라서

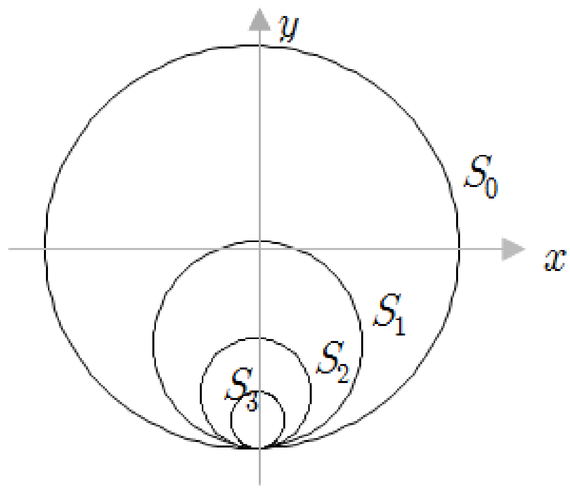
$$g(\theta)=9\theta\times\frac{4}{\sqrt{6}}=6\sqrt{6}\,\theta$$

이다.

7 단국대학교 모의

제시문 I 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.*

그림과 같이 반지름이 1 이고 중심이 원점인 원 S_0 와 아래 (a)와 (b)를 만족시키는 n 개의 원 S_1, S_2, $\cdots$, S_n 가 있다.



(a) S_k 의 반지름은 S_{k-1} 의 반지름의 $\dfrac{1}{r}$ 배이다.

(b) S_k 는 모두 점 $(0,\ -1)$ 에서 S_0 에 내접한다. $(r \neq 0,\ k=1,\ \cdots, n)$

다음 [규칙]에 따라 S_1, S_2, $\cdots$, S_n 을 이동시키자.

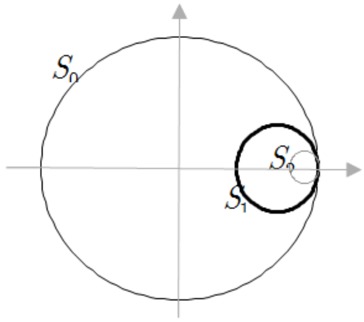
> [1 단계] S_1 을 S_0 의 원주를 따라 시계반대방향으로 한 바퀴 회전시켜 고정한다.
> [2 단계] S_2 을 고정된 S_1 의 원주를 따라 시계반대방향으로 한 바퀴 회전시켜 고정한다.
> $\vdots$
> [n 단계] S_n 을 고정된 S_{n-1} 의 원주를 따라 시계반대방향으로 한 바퀴 회전시킨다.

예를 들어, $r=2$ 이고 $n=3$ 일 때, S_3 를 [규칙]에 따라 회전시킨 원의 중심의 좌표는 $(0, \dfrac{3}{8})$ 이다.

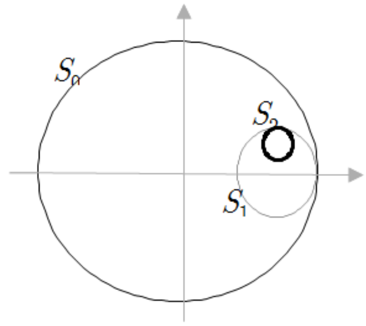
또한 $r=4$, $n=2$ 인 경우를 그림으로 나타내면 다음과 같다.

---

* 단국대학교 입학처



[1단계]



[2단계]

좌표평면에서 점이나 도형의 변환은 행렬을 이용하면 간단히 표현할 수 있다.
특히, 점 (a, b)를 원점을 중심으로 θ 만큼 회전이동한 점이 (p, q) 일 때, 다음이 성립한다.

(*) $$\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

[규칙]에 따라 $S_k(k=1, 2, \cdots, n)$를 회전시킨 원의 중심을 $C_k(p_k, q_k)$ 라 하자.

논제 I-1

$r=2$ 일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} d_n$ 의 값을 구하시오. (단, d_n 은 점 C_n 과 원점 사이의 거리이다)(15점)

논제 I-2

$r=4$ 일 때, $\begin{bmatrix} p_n \\ q_n \end{bmatrix}$ 과 $\begin{bmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \end{bmatrix}$ 의 사이의 관계를

$$\begin{bmatrix} p_n \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

로 나타낼 때, 2×2 행렬 B를 구하고 그 과정을 서술하시오.(20점)

제시문 Ⅱ **다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.***

곡선의 접선은 접점 근방에서 곡선을 이해하는데 매우 유용하다. 접점에 가까운 곳에서는 곡선과 접선은 근사적으로 일치하는 것으로 볼 수 있기 때문에, 접선은 곡선에 대한 문제를 해결하는 효과적인 도구로 활용될 수 있다. 따라서 곡선이 주어졌을 때 주어진 조건을 만족시키는 접선 또는 접점을 찾는 것은 매우 중요한 과정이라 할 수 있다.
예를 들면 주어진 함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$를 구하기 어려울 경우, 역함수가 나타내는 곡선의 접선을 구하여 역함수를 이해하는데 활용할 수 있다.

(가) 함수 $f(x)=x^3+3x+2$라 하자. 곡선 $y=f(x)$의 접선 l과 $y=f^{-1}(x)$의 접선 m이 아래의 조건 (a), (b)를 만족시킨다.

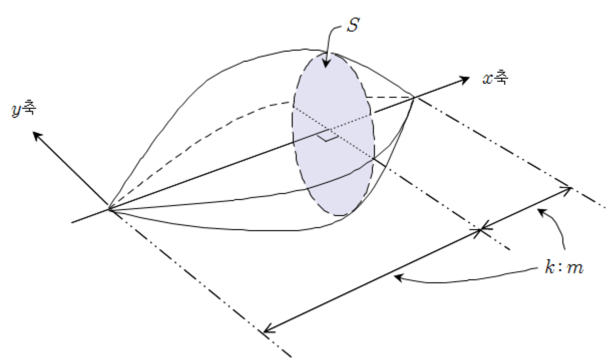
(a) l과 m은 $y=x$에 대칭이다.
(b) l과 m은 원점에서 만난다.

회전체의 회전축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 알고 있다면, 회전축을 포함하는 평면으로 자른 단면의 넓이도 알 수 있다.

(나) 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=1$로 둘러싸인 도형을 x축 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체가 아래의 조건 (c)를 만족시킨다.

(c) 모든 자연수 k, m에 대하여 구간 $[0, 1]$을 $k : m$의 비율로 내분하는 점을 지나고 x축에 수직인 평면과 회전체가 만나서 생기는 도형 S의 넓이는 $\dfrac{k^2m^2}{(k+m)^4}$이다.

조건 (c)를 이용하면 회전체의 부피를 비롯하여 함수 $f(x)$에 대한 정보를 얻을 수 있다.



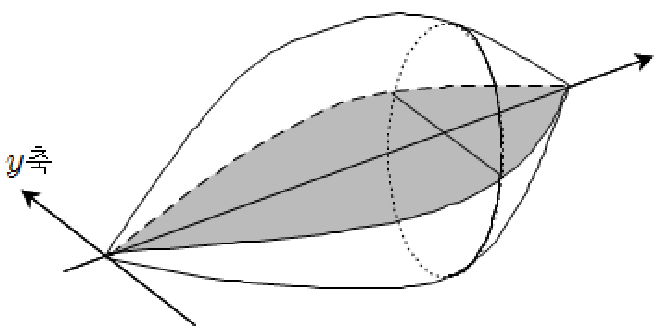
* 단국대학교 입학처

논제 Ⅱ-1

(가)에서 제시된 m 과 곡선 $y=f^{-1}(x)$ 의 접점의 좌표를 구하고, m 의 방정식을 구하시오. (15점)

논제 Ⅱ-2

조건 (c)와 구분구적법을 이용하여, x 축을 포함하는 평면과 (나)에서 제시된 회전체가 만나서 생기는 도형(아래 그림의 어두운 부분)의 넓이를 구하고 그 과정을 설명하시오. (20점)



논술유형분석

문항 수	수학 2문항, 과학(화학) 1문항(총 3문항)	**시간**	120분
연관 개념	무한등비급수, 행렬의 일차변환, 역함수의 미분법, 곡선의 접선, 회전체의 부피, 구분구적법		

제시문분석

제시문 Ⅰ

주어진 규칙에 따른 도형의 변환을 이해하고 주어진 예를 통해 구체적으로 상황을 적용시켜 보도록 하고 있다. 또한 회전변환의 행렬을 정의해 줌으로써 [논제2]를 풀이하기 위한 아이디어를 제공하고 있다.

제시문 Ⅱ

곡선을 이해하는 효과적인 도구로서의 접선을 제시하고, 이를 통해 주어진 함수의 역함수를 이해하는 데 접선이 활용될 수 있음을 제시하고 있다. 또한 회전체의 회전축에 수직인 평면으로 자른 단면이 원이므로 반지름을 함숫값으로 연관 지어 회전축을 포함하는 평면으로 자른 단면의 넓이를 구할 수 있음을 제시하고 있다.

논제분석

논제 I-1

$r=2$ 일 때, 원점과 원의 중심 사이의 거리의 극한값을 계산하도록 하고 있다. 주어진 규칙에 따라 중심의 좌표를 구해보면 쉽게 무한등비급수의 합으로 표현되어 짐을 알 수 있다.

논제 I-2

회전이동과 평행이동을 통하여 변환되는 좌표간의 관계를 이해하고 이를 나타내는 변환행렬을 구하도록 하고 있다. 회전변환의 경우 회전의 중심이 원점이므로 평행이동을 통해 변환의 중심을 원점으로 옮겨야 함을 이해하고 이를 행렬로 표현할 수 있어야 할 것이다. 또한 반지름의 길이가 $\frac{1}{r}$ 배씩 변하는 것에서 닮음변환에 대한 생각을 한다면 훨씬 수월하게 변환행렬 B를 구할 수 있을 것이다.

논제 Ⅱ-1

역함수의 미분법을 통하여 접점의 좌표를 구하고, 접선의 방정식을 구하도록 하고 있다.

논제 Ⅱ-2

x 축을 포함하는 평면과 (나)에서 제시된 회전체가 만나서 생기는 도형의 넓이는 (곡선 $y=f(x)$ 와 x 축, $x=0$, $x=1$ 로 둘러싸인 영역의 넓이)×2 이므로, 조건 (c)에서 주어진 도형 S(원)의 넓이에서 얻어지는 반지름의 길이와 함숫값 $f(x)$ 가 같음을 이용하여 구분구적법을 사용하면 된다.

배경지식쌓기

1. 무한등비급수

첫째항이 a , 공비가 r 인 무한등비수열 $\{ar^{n-1}\}$ 의 각 항의 합으로 이루어진 무한급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots \quad \cdots\cdots ①$$

을 첫째항이 a , 공비가 r 인 **무한등비급수**라고 한다.

이제 $a \neq 0$ 일 때, 무한등비급수 ①의 수렴, 발산에 대하여 알아보자.

무한등비급수 ①의 제 n 항까지의 부분합 S_n 은

$r \neq 1$ 이면 $\qquad S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

$r=1$ 이면 $\qquad S_n = a+a+\cdots+a = na$

이다. 따라서 무한등비급수 ①은 r 의 값에 따라 다음과 같이 수렴하거나 발산한다.

❶ $|r|<1$ 일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

따라서 무한등비급수 ①은 수렴하고, 그 합은 $\frac{a}{1-r}$ 이다.

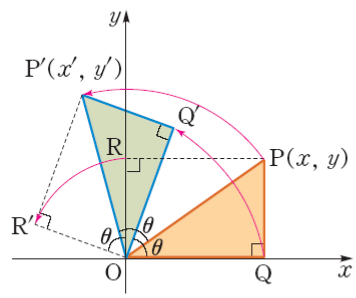
❷ $|r|\ge 1$ 일 때, $\lim_{n\to\infty} ar^{n-1} \ne 0$ 이므로 무한등비급수 ①은 발산한다.

2. 회전변환

오른쪽 그림과 같이 두 점 $\mathrm{Q}(x,\ 0)$, $\mathrm{R}(0,\ y)$ 를 원점을 중심으로 각 θ 만큼 회전한 점을 각각 Q', R' 이라고 하면

$$\mathrm{Q}'(x\cos\theta,\ x\sin\theta)$$
$$\mathrm{R}'\left(y\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right),\ y\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right)$$

즉 $\mathrm{R}'(-y\sin\theta,\ y\cos\theta)$ 이다. 이때 직사각형 $\mathrm{OQ'P'R'}$ 에서 두 대각선 $\overline{\mathrm{OP'}}$, $\overline{\mathrm{Q'R'}}$ 의 중점이 일치하므로



$$\frac{x'}{2} = \frac{x\cos\theta - y\sin\theta}{2},\quad \frac{y'}{2} = \frac{x\sin\theta + y\cos\theta}{2}$$

이다. 따라서 다음이 성립한다.

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

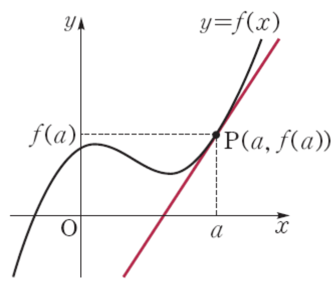
이것을 행렬을 이용하여 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

이와 같이 좌표평면 위의 점을 원점을 중심으로 각 θ 만큼 회전하여 옮기는 일차변환을 **회전변환**이라고 한다.

3. 접선의 방정식

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ 에서의 접선의 기울기는 $x=a$ 에서의 미분계수 $f'(a)$ 와 같다.



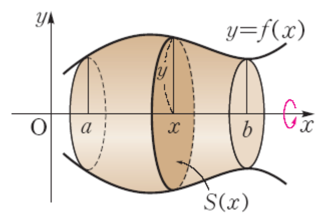
즉 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P 에서의 접선은 점 $(a,\ f(a))$ 를 지나고 기울기가 $f'(a)$ 인 직선이다.

따라서 접선의 방정식은

$$y-f(a) = f'(a)(x-a) \quad \text{이다.}$$

4. 회전체의 부피

닫힌구간 $[a,\ b]$에서 곡선 $y=f(x)$를 x축을 회전축으로 하여 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피 V를 구하여 보자.



오른쪽 그림과 같이 좌표가 x인 점을 지나 x축에 수직인 평면으로 회전체를 자르면, 단면은 반지름의 길이가 $|f(x)|$인 원이므로 그 넓이 $S(x)$는

$$S(x)=\pi\{f(x)\}^2$$

이다. 따라서 구하는 회전체의 부피 V는 다음과 같다.

$$V=\pi\int_a^b\{f(x)\}^2dx$$

풀어보기

문제 1

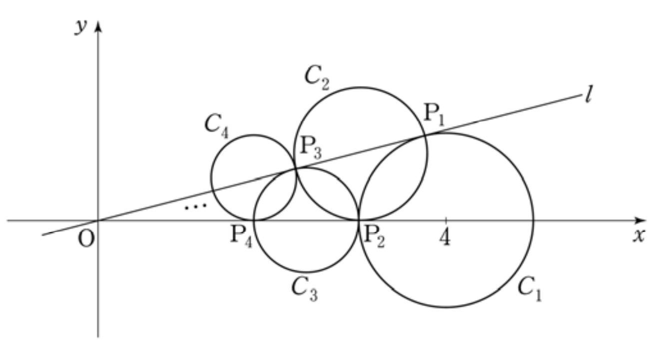
좌표평면에 원 C_1 : $(x-4)^2+y^2=1$이 있다. 그림과 같이 원점에서 원 C_1에 기울기가 양수인 접선 l을 그었을 때 생기는 접점을 P_1이라 하자. 중심이 직선 l 위에 있고 점 P_1을 지나며 x축에 접하는 원을 C_2라 하고 이 원과 x축의 접점을 P_2라 하자.

중심이 x축 위에 있고 점 P_2를 지나며 직선 l에 접하는 원을 C_3이라 하고 이 원과 직선 l의 접점을 P_3이라 하자.

중심이 직선 l 위에 있고 점 P_3을 지나며 x축에 접하는 원을 C_4라 하고 이 원과 x축의 접점을 P_4라 하자.

이와 같은 과정을 계속할 때, 원 C_n의 넓이를 S_n이라 하자.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n$의 값은? (단, 원 C_{n+1}의 반지름의 길이는 원 C_n의 반지름의 길이보다 작다.) (2009년 대수능)



① $\dfrac{3}{2}\pi$　　② 2π　　③ $\dfrac{5}{2}\pi$　　④ 3π　　⑤ $\dfrac{7}{2}\pi$

문제 2

제 1 사분면 위의 점 $P_0(x_0,\ y_0)$ 이 주어졌을 때, 자연수 n 에 대하여 점 $P_n(x_n,\ y_n)$ 을 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{pmatrix} x_{2n-1} \\ y_{2n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{2n-2} \\ y_{2n-2} \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x_{2n} \\ y_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{2n-1} \\ y_{2n-1} \end{pmatrix}$$

이때, 점 P_{2003} 의 좌표는? (2003년 대수능)

① $(x_0,\ y_0)$ ② $(x_0,\ -y_0)$ ③ $\left(\dfrac{x_0-y_0}{\sqrt{2}},\ \dfrac{x_0+y_0}{\sqrt{2}}\right)$

④ $\left(\dfrac{x_0+y_0}{\sqrt{2}},\ \dfrac{x_0-y_0}{\sqrt{2}}\right)$ ⑤ $\left(\dfrac{x_0+y_0}{\sqrt{2}},\ \dfrac{-x_0+y_0}{\sqrt{2}}\right)$

문제 3

최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

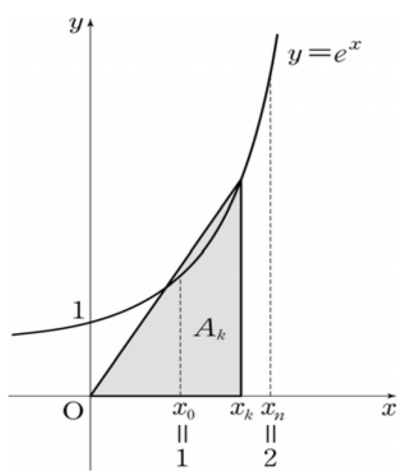
> (가) $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $g'(x) \le \dfrac{1}{3}$ 이다.
>
> (나) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{f(x)-g(x)}{(x-3)g(x)} = \frac{8}{9}$

$f(1)$ 의 값은? (2012년 9월 평가원)

① -11 ② -9 ③ -7 ④ -5 ⑤ -3

문제 4

함수 $f(x)=e^x$ 이 있다. 2 이상인 자연수 n 에 대하여 닫힌 구간 $[1,\ 2]$ 를 n 등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례로 $1=x_0$, x_1, x_2, $\cdots$, x_{n-1}, $x_n=2$ 라 하자. 세 점 $(0,0)$, $(x_k,0)$, $(x_k, f(x_k))$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 A_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 이라 할 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} A_k$ 의 값은? (2013년 6월 학평)



① $\dfrac{1}{2}e^2-e$

② $\dfrac{1}{2}(e^2-e)$

③ $\dfrac{1}{2}e^2$

④ e^2-e

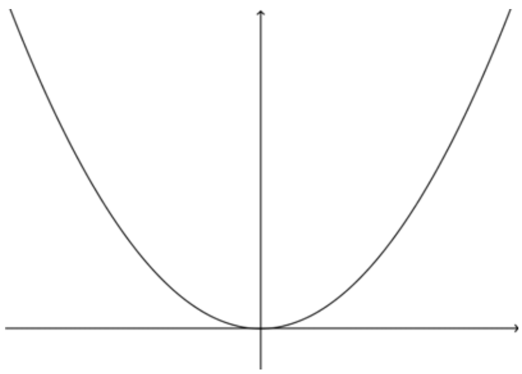
⑤ $e^2-\dfrac{1}{2}e$

읽기자료

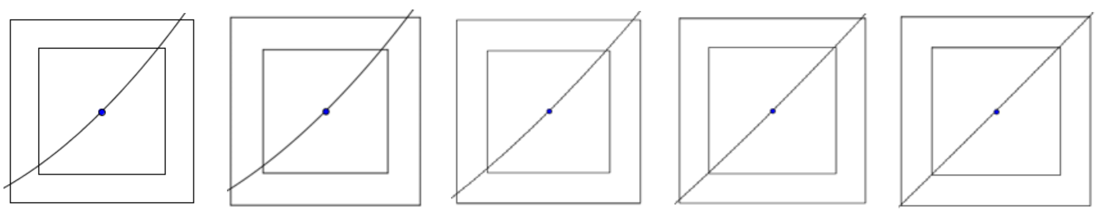
1. 미분*

함수의 그래프를 보면, 부드럽게 굽어보이는 그래프가 많다. 사인 함수를 비롯한 삼각함수도 그렇고, 지수함수, 로그함수, 무리함수, 유리함수, 다항함수까지 보통 접하는 함수의 그래프는 대개 쭉 뻗은 직선이기보다는 부드러운 곡선이다. 그런데 이런 곡선 위의 점을 하나 골라 그 주위를 확대해보면 의외의 세상을 만나는 수가 있다.

2. 곡선과 가장 가까운 직선-접선



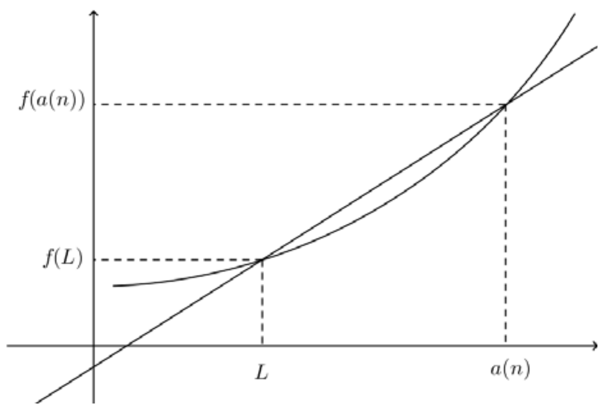
직선이 아닌 곡선 중 가장 간단한 것은 2차 함수의 그래프다. 그 중 가장 간단한 $f(x)=x^2$ 의 그래프를 생각해 보자. 얼마나 간단한지, 대개 중고등학교 시절을 거치면서 무수히 그리는 경험을 한다. 이런 모양의 곡선을 포물선이라고 부르는데, 북한에서는 팔매선이라 부른다고 한다. 돌팔매질을 하면 돌이 그리는 자취가 2 차 곡선의 모양이기 때문이다. 삼각함수나, 3 차 함수 등이 아니고 하필 2 차 곡선이어야 하는 이유도 미분과 적분으로 (공기 저항 등을 무시할 경우, 물리 법칙을 써서) 설명할 수 있는데, 그 얘기는 다음으로 미루고 여기서는 이 곡선을 확대해 보는 데 집중하기로 하자.
예를 들어 $x=0.5$ 를 제곱하면 0.25 이다. 따라서 점 $(0.5, 0.25)$ 는 곡선 위에 있다. 이제 이 점을 중심으로 그래프를 일정 비율로 확대해 보자. 돋보기 들고, 컴퓨터 화면 확대해야겠다는 순진한 분은 없으리라 믿겠다. 예를 들어 2 배, 4 배, 8 배, 16 배, 32 배 확대하면 아래 그림을 얻는다. 각 그림에서 가운데에 그린 네모를 가로, 세로 각각 두 배씩 확대하면 다음 그림이 나오도록 하였다. 점점 확대할수록 기울기가 1 인 직선에 가까워지는 느낌을 받았는가?



$1/2 \pm 1/2$ $1/2 \pm 1/4$ $1/2 \pm 1/8$ $1/2 \pm 1/16$ $1/2 \pm 1/32$

3. 평균 변화율과 순간 변화율

이처럼 어떤 점 $(\mathrm{L}, f(\mathrm{L}))$ 을 중심으로 하여 확대하면 할수록 그래프가 어떤 고정된 직선에 가까워지는 경우, (단, y축과 나란한 직선은 제외한다) $x=\mathrm{L}$ 에서 '미분 가능하다'고 말하고, 그 고정된 직선을 접선이라 부른다. 즉, 미분 가능한 점 $(\mathrm{L}, f(\mathrm{L}))$ 에서의 접선은 그 점 근방에서 곡선과 가장 가까운 직선으로 이해할 수 있다. 그런데 이 접선은 어떻게 구할까? 이미 접선이 지나는 점 $(\mathrm{L}, f(\mathrm{L}))$ 을 알고 있으므로, 기울기만 구하면 된다.



위 그림은 미분 가능한 점 $(\mathrm{L}, f(\mathrm{L}))$ 을 중심으로 하여 상당히 확대한 그림이라고 하자. 곡선 위의 점 $(a(n), f(a(n)))$ 은 $(\mathrm{L}, f(\mathrm{L}))$ 과 멀어 보이지만, 엄청나게 확대한 그림이라면 실은 꽤 가까운 점이다. 이때 미분 가능하다고 했으므로, 이 두 점을 잇는 직선과, 함수의 그래프가 대단히 가깝다고 가정하고 있다. 두 점을 잇는 직선의 기울기는 y 의 변화량 $f(a(n))-f(\mathrm{L})$ 을 x 의 변화량 $a(n)-\mathrm{L}$ 로 나눈 값인

$$\frac{f(a(n))-f(L)}{a(n)-L}$$

인데, 이 값을 두 점 $(\mathrm{L}, f(\mathrm{L}))$, $(a(n), f(a(n)))$ 의 평균 변화율이라 부른다. 구하고자 하는 접선의 기울기는 $a(n)$ 이 대단히 L 에 가까울 때, 평균 변화율이 가까워지는 극한값이어야 할 것이다. 이 극한값을 L 에서의 '순간 변화율'이라 부르는데, 다만 $a(n)$ 이 L 인 경우는 애초부터 기울기를 생각할 수 없으므로 제외해야 한다. 예를 들어 $f(x)=x^2$ 인 경우를 보자. $a(n)$ 이 L 로 다가갈 때, 다음 극한을 생각하자는 얘기다. (다시 말하지만, $a(n)$)은 L 이 아니다.)

$$\frac{f(a(n))-f(L)}{a(n)-L} = \frac{a(n)^2-L^2}{a(n)-L} = a(n)+L$$

이고, $a(n)$ 이 L 로 수렴한다고 했으므로, 극한값의 성질에 의해 이 값은 당연히 $2\mathrm{L}$ 로 수렴한다. 따라서 $x=\mathrm{L}$ 에서의 순간 변화율은 $2\mathrm{L}$ 이다. $\mathrm{L}=\frac{1}{2}$ 인 경우 위에서 그래프를

확대하며 짐작했던 것이 맞았음을 확인할 수 있다.

4. 함수의 극한과 미분 계수

일반적으로 $a(n)$ 자체는 L 을 값으로 갖지 않으면서도 L 로 수렴하는 모든 수열 $a(n)$ 에 대해 $g(a(n))$ 이 동일한 값 M 으로 수렴할 경우, 다음과 같이 쓴다.

$$\lim_{x \to L} g(x) = M$$

이런 표기를 쓰면 이제부터는 (적어도 표면적으로는) 수열을 동원하지 않고, 함수의 극한을 얘기할 수 있다. 어쨌거나

$$\lim_{x \to L} \frac{f(x) - f(L)}{x - L}$$

의 극한값이 존재하면 그 값이 $(\mathrm{L}, f(\mathrm{L}))$ 에서의 접선의 기울기라는 얘기인데, 이 값을 $f'(\mathrm{L})$ 이라 쓰고 'L 에서의 함수 f 의 미분계수'라 부른다. 특히 $x = \mathrm{L}$ 에서의 접선의 방정식은 다음과 같다.

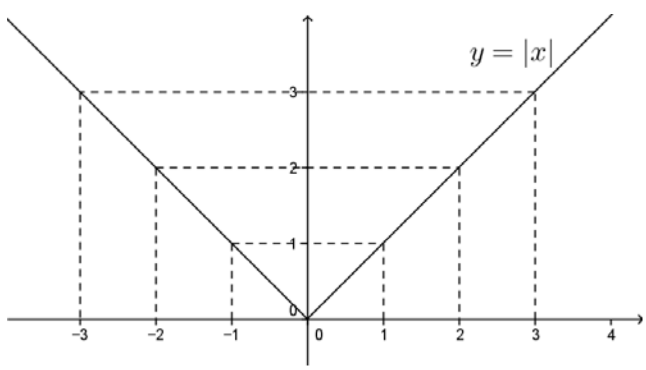
$$y = f(L) + f'(L)(x - L)$$

예를 들어 $f(x) = x^2$ 인 경우 모든 L 에 대해 $f'(\mathrm{L}) = 2\mathrm{L}$ 임을 보였으니, $x = 1$ 에서의 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y = 1^2 + 2(x-1)\text{ , 즉, } y = 2x - 1$$

5. 항상 미분이 가능한 건 아니다

하지만 모든 함수가 미분 가능한 건 아니다. 예를 들어 그래프가 $x = \mathrm{L}$ 에서 끊어져 있는 경우, 확대하면 직선처럼 보일 턱이 없다. 직선은 이어져 있기 때문이다. '간단히 말해 미분 가능하면 연속'이라 해서 속칭 '간미연'으로 부르는 정리인데 말로 풀어 쓰지 않고도, 수식으로 한 줄이면 증명할 수 있다. 한편 연속이더라도 미분 불가능한 경우는 많다. 예를 들어 x 에 대해 절댓값을 대응하는 함수 $f(x) = |x|$ 를 생각해 보자. 이 함수의 그래프는 $x = 0$ 주변에서 제 아무리 확대해도 직선처럼 보이지 않는다. 아무리 확대해도 그 모양 그대로다. 따라서 $x = 0$ 에서 미분할 수 없다는 얘기다.



6. 접선의 의미 - 상대 오차!

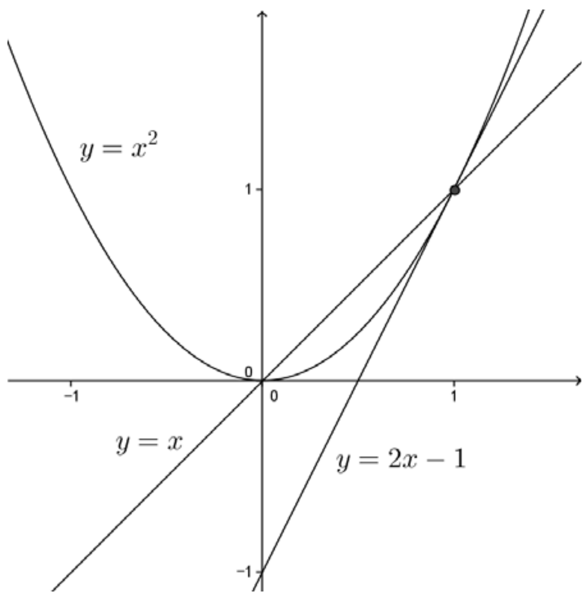
흔히 접선은 그 점 근방에서 곡선과 가장 가까운 직선이라고 말한다. 특히, x 가 L 근처의 값에 가까울수록, 함숫값 $f(x)$ 와, 접선에서의 값 $f(\mathrm{L})+f'(\mathrm{L})(x-\mathrm{L})$ 과 가깝다. 예를 들어 보자. $f(x)=x^2$ 일 때, $x=1$ 에서 접선은 $y=2x-1$ 이었다. 따라서 x 가 1 근처의 수일 때 함숫값 x^2 과 접선에서의 값 $2x-1$ 의 값은 가깝다. 아래에 표를 참고해보자.

x	x^2	$2x-1$	x^2 과 $2x-1$ 의 차
1.1	1.21	1.2	0.01
1.01	1.0201	1.02	0.0001
1.001	1.002001	1.002	0.000001
1.0001	1.00020001	1.0002	0.00000001
1.00001	1.0000200001	1.00002	0.0000000001

예상한대로 x 가 1 에 가까울수록, 함숫값 $f(x)$ 와 접선에서의 값이 비슷해진다. 하지만 이렇게 이해하고만 그치면, 접선의 진정한 의미를 놓치는 수가 있다. $(1,1)$ 을 지나지만 기울기가 미분계수 2 가 아니라 다른 값인 경우를 생각해 보자. 예를 들어 기울기를 1 로 바꾼 직선 $y=x$ 에 대해 오차를 셈한 표는 아래와 같다.

x	x^2	x	x^2 과 x 의 차
1.1	1.21	1.1	0.11
1.01	1.0201	1.01	0.0101
1.001	1.002001	1.001	0.001001
1.0001	1.00020001	1.0001	0.00010001
1.00001	1.0000200001	1.00001	0.0000100001

이 경우에도 접선이었던 경우보다 오차가 크긴 하지만, x 가 1 에 가까울수록 오차 자체는 0 에 가까워지지 않은가? 사실 다른 기울기를 아무 거나 가져오더라도 동일한 현상을 발견할 수 있다. 이래서야 곡선과 가까운 직선이라는 접선의 의미가 무엇인지 갸우뚱해지지 않을 수 없다.



$f(x)=x^2$ 그래프의 $(1,1)$ 에서의 접선 $y=2x-1$ 과 $y=x$ 의 비교

함숫값 $f(x)$ 와 접선에서의 값 $f(\mathrm{L})+f'(\mathrm{L})(x-\mathrm{L})$ 의 차를 절대 오차라 부른다. 사실 $f'(\mathrm{L})$ 대신 다른 값 m 을 대입하여 구한 절대 오차$f(x)-f(\mathrm{L})-m(x-\mathrm{L})$ 도 x 가 L 근처의 값이면 당연히 0 에 가까울 수밖에 없다.
하지만, 절대 오차를 x 의 변화량 $x-\mathrm{L}$ 로 나눈 값인 상대 오차를 셈하면 얘기가 크게 달라진다. x 가 L 에 가까울 경우 상대 오차가 0 에 가까워지는 경우는 $m=f'(\mathrm{L})$ 인 경우뿐이다! 증명도 한 줄에 불과하지만 왜 그런지는 직접 생각해 보길 바란다. 아무튼, 접선이란 상대 오차라는 면에서 곡선과 가까운 (유일한) 직선이라는 얘기다. 그런 의미에서 접선이 곡선과 '가장' 가까운 직선이라고 말하기도 한다. 실제로 접선인 경우 다음 표에서 볼 수 있듯이, x 가 L 에 다가갈수록 상대 오차가 0 에 가까워진다.

x	$x^2\ (A)$	$2x-1\ (B)$	절대오차 $C=A-B$	상대오차 $D=C/(x-1)$
1.1	1.21	1.2	0.01	0.1
1.01	1.0201	1.02	0.0001	0.01
1.001	1.002001	1.002	0.000001	0.001
1.0001	1.00020001	1.0002	0.00000001	0.0001
1.00001	1.0000200001	1.00002	0.0000000001	0.00001

하지만 접선이 아닌 다른 직선인 경우에는

x	$x^2\,(A)$	$x\,(B)$	절대오차 $C=A-B$	상대오차 $D=C/(x-1)$
1.1	1.21	1.1	0.11	1.1
1.01	1.0201	1.01	0.0101	1.01
1.001	1.002001	1.001	0.001001	1.001
1.0001	1.00020001	1.0001	0.00010001	1.0001
1.00001	1.0000200001	1.00001	0.0000100001	1.00001

상대 오차가 0 에 가깝지 않음을 알 수 있다.

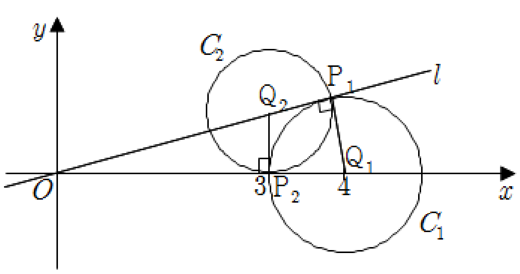
7. 접선을 구해서 뭐하려고?

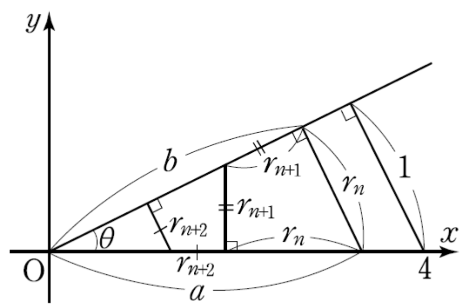
미분은 알고 보면 별 것이 아니다. 접선을 구하자는 것이 바로 미분이기 때문이다. 물론 접선의 기울기, 즉 미분계수를 구하는 과정에서 함수의 극한, 혹은 수열의 극한을 계산해야 하는데 다소 번거로운 경우가 많아 만만한 일만은 아니다. 하지만, '미분법'이라 부르는 다양한 방법이 개발돼 있어, 함수의 사칙 연산, 삼각함수, 지수함수, 로그함수, 합성함수, 역함수 등을 미분하는 방법은 잘 알려져 있다. 어쨌거나, 고작 접선을 구하자고 미분을 한 거라면 실망스러운 느낌이 들 수도 있을 것 같다. 미분이 별 것인 줄 알았더니 실망스럽다며 지레짐작하지는 않길 바란다. 미분에 대해 더 알아본 다음에 판단해도 늦지 않을 테니까 말이다. 미분이 유용한 이유 몇 가지 정도는 아쉬운 대로 소개할 생각이기 때문이다.

예시답안

풀어보기

문제 1 정답 ③





* 네이버 캐스트, 수학산책, 정경훈

원 C_1, C_2 의 중심을 각각 Q_1, Q_2 라 하자.

$\triangle \mathrm{OP}_1\mathrm{Q}_1$ 에서 $\overline{\mathrm{OP}_1}=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$ 이고, $\triangle \mathrm{OP}_1\mathrm{Q}_1$ 과 $\triangle \mathrm{OP}_2\mathrm{Q}_2$ 이 닮음이므로

$$\overline{\mathrm{OP}_1} : \overline{\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1}=\overline{\mathrm{OP}_2} : \overline{\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2},\ \sqrt{15} : 1=3 : \overline{\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2},\ \therefore\ \overline{\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2}=\frac{3}{\sqrt{15}}$$

따라서, $\triangle \mathrm{OP}_1\mathrm{Q}_1$ 과 $\triangle \mathrm{OP}_2\mathrm{Q}_2$ 의 닮음비는 $\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1} : \overline{\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2}=1 : \frac{3}{\sqrt{15}}$ 이므로 넓이의 비는 $1 : \frac{3}{5}$ 이다. 원 C_1 의 넓이는 $S_1=\pi$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n=S_1+S_2+S_3+\cdots=S_1+\frac{3}{5}S_1+\left(\frac{3}{5}\right)^2 S_1+\cdots=\frac{S_1}{1-\frac{3}{5}}=\frac{5}{2}S_1=\frac{5}{2}\pi$$

문제 2 정답 ②

$A=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ 라 하면

$$\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix},\ \cdots,\ \begin{pmatrix}x_4\\ y_4\end{pmatrix}=BABA\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix},\ \cdots$$

$BABA=E$(단위행렬)이므로 $P_{2003}=P_3$ 이다.

$$\begin{pmatrix}x_3\\ y_3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}$$

즉, P_{2003} 은 P_0 와 x 축 대칭이다.

따라서 P_{2003} 의 좌표는 $(x_0,\ -y_0)$ 이다.

다른 풀이

$A=\begin{pmatrix}\cos 45^\circ & -\sin 45^\circ\\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ 이라 하면 A 는 $\frac{\pi}{4}$ 만큼 회전변환이고, B 는 x 축에 대한 대칭변환이다. 즉 $(BA)^2=E$

$$P_1=AP_0,\ P_2=BP_1=BAP_0,\ P_3=AP_2=ABAP_0,\ P_4=BP_3=BABAP_0=P_0$$

$$\therefore\ P_{2003}=P_3=(x_0,\ -y_0)$$

문제 3 정답 ①

조건 (나)에서 $x\to 3$ 일 때, (분모)$\to 0$ 이므로 (분자)$\to 0$ 이어야 한다. 그리고 $f(x)$ 는 다항함수이고, 조건 (가)에 의해 $g(x)$ 는 연속이다. 따라서

$$\lim_{x\to 3}\{f(x)-g(x)\}=0,\ \therefore\ f(3)=g(3)$$

또한, $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 서로 역함수의 관계이므로 $f(3)=g(3)=3$ ⋯㉠

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-g(x)}{(x-3)g(x)}$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)-g(x)+g(3)}{(x-3)g(x)} = \lim_{x\to 3}\left\{\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\times\frac{1}{g(x)}-\frac{g(x)-g(3)}{x-3}\times\frac{1}{g(x)}\right\}$$

$$= f'(3)\times\frac{1}{g(3)}-g'(3)\times\frac{1}{g(3)} = \frac{1}{3}\{f'(3)-g'(3)\} = \frac{8}{9}$$

이때, $g'(3)=\frac{1}{f'(g(3))}=\frac{1}{f'(3)}$ 이므로 $\frac{1}{3}\left\{f'(3)-\frac{1}{f'(3)}\right\}=\frac{8}{9}$

$3\{f'(3)\}^2-8f'(3)-3=0$, $\{3f'(3)+1\}\{f'(3)-3\}=0$, $\therefore\ f'(3)=-\frac{1}{3}$ 또는 $f'(3)=3$

그런데, $f(x)$ 의 삼차항의 계수는 양수이고 역함수가 존재해야 하므로 $f'(x)\geq 0$ 이다.

$$\therefore\ f'(3)=3 \cdots ㉡$$

㉠에 의하여

$$f(x)-3=(x-3)(x^2+ax+b)$$

라 하고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x)=x^2+ax+b+(x-3)(2x+a) \cdots ㉢$$

㉡에 의하여

$$f'(3)=9+3a+b=3$$

$$\therefore\ 3a+b=-6 \cdots ㉣$$

㉢의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f''(x)=2x+a+(2x+a)+2(x-3)=6x+2a-6$$

이때, 변곡점의 x 좌표는 $6x+2a-6=0$ 에서 $x=\frac{3-a}{3}$

그런데, $f'(3)=3$ 에서 $g'(3)=\frac{1}{f'(3)}=\frac{1}{3}$ 이므로 조건 (가)에 의하여 $f(x)$ 의 변곡점의 x 좌표는 3 이 되어야 한다. 즉, $\frac{3-a}{3}=3$, $\therefore\ a=-6$

㉣에 대입하면 $b=12$ 이므로

$$f(x)-3=(x-3)(x^2+ax+b)=(x-3)(x^2-6x+12)$$

$$\therefore\ f(1)=-2\times 7+3=-11$$

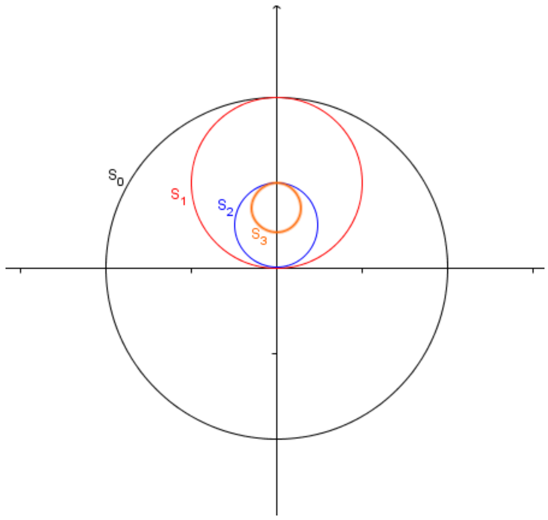
문제 4 정답 ③

$x_k=1+\frac{k}{n}$ 이므로, 넓이 $A_k=\frac{1}{2}\left(1+\frac{k}{n}\right)f\left(1+\frac{k}{n}\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}A_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(1+\frac{k}{n}\right)f\left(1+\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)f\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2 xf(x)dx=\frac{1}{2}\int_1^2 xe^x dx=\frac{1}{2}\left\{[xe^x]_1^2-\int_1^2 e^x dx\right\}=\frac{1}{2}e^2$$

논제 I -1*



$r=2$ 일 때, $C_k(p_k, q_k)$ 를 구하면 다음과 같다.

$$(p_1, q_1)=\left(0, \frac{1}{2}\right),\ (p_2, q_2)=\left(0, \frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}\right),\ (p_3, q_3)=\left(0, \frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}\right),\ \cdots$$

따라서 구하는 값은 $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}$ 이다.

논제 I -2

(p_1, q_1) 은 S_1 의 중심 $\left(0, -\frac{3}{4}\right)$ 를 원점을 중심으로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼 회전이동한 점이므로, (*)에서 $A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ 이고, $\begin{bmatrix}p_1\\ q_1\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}0\\ -\frac{3}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}+\frac{3}{4}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$ 이다. 또한 (p_2, q_2) 는 (p_1, q_1) 을 중심으로 점 $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right), 0\right)$ 을 $\frac{\pi}{2}$ 만큼 회전이동한 점, 즉 원점을 중심으로 점 $\left(\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right), 0\right)$ 을 $\frac{\pi}{2}$ 만큼 회전이동한 점을 x 축으로 p_1 만큼, y 축으로 q_1 만큼 평행이동한 점이다. 따라서

$$\begin{bmatrix}p_2\\ q_2\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}\frac{1}{4}-\frac{1}{4^2}\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p_1\\ q_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_1\\ q_1\end{bmatrix}+\frac{3}{4^2}A\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

이다. 같은 방법으로 (p_3, q_3) 은 점 (p_2, q_2) 를 중심으로 점 $\left(0, \frac{1}{4^2}\times\frac{3}{4}\right)$ 을 $\frac{\pi}{2}$ 만큼 회전이동한 점이다.

이것은 (p_2, q_2) 를 중심으로 점 $\left(\frac{1}{4^2}\times\frac{3}{4}, 0\right)$ 을 $\frac{\pi}{2}$ 만큼씩 2 번 회전이동한 점을 뜻하므로

* 단국대 예시답안 참조

$$\begin{bmatrix} p_3 \\ q_3 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4^2} - \frac{1}{4^3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_2 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_2 \\ q_2 \end{bmatrix} + \frac{3}{4^3}A^2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

이다. 마찬가지로

$$\begin{bmatrix} p_4 \\ q_4 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} -\frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_3 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_3 \\ q_3 \end{bmatrix} + \frac{3}{4^4}A^3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} p_5 \\ q_5 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{4^4} + \frac{1}{4^5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_4 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_4 \\ q_4 \end{bmatrix} + \frac{3}{4^5}A^4\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

이다. 가장 작은 원 S_n 을 이동시킨 원의 중심 (p_n, q_n) 은 (p_{n-1}, q_{n-1}) 을 중심으로 점 $\left(\frac{1}{4^{n-1}} \times \frac{3}{4}, 0\right)$ 을 $\frac{\pi}{2}$ 만큼씩 $(n-1)$ 번 회전이동한 점이다. 즉,

$$\begin{bmatrix} p_n \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1}\begin{bmatrix} \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \end{bmatrix} + \frac{3}{4^n}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

이다. 그러므로 주어진 식과 비교하면

$$B = \frac{3}{4^n}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1}$$

임을 알 수 있다.

논제 Ⅱ-1

먼저, m 의 접점의 좌표를 (a, b) 라 하면, 점 (b, a) 는 $y = f(x)$ 위의 점이므로

$$b^3 + 3b + 2 = a \cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

를 만족시킨다. 한편 역함수의 미분법에 의하여 점 (b, a) 에서 곡선 $y = f(x)$ 에 접하는 접선은 l 이고, l 의 방정식 $y = (3b^2 + 3)(x - b) + a$ 가 원점을 지나므로

$$a = 3b(b^2 + 1) \cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$

을 얻는다. 연립방정식 $(*)$, $(**)$를 풀어 $a = 6, b = 1$ 을 얻고, 구하려는 접점 $(6, 1)$ 을 얻는다. 또한 직선 l 의 방정식에 $a = 6, b = 1$ 을 대입하여 $y = 6x$ 을 얻고, 따라서 직선 $y = x$ 에 대칭인 m 의 방정식은 $y = \frac{1}{6}x$ 이다.

논제 Ⅱ-2

구간 $[0, 1]$ 을 n 등분하여 차례로

$$x_0(=0), x_1, x_2, \cdots, x_n(=1)$$

이라 하면, $x_k = \frac{k}{n}$ 에서 '원의 넓이'(제시문 그림에서 S)는 $\pi\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}^2$ 이다.

또한 $\frac{k}{k+m} = \frac{k}{n}$ 라 두면 $n-k=m$ 이고 조건 (c)에 의해서 '원의 넓이'= $\frac{k^2m^2}{(k+m)^4}$ 와 같이 표현된다. 그러므로

$$\pi\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}^2 = \frac{k^2m^2}{(k+m)^4} = \frac{k^2(n-k)^2}{n^4} = \frac{k^2}{n^2}\left(1-\frac{k}{n}\right)^2$$

에서

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)$$

를 얻는다. 한편, 구하고자 하는 영역의 넓이를 D 라 하면

$$D = 2\times(\text{곡선 } y=f(x) \text{ 와 } x \text{ 축, } x=0,\ x=1 \text{ 로 둘러싸인 영역의 넓이})$$

이므로, 구분구적법에 의해

$$D = 2\times\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 x(1-x)\,dx = \frac{1}{3\sqrt{\pi}}$$

이다.

8 단국대학교 수시(오전)

제시문 I **다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.**

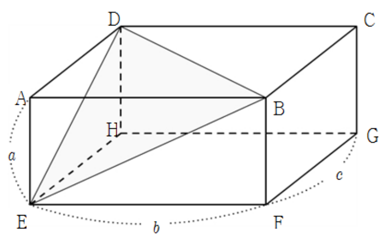
(가) 중심이 O인 구 S 위의 서로 다른 두 점 A와 B에 대하여, 세 점 O, A, B를 포함하는 평면과 구 S의 교집합으로 얻어지는 원 위에서 중심각의 크기가 π 이하인 호 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$의 길이를 $l(\mathrm{A},\mathrm{B})$로 나타내자.

(나) 공간에서 사면체 T의 모든 꼭짓점을 지나는 구를 사면체 T에 외접하는 구라고 한다.

(다) 세 변의 길이가 각각 a, b, c 인 삼각형의 넓이 Ω는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\Omega = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \left(\text{단, } s = \frac{1}{2}(a+b+c)\text{이다.}\right)$$

그림과 같은 직육면체 ABCD$-$EFGH에 대하여 $\overline{\mathrm{AE}}=a$, $\overline{\mathrm{EF}}=b$, $\overline{\mathrm{FG}}=c$라 할 때, [논제I-1], [논제I-2]에 답하시오.



논제 I-1

사면체 ABDE에 외접하는 구의 중심을 O라 할 때, 사면체 OBDE의 부피를 a, b, c에 관한 식으로 나타내시오.

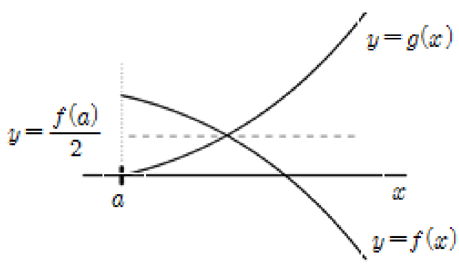
논제 I-2

$a=1$, $b=1$, $c=\sqrt{6}$일 때, 사면체 ABDE에 외접하는 구에서 $l(\mathrm{B},\mathrm{E})$를 구하시오.

제시문 Ⅱ **다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.**

(가) 미적분의 기본정리(적분과 미분의 관계)에 의하면 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$는 $f(x)$의 부정적분이 된다. $\int_a^b \sin(x^2)\,dx$의 예에서와 같이 부정적분을 통하여 정적분의 값을 계산하기 어려운 경우가 있다. 그러나 피적분함수가 미분 가능한 경우에는 도함수의 성질을 이용하여 그래프의 개형 및 대칭성을 조사하는 등의 다각적인 고찰에 의하여 정적분의 값을 구할 수도 있다.

(나) 함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속인 도함수 $f'(x)$를 가질 때, $g(x) = \int_a^x |f'(t)|\,dt$ (단, $a \le x \le b$)라 하자. 만일 구간 $[a, b]$의 모든 점 x에서 $f'(x) \le 0$이면 $y = g(x)$의 그래프는 $y = f(x)$의 그래프와 직선 $y = \frac{f(a)}{2}$에 대하여 대칭이고 $f(x) + g(x) = f(a)$가 성립한다.



(다) 도함수가 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $g(x) = \int_a^x |f'(t)|\,dt$라 할 때, $f(x)$가 감소하는 구간에서 $y = g(x)$의 그래프는 $y = f(x)$의 그래프와 x축에 평행한 어떤 직선에 대하여 대칭이다. (단, a는 함수 $f(x)$의 정의역에 속하는 실수이다.)

함수 $f(x) = \ln(x+1) \times \ln\left(\frac{9}{x+1}\right)$에 대하여 $g(x) = \int_0^x |f'(t)|\,dt$ (단, $x > -1$)이라 할 때, [논제Ⅱ-1], [논제Ⅱ-2]에 답하시오.

논제 Ⅱ -1

$y = g(x)$의 그래프는 구간 $[a, \infty)$에서 $y = f(x)$의 그래프와 직선 $y = k$에 대하여 대칭이다. a의 최솟값과 k의 값을 구하시오.

논제 Ⅱ -2

$h(x) = \int_8^x |f'(t)|\,dt$ (단, $x > -1$), $\int_3^7 g(x)\,dx = s$ 라 할 때 두 곡선 $y = f(x)$, $y = h(x)$ 와 두 직선 $x = 3$, $x = 7$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 $c - 2s$ 이다. c 의 값을 구하시오.

논술유형분석

문항 수	수학 2문항, 과학 1문항	시간	120분
연관 개념	공간좌표, 점과 평면사이의 거리, 코사인법칙, 도함수의 활용, 정적분		

제시문분석

제시문 I

제시문[가]는 구면 위의 두 점 사이의 거리를 정의하고 있다. 제시문[나]는 사면체에 외접하는 구를 정의하고 있다. 제시문[다]는 세 변의 길이가 주어진 삼각형의 넓이를 구하는 방법인 헤론의 공식에 대하여 설명하고 있다.

제시문 II

제시문[가]는 미적분학의 기본정리를 제시하고 있으며, 제시문[나]와 [다]는 도함수가 연속인 함수 $f(x)$ 에 대하여 $g(x)=\int_a^x |f'(t)|\,dt$ 로 정의된 함수 $g(x)$ 의 특징에 대하여 설명하고 있다.

논제분석

논제 Ⅰ-1

좌표계를 도입하여 공간도형의 기하학적 문제를 해결할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

논제 Ⅰ-2

코사인법칙을 이용하여 구면상의 최단거리를 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

논제 Ⅱ-1

미분을 활용하여 함수의 극댓값을 구하고 그래프의 개형을 통하여 대칭성을 찾아낼 수 있는지를 평가하는 문항이다.

논제 Ⅱ-2

함수의 그래프와 x축 사이의 넓이와 정적분의 관계를 이해하여 정적분의 값을 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

배경지식쌓기

1. 점과 평면 사이의 거리

점 $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$과 평면 $ax+by+cz+d=0$ 사이의 거리는 다음과 같다.

$$\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

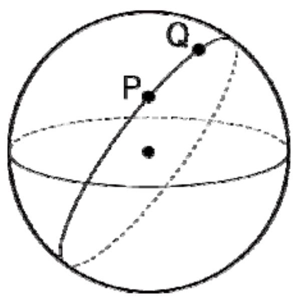
2. 코사인 법칙

삼각형 ABC에서 다음이 성립한다.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\mathrm{A}$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\mathrm{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\mathrm{C}$$

3. 구에서의 대원과 소원

구에서의 대원은 구의 중심을 지나는 평면으로 구를 자를 때 생기는 원이고, 소원은 구의 중심을 지나지 않는 평면으로 구를 자를 때 생기는 원이다. 구면 위의 두 점을 잇는 구면 위의 최단 경로의 길이는 두 점을 지나가는 대원의 일부분이다.



4. 미적분의 기본정리

(1) 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \quad (\text{단, } a \le x \le b)$$

로 정의하면 함수 $F(x)$는 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린 구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하며

$$F'(x)=f(x)$$

이다.

(2) 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고, $F(x)$가 $F'(x)=f(x)$를 만족하면 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$$

풀어보기

문제 1

좌표공간에서 네 점 $\mathrm{A}(2,\ 0,\ -1)$, $\mathrm{B}(1,\ -1,\ 1)$, $\mathrm{C}(1,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{D}(0,\ k,\ -2k+7)$ 이 같은 평면 위에 있을 때, 실수 k 의 값을 구하시오.

문제 2

평면 $x+2y-z+k=0$ 이 구 $x^2+(y+2)^2+(z-4)^2=6$ 에 접하도록 하는 모든 실수 k 의 값의 합을 구하시오.

문제 3

점 $(-1,0,0)$ 과 점 $(1,0,2)$ 를 지나는 직선 l 은 구 $x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ 과 두 점 P, Q에서 만난다. 이 두 점을 잇는 구면 위의 가장 짧은 곡선을 구하는 방법을 설명하고 그 곡선의 길이를 구하시오. (2012년 경희대 수시 변형)

문제 4

점 양수 a 에 대하여 닫힌구간 $[-a, a]$ 에서 함수

$f(x)=\dfrac{x-5}{(x-5)^2+36}$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m=0$ 이 되도록 하는 a 의 최솟값을 구하시오. (2006년 대수능)

읽기자료

미적분의 창시자는 누구?*

뉴턴은 1665년 무렵에 미적분법의 기본적인 아이디어에 이르렀다고 생각된다. 하지만 ‘비밀주의자’로 알려진 뉴턴은 미적분법의 아이디어를 곧바로 발표하지 않았다 뉴턴의 미적분에 관한 성과가 <구적론>으로 정식 출판된 것은 그로부터 약 40년이나 지난 1704년의 일이다. 미적분에는 뉴턴 이외에 또 한사람의 창시자가 있다. 독일의 철학자, 수학자인 고트프리트 빌헬름 라이프니츠(1646~1716)이다. 1684년 라이프니츠는 자신의 미적분 아이디어를 정리해서 뉴터보다 빨리 출판했다. 그런 사정 때문에 누가 미적분의 창시자인지를 둘러싸고 뉴턴과 라이프니츠 사이에 격렬한 싸움이 벌어졌다.

현대의 기준으로 말하자면, 뉴턴이 먼저 아이디어를 내놓았다고 해도 먼저 학술지에 정식으로 발표한 라이프니츠가 미적분의 창시자라고 할 수 있다. 하지만 17세기 당시에는 그런 선취권에 관한 규칙이 제대로 정비되어 있지 않았다. 이 때문에 뉴턴과 라이프니츠의 격렬한 싸움이 시작된 것이다.

미적분의 선취권 싸움에서 라이프니츠에게 불리한 상황 증거가 남아있다. 그것은 1676년에 라이프니츠가 런던에 왔을 때, 앞서 소개한 콜린스로부터 수학에 관한 뉴턴의 논문을 읽어 달라는 부탁을 받고 그 일부를 베꼈다는 점이다. 읽어 달라고 받은 논문 가운데는 미적분에 관한 성과도 들어있었다. 이 상황 증거가 나중에 라이프니츠가 뉴턴의 아이디어를 훔쳤다고 고발되는 큰 계기가 되었다.

라이프니츠는 그 전 해인 1675년에 미적분의 기본 정리에 독자적으로 이르렀기 때문에 뉴턴의 아이디어를 훔칠 필요는 없었다. 실제로 이때는 ‘급수전개’라는 미적분의 기본 정리와는 직접 관계가 없는 부분만 베꼈음이 판명되었다.

1676년 뉴턴과 라이프니츠는 수학적인 성과에 관한 편지를 주고받기도 했다. 당시는 아직 두 사람 사이에 대립 관계가 없었다. 이때 편지를 주고받으면서 뉴턴은 미적분의 방법 일부를 라이프니츠에게 전했다. 그러나 그런 방법을 이용해 무엇이 가능한지, 즉 미적분에 사용된다는 점에 대해서는 암호(철자 바꾸기)로 바꾸어 적었다. 라이프니츠는 암호 부분의 의미를 알 수 없었을 것이다.

싸움의 불길이 당겨진 것은 1699년 이었다. 뉴턴의 신봉자였던 스위스출신의 수학자 니콜라스 파티오가 뉴턴이야말로 미적분학의 창시자이며, 라이프니츠는 뉴턴의 아이디어를 훔쳤다고 자신의 책에서 주장한 것이다.

그러자 라이프니츠는 화를 내고 다음해인 1700년 학술지에 반론을 게재했다. 이를 보고 뉴턴도 화를 냈을 터이지만 이때는 더 이상 싸움이 격화되지 않았다. 그러나 싸움의 불길이 사라진 것은 아니다. 1704년 뉴턴은 자신의 미적분에 대한 첫 발표물인 <구적론>을 내놓았다. 그 책에서 뉴턴은 미적분에 관한 성과를 라이프니츠에게 알린 적이 있다고 썼다. 그것은 1676년에 라이프니츠에게 보낸 편지였다. 편지에서는 핵심부분을 암호로 바꾸어 감추었지만, 이 책에서는 그 내용을 밝혔다. 즉 미적분의 기본정리를 먼저 발견한 사람은 자신이며, 라이프니츠가 그것을 훔쳤다고 암시한 셈이다.

이에 대해 라이프니츠도 격노했으며, 다시 학술지에 반론을 게재했다. 그리고 그 후에는 서로의 지지자를 끌어들여 격렬한 비방 중상의 응수가 되풀이 되었다.

싸움은 최종 국면을 맞이한다. 1711년 비난전을 참을 수 없었던 라이프니츠는 영국의 왕립협회에 항의 편지를 보냈다. 공정한 판정을 바란다고 호소한 것이다. 왕립협회의 회답은 '뉴턴이야말로 첫 발견자이며, 라이프니츠는 뉴턴이 보낸 편지로 미적분의 기본정리를 알았다'는 것이었다. 이것은 표면적으로는 제 3자인 협회의 회답이었지만, 실질적으로는 왕립협회장인 뉴턴의 지시에 따라 작성된 것으로 보인다.

왕립협회는 1712년에 미적분의 선취권 싸움에 관해 조사 위원회를 구성했다. 다음해인 1713년에는 조사 결과를 정리한 보고서를 작성해 각국의 학술 기관에 배포했다. 결론은 '뉴턴이야말로 첫 발견자이며, 라이프니츠는 뉴턴이 보낸 편지로 미적분의 기본정리를 알았다'는 내용이었다. 이것은 뉴턴이 뒤에서 모두 조종했으므로 당연한 결론이다. 뉴턴은 조사 위원회 위원의 선정에서부터 조사 결과의 편집까지 관여했다는 사실이 알려져 있다. 보기 흉한 이 싸움의 진상이 밝혀진 것은 훨씬 나중 시대의 일이다. 당시는 뉴턴의 책략으로, 라이프니츠가 뉴턴의 성과를 도용했다는 인식이 세상에 널리 퍼져 있었다. 라이프니츠는 왕립협회의 부당한 조사결과가 발표되고 나서 3년이 지난 1716년에 실의 속에서 쓸쓸히 숨을 거두고 말았다.

오늘날에는 두 사람이 각기 독립적으로 연구했고, 미적분학의 발견은 뉴턴이 앞섰지만 발표는 라이프니츠가 우위인 것으로 인정된다.

[뉴턴(왼쪽)과 라이프니츠(오른쪽)]

* 『뉴턴의 대발명 미분과 적분』 Newton 하이라이트

예시답안

풀어보기

문제 1 정답 6

네 점을 지나는 평면의 방정식을 α : $ax+by+cz+d=0$ 이라 하면 세 점 A, B, C 가 평면 α 위의 점이므로

$$2a-c+d=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$
$$a-b+c+d=0 \quad \cdots\cdots ㉡$$
$$a+d=0 \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉢에서 $d=-a$, $d=-a$ 를 ㉠에 대입하면 $c=a$ 이고 $c=a$, $d=-a$ 를 ㉡에 대입하면 $b=a$ 따라서 평면의 방정식은

$$ax+ay+az-a=0 \ (\text{단, } a\neq 0)$$

양변을 a 로 나누면 $x+y+z=1$, 점 $\mathrm{D}(0,\ k,\ -2k+7)$ 이 평면 $x+y+z=1$ 위에 있으므로

$$0+k+(-2k+7)=1 \qquad \therefore k=6$$

문제 2 정답 16

구 $x^2+(y+2)^2+(z-4)^2=6$ 의 중심의 좌표는 $(0,\ -2,\ 4)$ 이고 반지름의 길이는 $\sqrt{6}$ 이다. 평면과 구가 접하므로 구의 중심과 평면 $x+2y-z+k=0$ 사이의 거리는 구의 반지름의 길이와 같다.

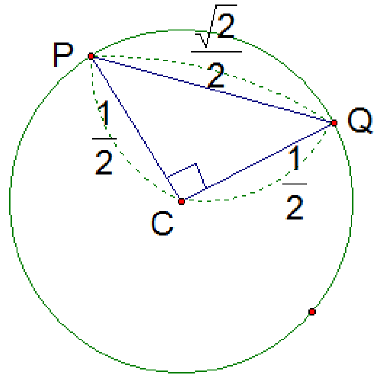
$$\frac{|0-4-4+k|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{|-8+k|}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$$

$$|-8+k|=6 \quad \therefore k=2 \ \text{ 또는 } \ k=14$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은 $2+14=16$ 이다.

문제 3

직선 l 위의 임의의 점 $(t-1,0,t)$를 구의 방정식 $x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$에 대입하면 $t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=\frac{1}{4}$이다. 따라서 $\mathrm{P}(0,0,1)$, $\mathrm{Q}\left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$이다. $\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $\angle\mathrm{PCQ}=\frac{\pi}{2}$ 이다. 이를 나타내면 다음과 같다.



$$\therefore\ \widehat{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$$

문제 4 정답 11

닫힌 구간 $[-a, a]$ 에서 정의된 함수 $f(x)=\dfrac{x-5}{(x-5)^2+36}$ 에서 $x-5=t$ 로 놓으면 구하는 함수의 최댓값과 최솟값은 닫힌구간 $[-a-5, a-5]$ 에서 정의된 함수 $g(t)=\dfrac{t}{t^2+36}$ 의 최댓값과 최솟값과 같다. 함수 $g(t)=\dfrac{t}{t^2+36}$ 의 그래프의 개형을 그려보면

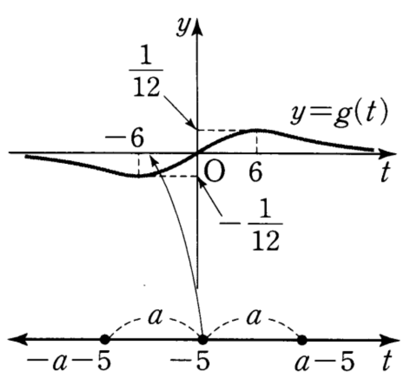
(ⅰ) $\lim_{t\to\infty}g(t)=\lim_{t\to-\infty}g(t)=0$ 이므로 함수 $y=g(t)$ 의 그래프의 점근선은 t 축이다.

(ⅱ) $t>0$ 일 때 $g(t)>0$ 이고, $t<0$ 일 때 $g(t)<0$ 이다.

(ⅲ) $g(-t)=-g(t)$ 이므로 $y=g(t)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

(ⅳ) $g'(t)=\dfrac{1\cdot(t^2+36)-t\cdot 2t}{(t^2+36)^2}=\dfrac{36-t^2}{(t^2+36)^2}=0$ 에서 $t=6$ 또는 $t=-6$

그러므로 $g(t)$는 $t=-6$ 에서 극소이고 $t=6$ 에서 극대이다. 따라서 함수 $y=g(t)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이때, 닫힌 구간 $[-a-5, a-5]$는 $t=-5$에 대하여 대칭인 구간이므로 함수 $y=g(t)$의 최댓값 M과 최솟값 m에 대하여 $M+m=0$, 즉 $m=-M$을 만족하려면 닫힌구간 $[-a-5, a-5]$는 $t=-6$과 $t=6$을모두 포함해야한다.

$$\therefore\ -a-5 \le -6 \text{ 이고 } a-5 \ge 6\ \therefore\ a \ge 1 \text{ 이고 } a \ge 11\ \therefore\ a \ge 11$$

따라서 구하는 a의 최솟값은 11 이다.

논제 Ⅰ-1*

(i) 구의 중심 구하기 :

점 E 를 원점, $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ 를 x축, $\overrightarrow{\mathrm{EH}}$를 y축, $\overrightarrow{\mathrm{EA}}$를 z축으로 하면, 꼭짓점의 좌표는 $\mathrm{A}(0,0,a)$, $\mathrm{B}(b,0,a)$, $\mathrm{D}(0,c,a)$이다. 이때, 사면체 ABDE 에 외접하는 구의 중심을 $\mathrm{O}(x_0, y_0, z_0)$라 하면, $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OD}}=\overline{\mathrm{OE}}$가 성립해야 하므로

$$x_0^2+y_0^2+(z_0-a)^2=(x_0-b)^2+y_0^2+(z_0-a)^2=x_0^2+(y_0-c)^2+(z_0-a)^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2$$

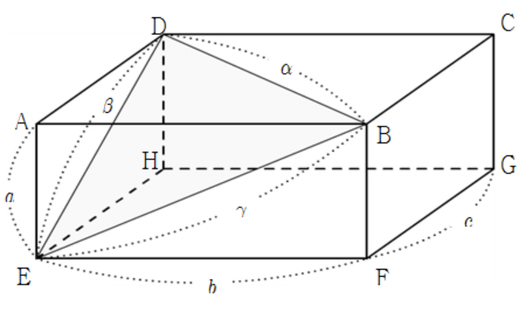
이 되어, $\mathrm{O}(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}, \frac{a}{2})$를 얻는다.

(ii) 사면체 OBDE의 높이 구하기 :

점 B, D, E 를 지나는 평면의 방정식을 $px+qy+rz+t=0$이라 하고, (x, y, z)에 B, D, E의 좌표 $(b,0,a), (0,c,a), (0,0,0)$을 각각 대입하면 평면의 방정식은 $acx+aby-bcz=0$이다. 사면체 OBDE 의 높이 h는 점 O와 평면 $acx+aby-bcz=0$ 사이의 거리와 같으므로, h의 값은 다음과 같이 주어진다.

$$h=\frac{abc}{2\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$$

(iii) 삼각형 BDE의 넓이를 구하기 :



삼각형 BDE의 각 변의 길이는 $\alpha=\sqrt{b^2+c^2}$, $\beta=\sqrt{a^2+c^2}$, $\gamma=\sqrt{a^2+b^2}$ 이다.

제시문 (다)에서 주어진 식을 적용하기 위하여 $s=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)$라 하면 삼각형 BDE의 넓이 Ω에 대하여 다음이 성립한다.

* 대학예시답안

$$\begin{aligned}\Omega^2 &= s(s-\alpha)(s-\beta)(s-\gamma)\\ &= \frac{1}{16}[(\beta+\gamma)^2-\alpha^2][\alpha^2-(\beta-\gamma)^2]\end{aligned}$$

그런데,
$(\beta+\gamma)^2-\alpha^2 = 2(a^2+\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{a^2+b^2})$, $\alpha^2-(\beta-\gamma)^2 = 2(-a^2+\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{a^2+b^2})$ 이므로, $\Omega^2 = \frac{1}{4}(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$ 이고 따라서 $\Omega = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}$ 을 얻는다.
(ii) 와 (iii)으로부터, 사면체 OBDE 의 부피 V 는 다음과 같다.

$$V = \frac{1}{3}\Omega h = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\cdot\frac{abc}{2\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}} = \frac{1}{12}abc$$

논제 Ⅰ-2*

논제 1의 결과로부터, 구의 반지름의 길이 $R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 를 얻는다.

$\overline{\mathrm{BE}} = \sqrt{a^2+b^2}$ 이므로, 삼각형 OEB에 코사인 법칙을 적용하면,

$\overline{\mathrm{BE}}^2 = \overline{\mathrm{OB}}^2+\overline{\mathrm{OE}}^2-2\overline{\mathrm{OB}}\,\overline{\mathrm{OE}}\cos\theta$, 즉 $a^2+b^2 = 2R^2-2R^2\cos\theta$ 이다.

그런데 문제의 조건에서 $a=1$, $b=1$, $c=\sqrt{6}$ 이므로 $\cos\theta = \frac{1}{2}$이고, 따라서 $\theta=\frac{\pi}{3}$이다.

그러므로 $l(\mathrm{B},\mathrm{E}) = R\theta = \frac{\sqrt{2}}{3}\pi$ 이다.

논제 Ⅱ-1**

$f'(x) = \frac{-1}{x+1}\left\{\ln\frac{x+1}{9}+\ln(x+1)\right\} = \frac{-1}{x+1}\ln\frac{(x+1)^2}{9}$ 이므로 $f'(2)=0$이고 $-1<x<2$에서는 $f'(x)>0$, $x>2$ 에서는 $f'(x)<0$ 이다. 따라서 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극댓값 $f(2)=(\ln 3)^2$ 을 갖는다.

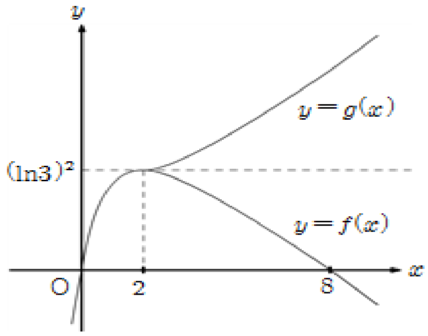
한편 $f(0)=0$ 이므로 $0\le x\le 2$ 에서는 $f(x)=g(x)$ 이다. 또한, $x\ge 2$ 에서는

$$g(x)=\int_0^x|f'(t)|\,dt=\int_0^2 f'(t)\,dt-\int_2^x f'(t)\,dt=f(2)-f(0)-f(x)+f(2)=-f(x)+2f(2)$$

이므로 제시문 (나)에 의하여 $y=g(x)$ 의 그래프와 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $y=(\ln 3)^2$ 에 대하여 대칭이다.

---

* 대학예시답안
** 대학예시답안



따라서 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 그래프는 구간 $[2,\infty)$ 에서 직선 $y=(\ln 3)^2$ 에 대하여 대칭이다.
그러므로 구하는 a 의 최솟값은 2, $k=(\ln 3)^2$ 이다.

논제 Ⅱ-2*

$x\geq 2$에서 $h(x)=\int_8^x |f'(t)|\,dt=-\int_8^x f'(t)\,dt=-f(x)+f(8)=-f(x)$ 이므로
구하려는 넓이를 A 라 하면 구간 $[3,7]$ 에서 $f(x)>0$ 이므로

$$A=\int_3^7\{f(x)-h(x)\}\,dx=2\int_3^7 f(x)\,dx \quad \cdots (*)$$

이다. 한편 구간 $[3,7]$ 에서 $g(x)=-f(x)+2f(2)$ 이고 $f(2)=(\ln 3)^2$ 이므로

$$\int_3^7\{f(x)+g(x)\}dx=\int_3^7 2(\ln 3)^2\,dx=8(\ln 3)^2 \quad \cdots (**)$$

이 성립한다. (*)과 (**)에 의하여 $\dfrac{A}{2}+s=8(\ln 3)^2$ 이 성립하므로 $A=16(\ln 3)^2-2s$이다. 따라서 $c=16(\ln 3)^2$ 이다.

* 대학예시답안

9

단국대학교 수시(오후)

제시문 I **다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.**

(가) 좌표평면 위의 곡선은 여러 가지 방법으로 표현할 수 있다. 예를 들어, 아래의 (A), (B), (C)는 모두 동일한 반원을 나타낸다.

(A) $y = \sqrt{1-x^2}$ (단, $-1 \le x \le 1$)

(B) $x^2 + y^2 - 1 = 0$ (단, $-1 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$)

(C) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ (단, $0 \le t \le \pi$)

어떤 곡선을 (A)와 같이 $y = f(x)$의 꼴로 표현하면 명시적 형식, (B)와 같이 $f(x,y) = 0$의 꼴로 표현하면 암시적 형식, (C)와 같이 $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ 의 꼴로 표현하면 매개변수 형식으로 곡선을 표현하였다고 하자.

(나) 점 A와 점 B를 $t:(1-t)$로 내분하는 점 C는 임의의 점 Q에 대하여 다음을 만족시킨다. (단, $0 < t < 1$이다.)

$$\overrightarrow{\mathrm{QC}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{QA}} + t\overrightarrow{\mathrm{QB}}$$

좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{A}(0,1)$, $\mathrm{B}(2,1)$, $\mathrm{C}(2,0)$에 대하여, 점 A와 점 B를 $t:(1-t)$로 내분하는 점을 D라 하고, 점 B와 점 C를 $t:(1-t)$로 내분하는 점을 E라 하자. 그리고 점 D와 점 E를 $t:(1-t)$로 내분하는 점을 P라 하자. $0 < t < 1$에서의 점 P의 자취를 α라 할 때, [논제 I-1], [논제 I-2]에 답하시오.

논제 I-1

곡선 α를 매개변수 형식으로 표현하시오. 그리고 그 결과를 이용하면 곡선 α를 다음과 같은 암시적 형식으로 표현할 수 있다.

$$x^2 + a_1xy + a_2y^2 + a_3x + a_4y + a_5 = 0 \text{ (단, } 0 < x < 2,\ 0 < y < 1)$$

상수 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5를 구하시오.

논제 Ⅰ-2

행렬 $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 로 나타내어지는 일차변환에 의하여 α 가 옮겨지는 곡선을 명시적으로 표현하면

$$y = g(x) \quad (\text{단, } a < x < b)$$

이다. 상수 a, b 와 함수 $g(x)$ 를 구하시오.

제시문 Ⅱ **다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.**

(가) 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하지 않을 때 $f(x)$ 에 어떤 함수 $g(x)$ 를 합성하여 얻은 함수 $(g \circ f)(x)$ 는 $x=a$ 에서 미분가능할 수도 있다. 예를 들어 $f(x)=\sqrt{|x|}$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않지만 $f(x)$ 와 $g(x)=\sqrt[8]{x^8+2}$ 의 합성함수
$(g \circ f)(x)=\sqrt[8]{x^4+2}$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다.

(나) 함수 $f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x \le a \\ f_2(x), & x > a \end{cases}$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하지 않을 때, 어떤 함수 $g(x)$ 에 대하여 함수 $h(x)=\begin{cases} f_1(x) & , x \le a \\ (g \circ f_2)(x), & x > a \end{cases}$ 는 $x=a$ 에서 미분가능할 수도 있다.

(다) 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 를 제외한 정의역의 나머지 모든 점에서 미분가능하다는 것을 알고 있을 때, 다음을 이용하면 $f'(a)$ 의 존재 여부뿐만 아니라 $f'(x)$ 의 $x=a$ 에서의 연속성도 알 수 있다.

$f'(x)$가 $x=a$ 에서 연속이기 위한 필요충분조건은 $f(x)$가 $x=a$ 에서 연속이고
$\lim\limits_{x \to a-0} f'(x) = \lim\limits_{x \to a+0} f'(x)$ 이다.

함수 $s(x)=\sqrt[n]{x^n+2}$ (단, n은 자연수)에 대하여 연속함수 $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 가 다음 조건을 만족시킬 때 [논제 Ⅱ-1], [논제 Ⅱ-2]에 답하시오.

(a) $f(0)=0$
(b) f 는 집합 $\mathbb{R}-\{0\}$ 에서 미분가능하다.
(c) $n=3$ 일 때, $\lim\limits_{x \to 0}(s \circ f)'(x)=1$ 이다.

논제 Ⅱ-1

극한값 $\lim_{x\to 0}\left[\{f(x)\}^2 f'(x)\right]$ 를 구하시오.

논제 Ⅱ-2

$s^{(1)}(x)=s(x)$, $s^{(k+1)}(x)=s^{(k)}\circ s(x)$ 라 하자. (단, k는 자연수이다.) 함수

$$h(x)=\begin{cases} 6 & , \ x\le 0 \\ (s^{(k)}\circ f)(x), & x>0 \end{cases}$$

에 대하여 $h'(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이 되도록 하는 n의 최솟값과 그 때의 k 의 값을 구하시오.

논술유형분석

문항 수	수학 2문항, 과학 1문항	시간	120분
연관 개념	매개변수 방정식, 일차변환, 함수의 극한과 연속, 합성함수 미분법		

제시문분석

제시문 Ⅰ

제시문[가]는 곡선을 표현하는 세 가지 방법에 대하여 설명하고 있다. 제시문[나]는 선분을 내분하는 점을 벡터방정식으로 표현하는 방법에 대하여 설명하고 있다.

제시문 Ⅱ

제시문[가]와 [나]는 합성함수의 미분가능성에 대하여 설명하고 있다. 제시문[[다]는 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 연속성에 대하여 설명하고 있다.

논제분석

논제 Ⅰ-1

제시문의 정의를 이해하여 매개변수 형식으로 곡선을 나타낸 다음, 변수를 소거하여 암시적 형식으로 곡선의 방정식을 나타낼 수 있는지를 평가하는 문항이다.

논제 Ⅰ-2

일차변환의 정의를 이용하여 [논제Ⅰ-1]에서 구한 곡선이 일차변환에 의해 옮겨지는 곡선의 방정식을 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

논제 Ⅱ-1

합성함수를 이해하고 주어진 조건으로부터 극한값을 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

논제 Ⅱ-2

불연속인 함수로부터 도함수가 연속인 함수를 얻기 위한 조건을 이해하고 그 함수를 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

배경지식쌓기

1. 일차변환과 행렬

일반적으로 변환 $f:(x,y)\to(x',y')$ 이

$$\begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases} \text{ (단, } a,b,c,d\text{는 상수)}$$

와 같은 꼴로 표현될 때, 이 변환을 일차변환이라 하고 이 식을 일차변환 f 의 변환식이라고 한다. 특히, 변환 f 를 행렬로 나타내면 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 와 같이 나타낼 수 있고 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 를 일차변환을 나타내는 행렬 또는 일차변환 f 의 행렬이라고 한다.

$$\begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2. 함수의 극한에 대한 성질

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\alpha$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\beta$($\alpha$, β는 실수)일 때,

(1) $\lim\limits_{x\to a}cf(x)=c\alpha$ (단, c는 상수)

(2) $\lim\limits_{x\to a}\{f(x)\pm g(x)\}=\alpha\pm\beta$ (복부호동순)

(3) $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \alpha\beta$

(4) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ (단, $g(x) \neq 0$, $\beta \neq 0$)

3. 합성함수의 미분법

두 함수 $y = f(u)$, $u = g(x)$ 가 미분가능할 때, 합성함수 $y = f(g(x))$ 의 도함수는
$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$ 또는 $y' = f'(g(x))g'(x)$ 이다.

풀어보기

문제 1 좌표공간 $R^3 = \{(x, y, z) | x, y, z \text{는 실수}\}$ 안에 곡선 C 가 있다. 이 곡선을 매개변수 t 에 관한 함수로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{cases} x = 2\cos t + 6\sin t \\ y = -4\cos t + 3\sin t \\ z = 6 - 5\cos t \end{cases}$$

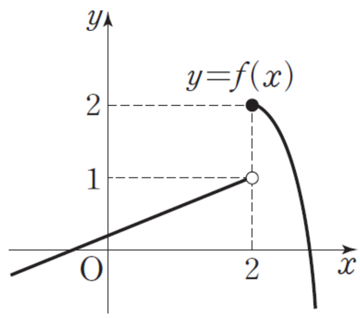
곡선 C 를 포함하는 어떤 평면 α 가 존재함을 보이고, 평면 α 의 방정식을 구하시오.
(단, 방정식에서 x 의 계수가 1이 되도록 한다.) (2011년 한양대 수시)

문제 2 행렬 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ 으로 나타내어지는 일차변환 f 에 의하여 직선 $x + 3y = 5$ 는 어떤 도형으로 옮겨지는지 구하여라.

문제 3 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$, $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=3$ 을 만족시키는 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $\lim_{x\to 2}\frac{(f\circ f)(x)}{x^2-x-2}$ 의 값은? (2013년 EBS 수능특강 수학Ⅱ)

① 2 ② 3 ③ 6 ④ 9 ⑤ 18

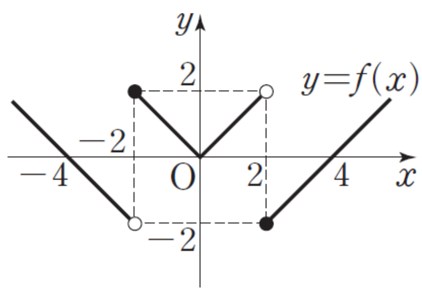
문제 4 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $g(x)=x^2+kx$에 대하여 합성함수 $(g\circ f)(x)$가 $x=2$에서 연속일 때, $g(-2)$의 값은? (단, k는 상수이다.) (2013년 EBS 수능완성 수학Ⅱ)

① 12 ② 10 ③ 8 ④ 6 ⑤ 4

문제 5 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $g(x)$를 $g(x)=f(2x)$라 할 때, 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $\lim_{x\to -1-0}(f\circ g)(x)=2$

ㄴ. $\lim_{x\to 1-0}(g\circ g)(x)=2$

ㄷ. 합성함수 $(f\circ g)(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

읽기자료

여러 가지 변환*

점이나 선 또는 도형과 같은 기하학적인 도형은 일차변환, 대칭변환 등과 같은 여러 가지 기하학적 변환에 의해서 다시 기하학적 도형으로 옮겨진다. 여기서는 일정한 방향으로 비추는 광선으로 한 평면 위에 있는 도형을 비추었을 때 처음 도형과 스크린에 생긴 도형의 관계를 알아본다.

1. 닮음 변환

한 점에서 발사되는 광선으로 한 평면 위에 있는 도형을 그 평면과 평행인 평면에 비추었을 때 생기는 도형으로 처음 평면에 있는 도형과 크기는 다르지만 모양은 같다. 이 경우 두 도형을 닮음인 도형이라 하고 이러한 변환을 닮음변환이라고 한다. 닮음변환에서는 각의 크기는 불변이지만 변의 길이는 일정한 비율로 새로 만들어진다. 축도나 확대도를 만드는 것은 하나의 도형에 닮음변환을 행하는 것이다.

2. 사영변환

한 점에서 발사되는 광선으로 한 평면 위에 있는 도형을 그 평면과 평행이 아닌 평면 위에 비추었을 때 생긴 도형으로의 변환을 사영변환이라고 한다. 이 경우 정삼각형은 일반 삼각형으로 확대된다.

3. 합동변환

평행이 되게 비추는 광선으로 한 평면에 있는 도형을 그 평면과 평행인 평면에 비추었을 때 생긴 도형으로 이 경우 두 도형은 크기와 모양이 똑같다. 이와 같은 변환을 합동변환이라고 한다.

4. 아핀(Affine)변환

평행이 되게 비추는 광선으로 한 평면 위에 있는 도형을 그 도형과 평행이 아닌 평면 위에 비추었을 때 생긴 도형으로 이 경우 모눈은 일정한 비율로 확대되어 평행사변형이 되고 처음의 직각삼각형은 일반 삼각형이 된다. 이와 같은 변환을 아핀변환이라고 한다.

5. 위상변환**

한 점에서 발사되거나 또는 평행인 광선으로 한 평면 위에 있는 도형을 그 평면과 성질이 다른 면(곡면 등)에 비추었을 때 생긴 도형을 생각해보자. 이 경우 생긴 도형과 처음 도형은 모양과 크기가 모두 처음 도형과 다르다.

---

* 고등학교 수학과 문제해결을 위한 이론과 실제 (2000) 부산광역시교육청

** 일반적으로 어떤 도형을 늘이거나 줄이거나 구부리는 것은 가능하나 그 연결 상태는 변하지 않도록 하

예시답안

풀어보기

문제 1 정답 $x-2y+2z=12$

$x=2\cos t+6\sin t$, $y=-4\cos t+3\sin t$ 에서 $x-2y=10\cos t$ 이고

$z=6-5\cos t$ 에서 $12-2z=10\cos t$ 이므로 $x-2y=12-2z$ 이다. 즉 $x-2y+2z=12$ 이다. 이 평면은 곡선 C 를 포함하는 평면이므로 평면 α 의 방정식은 $x-2y+2z=12$ 이다.

문제 2 정답 $3x-y=5$

일차변환 f에 의하여 점 $\mathrm{P}(x, y)$가 점 $\mathrm{P}'(x', y')$으로 옮겨진다고 하면

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 이므로

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3x'+2y' \\ 2x'-y' \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ x=-3x'+2y',\ y=2x'-y'$$

이것을 직선 $x+3y=5$에 대입하면

$$-3x'+2y'+3(2x'-y')=5,\text{ 즉 } 3x'-y'=5$$

따라서 점 $\mathrm{P}'(x', y')$은 직선 $3x-y=5$ 위에 있으므로 직선 $x+3y=5$ 는 직선 $3x-y=5$ 로 옮겨진다.

문제 3 정답 ①

$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=3$ 에서 $f(2)=0$, $f(x)=t$ 로 놓으면 $x\to2$ 일 때 $t\to0$ 이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{(f\circ f)(x)}{f(x)}=\lim_{x\to2}\frac{f(f(x))}{f(x)}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}=2$$

$$\lim_{x\to2}\frac{(f\circ f)(x)}{x^2-x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(f\circ f)(x)}{(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to2}\frac{(f\circ f)(x)}{f(x)}\times\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}\times\lim_{x\to2}\frac{1}{x+1}=2\cdot3\cdot\frac{1}{3}=2$$

문제 4 정답 ②

합성함수 $(g\circ f)(x)$가 $x=2$ 에서 연속이므로 $\displaystyle\lim_{x\to2-0}g(f(x))=\lim_{x\to2+0}g(f(x))=g(f(2))$가 성립한다.

는 변환을 위상변환이라고 한다.

$$\lim_{x\to 2-0} g(f(x)) = \lim_{t\to 1-0} g(t) = 1+k\ ,\ \lim_{x\to 2+0} g(f(x)) = \lim_{t\to 2-0} g(t) = 4+2k$$

$g(f(2)) = g(2) = 4+2k$ 이므로 $1+k = 4+2k$ 에서 $k-3$ $\quad\therefore g(x) = x^2-3x$

$$\therefore g(-2) = 4+6 = 10$$

문제 5 정답 ④

ㄱ. $x \to -1-0$ 일 때, $2x \to -2-0$ 이므로 $g(x) = f(2x) \to -2+0$

$$\therefore \lim_{x\to -1-0} (f\circ g)(x) = \lim_{x\to -1-0} f(g(x)) = \lim_{t\to -2+0} f(t) = 2 \ \text{(참)}$$

ㄴ. $x \to 1-0$ 일 때, $2x \to 2-0$ 이므로 $g(x) = f(2x) \to 2-0$

$$\therefore \lim_{x\to 1-0} (g\circ g)(x) = \lim_{x\to 1-0} g(g(x)) = \lim_{t\to 2-0} g(t) = \lim_{t\to 2-0} f(2t) = 0 \ \text{(거짓)}$$

ㄷ. $\lim_{x\to 1-0} (f\circ g)(x) = \lim_{x\to 1-0} f(g(x)) = \lim_{t\to 2-0} f(t) = 2$

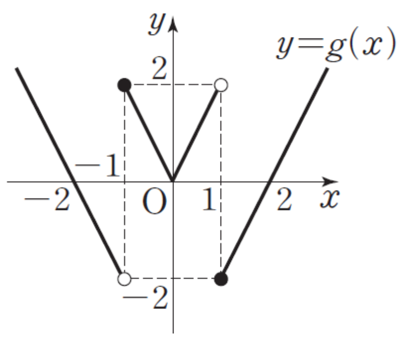
$\lim_{x\to 1+0} (f\circ g)(x) = \lim_{x\to 1+0} f(g(x)) = \lim_{t\to -2+0} f(t) = 2$

$(f\circ g)(1) = f(g(1)) = f(f(2)) = f(-2) = 2$ 즉,

$\lim_{x\to 1}(f\circ g)(x) = (f\circ g)(1)$ 이므로 합성함수 $(f\circ g)(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

[참고] 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



논제 I -1*

D의 좌표: $(1-t)(0,1)+t(2,1) = (2t,1)$

E의 좌표: $(1-t)(2,1)+t(2,0) = (2,1-t)$

P의 좌표: $(1-t)(2t,1)+t(2,1-t) = (4t-2t^2, 1-t^2)$

점 P의 자취를 매개변수 형식으로 표현하면,

$$\begin{cases} x = -2t^2+4t \\ y = -t^2+1 \end{cases} \quad (\text{단, } 0<t<1)$$

이다. 매개변수 형식의 표현으로부터

$$x-2y = 4t-2 \quad \cdots\ (1)$$

* 대학예시답안

이다. 식 (1)을 변수 t에 관해 정리하면

$$t=\frac{x-2y+2}{4} \quad \cdots (2)$$

이다. 식 (2)를 $y=-t^2+1$에 대입하면,

$$y=-\left(\frac{x-2y+2}{4}\right)^2+1$$

이고 이를 정리하면

$$x^2-4xy+4y^2+4x+8y-12=0$$

이다. 따라서 $a_1=-4$, $a_2=4$, $a_3=4$, $a_4=8$, $a_5=-12$.

논제 Ⅰ-2*

주어진 일차변환을 나타내는 관계식

$$x'=-x+2y$$
$$y'=x-y$$

에 곡선 α의 매개변수 형식

$$x=-2t^2+4t$$
$$y=-t^2+1$$

을 대입하면 변환된 곡선 상의 한 점 (x',y')의 좌표를 매개변수 t에 관해 표현할 수 있다.

$$x'=-4t+2$$

$$y'=-t^2+4t-1$$

즉, 변환된 곡선의 매개변수 형식은 다음과 같다.

$$x=-4t+2 \quad \cdots (1)$$

$$y=-t^2+4t-1 \quad \cdots (2)$$

식 (1)을 변수 t에 관해 풀면 다음과 같다.

$$t=\frac{-x+2}{4}$$

이를 식 (2)에 대입하면,

$$y=-t^2+4t-1=-\left(\frac{-x+2}{4}\right)^2+4\left(\frac{-x+2}{4}\right)-1=\frac{1}{16}\left(-x^2-12x+12\right)$$

즉, 변환된 곡선의 명시적 표현은 아래와 같다.

$$y=-\frac{1}{16}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}$$

따라서

$$g(x)=-\frac{1}{16}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}$$

한편 식 (1)에 의하면 변환된 곡선의 x 좌표가 변수 t 에 관한 일차식으로 표현되므로 변수 t 가

---

* 대학예시답안

0 과 1 사이에서 변할 때, x 좌표의 범위가 아래와 같음을 쉽게 알 수 있다.

$$-4 \cdot 1+2 < x < 4 \cdot 0+2$$

즉,

$$-2 < x < 2$$

따라서 $a=-2$ 이고 $b=2$ 이다.

다른 풀이

주어진 일차변환을 나타내는 행렬을 이용한 관계식

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

의 양변에 $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 의 역행렬 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 을 곱하여 다음의 역변환의 관계식을 얻는다.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

곡선 α 의 암시적 형식 $x^2-4xy+4y^2+4x+8y-12=0$ 에 치환

$$x=x'+2y',\ \ y=x'+y'$$

을 적용한 후 (x',y')을 (x,y) 로 바꾸어 표기하면 다음의 변환된 곡선을 얻을 수 있다.

$$(x+2y)^2-4(x+2y)(x+y)+4(x+y)^2+4(x+2y)+8(x+y)-12=0$$

이를 정리하면

$$x^2+12x+16y-12=0$$

이다. 이 곡선을 명시적으로 표현하면 다음과 같다.

$$y=-\frac{1}{16}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}$$

따라서

$$g(x)=-\frac{1}{16}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}$$

논제 Ⅱ-1*

$n=3$ 일 때, $x \neq 0$ 이면 $(s \circ f)'(x)=\dfrac{\{f(x)\}^2 f'(x)}{\left[\{f(x)\}^3+2\right]^{\frac{2}{3}}}$ 이다.

$f(x)$ 가 연속이므로 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$ 이고, 조건 (c)로부터

$$\lim_{x\to 0}(s \circ f)'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\{f(x)\}^2 f'(x)}{\left[\{f(x)\}^3+2\right]^{\frac{2}{3}}}=1$$

이므로 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\{f(x)\}^2 f'(x)\right]=2^{\frac{2}{3}}$ 이다.

* 대학예시답안

논제 Ⅱ-2*

$h'(x)$가 $x=0$에서 연속이 되려면 제시문 (다)에 의하여

$$h(x)\text{는 } x=0\text{에서 연속이고} \quad \cdots (*)$$

$$\lim_{x\to -0} h'(x) = \lim_{x\to +0} h'(x) \quad \cdots (**)$$

이 성립해야한다. (*)로부터 $\lim_{x\to +0} h(x) = \lim_{x\to +0} \left(s^{(k)} \circ f\right)(x) = h(0) = 6$ 이 성립해야 한다.

$s^{(k)}(x) = \sqrt[n]{x^n + 2k}$ 이므로 $\left(s^{(k)} \circ f\right)(x) = \sqrt[n]{\{f(x)\}^n + 2k}$ 이 되어 $\sqrt[n]{2k} = 6$ 으로부터

$k = 2^{n-1}3^n$ 이다.

$x>0$ 일 때 $\left(s^{(k)} \circ f\right)'(x) = \dfrac{\{f(x)\}^{n-1}f'(x)}{\left[\{f(x)\}^n + 2k\right]^{\frac{n-1}{n}}}$ 이므로 (**)로부터

$$0 = \lim_{x\to +0} \left(s^{(k)} \circ f\right)'(x) = \lim_{x\to +0} \frac{\{f(x)\}^{n-1}f'(x)}{\left[\{f(x)\}^n + 2k\right]^{\frac{n-1}{n}}}$$

이다. 따라서

$$\lim_{x\to +0} \left[\{f(x)\}^{n-1}f'(x)\right] = \lim_{x\to +0} \left[\{f(x)\}^{n-3}\{f(x)\}^2 f'(x)\right] = 0 \quad \cdots (***)$$

이어야 한다.

논제 1의 결과에 의하여 $\lim_{x\to 0}\left[\{f(x)\}^2 f'(x)\right]$은 0이 아닌 실수이고, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ 이므로 (***)가 성립하려면 $n>3$ 이어야 함을 알 수 있다.

이제 $k = 2^{n-1}3^n$ 이므로 $n=4$일 때, $k=648$ 이면 $h'(x)$가 $x=0$에서 연속이다. 따라서 n의 최솟값은 4이고 그 때의 k의 값은 648 이다.

---

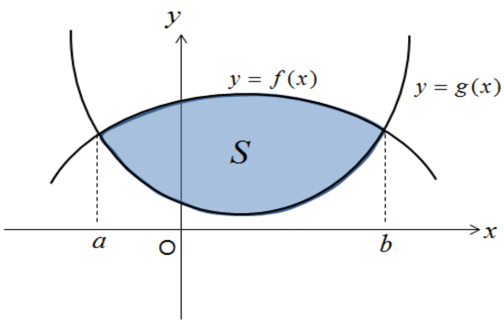
* 대학예시답안

10

동국대학교 모의

제시문 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.*

[가] 아래와 같이 두 연속함수 f, g 의 그래프로 둘러싸인 영역의 넓이 S는 정적분 $\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$ 를 계산하여 구할 수 있다.



[나] 두 실수 $a<b$ 에 대하여 함수 g 가 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속이라고 가정하자. 또한 미분가능한 함수 F의 도함수 f 가 $[a, b]$ 에서 연속이라고 가정하면 다음이 성립한다.

1) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x g(t)\,dt = g(x),\quad a \le x \le b$

2) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$

[다] 열린 구간 (a, b) 에서 정의된 미분가능한 함수 f 의 도함수를 f' 로 놓자. (a, b) 의 모든 x 에 대하여 $f'(x)>0$ 이면 함수 f 는 증가한다. 반대로 (a, b) 의 모든 x 에 대하여 $f'(x)<0$ 이면 함수 f 는 감소한다.

논제 1

$s(x) = \displaystyle\int_0^x 3^t(2^{2t}-19\cdot 2^t+48)\,dt$ 일 때, 구간 $0 \le x \le 4$ 에서 $s(x)$ 의 값이 최대가 되는 x 의 값을 구하는 과정을 풀이와 함께 제시하시오.

<6~8줄>[15점]

논제 2

행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ 에 대하여 두 집합 C, D 를 다음과 같이 정의하자.

* 동국대학교 입학처

$$C=\left\{(x,\,y)\,:\,A\begin{pmatrix}x^2\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\right\},\ \ D=\left\{(x,\,y)\,:\,A\begin{pmatrix}a\\ a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\ a\text{는 실수}\right\}$$

C, D로 둘러싸인 영역을 좌표평면에 나타내고 그 영역의 넓이를 구하는 과정을 풀이와 함께 제시하시오.

<10~11줄>[20점]

논술유형분석

문항 수	수학 2문항, 과학 2문항	시간	120분
연관 개념	도함수의 활용, 일차변환과 행렬		

제시문분석

제시문[가]

정적분을 이용하여 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하는 방법을 설명하고 있다.

제시문[나]

정적분 형태로 주어진 함수의 도함수를 구하는 방법과 미적분의 기본 정리, 정적분의 기본 원리를 설명하고 있다.

제시문[다]

도함수를 활용하여 함수의 증가와 감소를 설명하고 있다.

논제분석

논제 1

정적분 형태로 주어진 함수의 도함수를 구하여 함숫값이 최대가 되게 하는 x의 값을 구할 수 있는지를 묻고 있다.

논제 2

일차변환과 행렬을 이용하여 두 곡선의 방정식을 구할 수 있어야 한다. 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이는 정적분을 이용하여 구할 수 있다.

배경지식쌓기

1. 도함수의 활용

가. 함수의 증가와 감소

함수 $y=f(x)$ 가 어떤 구간에서 미분가능하고, 이 구간의 모든 x 에 대하여

(1) $f'(x)>0$ 이면 $f(x)$ 는 이 구간에서 증가한다.

(2) $f'(x)<0$ 이면 $f(x)$ 는 이 구간에서 감소한다.

나. 함수의 극대와 극소

(1) 함수 $y=f(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이고 x 의 값이 증가하면서 $x=a$ 의 좌우에서

① $f(x)$ 가 증가상태에서 감소상태로 변하면 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극대라고 하며, 함숫값 $f(a)$ 를 극댓값이라고 한다.

② $f(x)$ 가 감소상태에서 증가상태로 변하면 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극소라고 하며, 함숫값 $f(a)$ 를 극솟값이라고 한다.

(2) 극댓값과 극솟값을 통틀어 극값이라고 한다.

다. 극값의 판정

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하고 $x=a$ 에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$ 이다.

라. 함수의 극대와 극소의 판정

미분가능한 함수 $y=f(x)$ 에서 $f'(a)=0$ 이고 $x=a$ 의 좌우에서

(1) $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.

(2) $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극소이다.

2. 정적분의 활용

가. 곡선과 좌표축 사이의 넓이

(1) 함수 $y=f(x)$ 가 구간 $[a,\ b]$ 에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=a$ 와 $x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는

$$S=\int_a^b |f(x)|\,dx$$

(2) 함수 $x=g(y)$ 가 구간 $[c,\ d]$ 에서 연속일 때, 곡선 $x=g(y)$ 와 y 축 및 두 직선 $y=c$ 와 $y=d$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는

$$S=\int_c^d |g(y)|\,dy$$

나. 두 곡선 사이의 넓이

(1) 두 함수 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 가 구간 $[a,\ b]$ 에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$ 와 $x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

(2) 두 함수 $x=g(y)$ 와 $x=h(y)$ 가 구간 $[c,\ d]$ 에서 연속일 때, 두 곡선 $x=g(y)$ 와 $x=h(y)$ 및 두 직선 $y=c$ 와 $y=d$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는

$$S=\int_c^d |g(y)-h(y)|dy$$

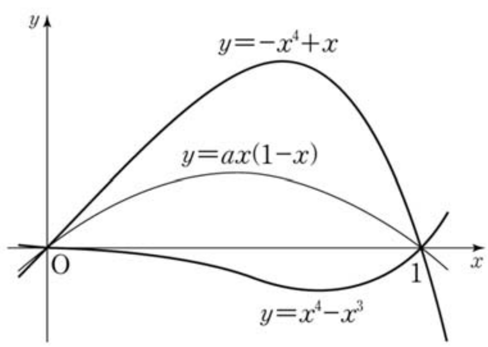
풀어보기

문제 1 다항함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\int_0^x f(t)\,dt = x^3-2x^2-2x\int_0^1 f(t)\,dt$$

일 때, $f(0)=a$ 라 하자. $60a$ 의 값을 구하시오. (2013년 9월 평가원)

문제 2 두 곡선 $y=x^4-x^3$, $y=-x^4+x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이가 곡선 $y=ax(1-x)$ 에 의하여 이등분할 때, 상수 a 의 값은? (단, $0<a<1$ 이다.) (2008년 9월 평가원)



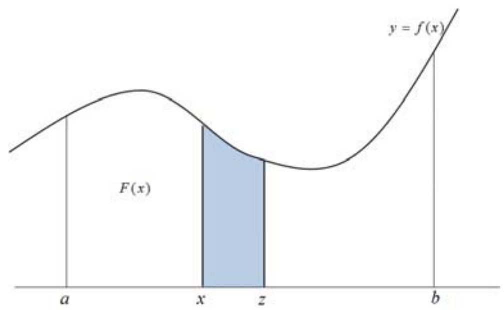
① $\frac{1}{4}$　② $\frac{3}{8}$　③ $\frac{5}{8}$　④ $\frac{3}{4}$　⑤ $\frac{7}{8}$

읽기자료

미적분의 기본 정리*

넓이를 구하기 위한 적분과 변화율과 접선을 구하기 위한 미분은 아무 관련이 없어 보이지만 '미적분의 기본 정리'를 통해 이 두 가지가 매우 밀접하게 관련되어 있음을 알 수 있다. 라이프니츠의 정리라고 부르기도 하는 이 정리는 다항함수에 대해서 토리첼리(1608-1647)가 이미 발견하였고, 그레고리(1638-1675)도 30세의 나이에 증명을 내놓았다. 비교적 일반적이고 만족할 만한 증명은 1669년 아이작 배로(1630-1677)가 쓴 '광학과 기하학 강의'에 등장하기 때문에, 토리첼리-배로 정리라고 부르는 이들도 있다.

1. 미적분의 기본 정리(The Fundamental Theorem of Calculus)



닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 함숫값이 0 이상인 함수 $f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구해보자.
구간 $[a, x]$ 에서 $f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 $F(x)$ 라 하면 구하고자 하는 값은 $F(b)$ 이고 $F(a)=0$ 이다. 이때, 다음 극한값을 생각해본다.

$$F'(x)=\lim_{z\to x}\frac{F(z)-F(x)}{z-x}$$

이때, $F(z)-F(x)$ 는 위의 그림에서 색칠된 영역의 넓이이다. (편의상 z 가 x 보다 큰 경우만 생각하자.) 이 영역의 넓이는 밑변의 길이 $z-x$ 와 구간 내에서의 함숫값의 평균을 곱한 값이다. 따라서 $F(z)-F(x)$ 를 $z-x$ 로 나눈 값은 구간 $[x, z]$ 에서의 함숫값의 평균이다. 그런데 함수가 x 에서 연속이므로, z 가 x 에 가까워지면 이 평균 높이는 당연히 $f(x)$ 로 가까워져야 한다. 즉, 다음과 같은 사실을 알 수 있다.

$$F'(x)=f(x)$$

결국 '넓이를 미분하면 원래 함수가 나온다'는 건데, 이를 미적분의 기본 정리라 부르고 적분 기호를 써서 다음과 같이 표현하기도 한다.

함수 $y=f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(z)dz=f(x)$ 이다.

2. 적분상수

일반적으로, $F'(x)=f(x)$ 인 $F(x)$ 를 $f(x)$ 의 '원시함수' 혹은 '부정적분'이라 부른다. 따라서 넓이를 구하려면, 부정적분을 구하는 방법인 적분법을 알아야 한다.
그런데 부정적분을 하다 보면 다른 사람이 구한 답과 자신의 답이 다른 경우가 종종 있다. 힘들게 구했는데 내 답이 맞는 건지 자신이 없어질 수 있을 것이다. 다행스럽게도 적분에서 그런 걱정은 접어둬도 좋은데, 내가 구한 부정적분과 남이 구한 부정적분은 달라

봐야 상수 차이 밖에 안 나기 때문이다. 즉, 아래 사실이 성립한다.
두 함수 $F(x)$, $G(x)$가 동일한 함수의 부정적분이면 $F(x)=G(x)+C$인 상수 C가 존재한다.
이 사실은 '평균값 정리'라 부르는 정리를 써서 증명하는데, 이 평균값 정리는 특수한 경우인 '롤(Rolle)의 정리'부터 증명하는 게 보통이다. 그런데 롤의 정리의 증명은 연속 함수의 '최대 최소 정리'를 이용한다는 걸 발견할 수 있다. 그 최대 최소 정리는 '실수의 완비성'을 사용해서 증명한다. 자세한 증명은 생략하도록 한다.

3. 정적분과 부정적분

이제 구하려고 했던 넓이 $F(b)$를 구해 보자. $f(x)$의 부정적분을 구했더니 $G(x)$가 나왔다고 하자. $F(x)$도 같은 함수의 부정적분이므로 $F(x)=G(x)+C$인 상수 C가 존재한다. 상수 C를 결정할 때, $F(a)=0$임을 이용하면, $C=-G(a)$라는 것을 알 수 있다. 즉, $f(x)$의 임의의 부정적분 $G(x)$에 대해 $F(b)=G(b)-G(a)$가 성립한다.
경우에 따라서는 이 사실을 미적분의 기본 정리라 부르기도 한다. 구하고자 하는 넓이를 알기 위해서는 아무 부정적분 하나만 구하면 되는 것이다. 이를 적분기호를 사용하여 다시 표현하면, 다음과 같다.
함수 $y=f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속일 때, $f(x)$의 부정적분 중의 하나를 $F(x)$라 하면

$$\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

이 성립한다.

4. 미적분의 기본 정리의 의미

구분구적법을 이용하여 정적분의 값을 계산하는 과정은 쉽지 않다. 그러나 미적분의 기본 정리를 이용하면 피적분함수 $f(x)$의 원시함수 $F(x)$를 구한 다음 정적분의 '위 끝'을 대입한 값에서 '아래 끝'을 대입한 값을 빼주기만 하면 된다. 이것은 놀라운 수학적 발견이라고 할 수 있다.
미적분의 기본 정리는 미분과 적분을 서로 연결시켜준다. 미분학은 변화율, 접선의 기울기를 구하는 문제로부터 시작된 반면에 적분학은 곡선 아래의 넓이를 구하는 문제로부터 시작되었다. 뉴턴의 스승인 아이작 배로는 이 두 문제가 실제적으로 매우 관련이 깊다는 사실을 발견하였다. 미적분의 기본 정리는 미분과 적분이 서로 역연산 관계에 있음을 설명한다고 할 수 있을 것이다.

* 정경훈, 네이버캐스트[수학산책]

예시답안

풀어보기

문제 1 $\int_0^1 f(t)\,dt = k$ (k 는 상수)라고 하면

$$\int_0^x f(t)\,dt = x^3 - 2x^2 - 2kx \quad \cdots\cdots \quad (*)$$

가 되고 양변에 $x=1$ 을 대입하면, $k=1-2-2k$ 에서 $k=-\frac{1}{3}$ 임을 알 수 있다. 이제 (*)의 양변을 x 에 관해 미분하여 다음과 같은 식을 얻는다.

$$f(x) = 3x^2 - 4x - 2k$$

따라서, $a=f(0)=-2k=\frac{2}{3}$ 이고 $60a=60\cdot\frac{2}{3}=40$ 이다.

문제 2 $\frac{1}{2}\int_0^1 \{(-x^4+x)-(x^4-x^3)\}dx = \int_0^1 \{(-x^4+x)-(ax-ax^2)\}dx$ 이므로

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{a}{2}+\frac{a}{3}$$

이고 이것은 정리하면 $a=\frac{3}{4}$ 이다.

논제 1*

제시문 [나]의 1)을 이용하면 $s'(x)=3^x(2^{2x}-19\cdot 2^x+48)=3^x(2^x-3)(2^x-16)$ 이다. 제시문 [다]를 활용하여 $s(x)$ 가 증가하는 구간과 감소하는 구간을 알아보자.
$3<2^x<16$ 인 구간에서만 $s'(x)<0$ 인 사실을 알 수 있다. 즉, $0<x<\log_2 3$ 일 때, $s'(x)>0$ 이므로 $s(x)$는 증가한다. 또한 $\log_2 3<x<4$ 에서 $s'(x)<0$ 이므로 $s(x)$ 는 감소한다. 따라서 $x=\log_2 3=\frac{\log 3}{\log 2}$ 일 때 $s(x)$ 가 최댓값을 갖는다.

---

* 동국대 예시답안 참조

다른 풀이

제시문 [나]의 1)을 이용하면 $s'(x) = 3^x(2^{2x} - 19 \cdot 2^x + 48) = 3^x(2^x - 3)(2^x - 16)$ 이다. $2^x = t$ 라 두면 $0 \le x \le 4$ 이므로 $1 \le t \le 16$ 이고 $s'(x) = t(t-3)(t-16)$ 와 제시문 [다]를 이용하여 $s(x)$ 의 증감을 살펴보면 다음과 같다.

t	$\cdots$	3	$\cdots$	16	$\cdots$
$s'(x)$	+	0	-	0	+
$s(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

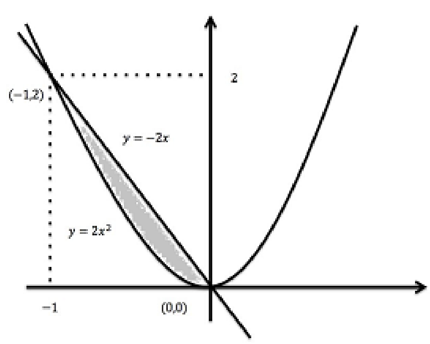
따라서, $t = 2^x = 3$ 일 때 $s(x)$ 는 최대가 된다. 따라서 $x = \log_2 3$ 일 때 $s(x)$ 는 최댓값을 갖는다.

논제 2

$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^2 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 이면 $2x^2 - y = 0$, $-4x^2 + 2y = 0$ 이므로 집합 C는 $y = 2x^2$ 의 그래프이다. 실수 a 에 대해 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 이면 $x = a$, $y = -2a$ 이므로 집합 D는 $y = -2x$ 의 그래프이다. 두 그래프가 만나는 점의 좌표를 구하기 위해 $2x^2 = -2x$ 를 풀면 $x = -1$, $x = 0$ 이다. 즉 두 그래프는 아래 그래프와 같이 $(-1, 2)$ 와 $(0, 0)$ 에서 만난다. 제시문 [가]에서처럼 두 그래프로 둘러싸인 영역의 넓이는

$$S = \int_{-1}^{0} (-2x - 2x^2)\, dx = \left[-x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{3}$$

이다.



11 동국대학교 수시

제시문 I 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.*

【가】 <표 1>은 남아메리카 국가연합에 소속된 12 개국의 면적과 인구의 통계 자료이다. 여기에 나타나는 24 개의 숫자자료 중 첫 번째 자리의 숫자가 1 로 시작하는 항목은 모두 8 개이고, 2 로 시작하는 항목은 총 5 개로 첫 번째 자리의 숫자가 8 이나 9 로 시작하는 항목보다 훨씬 자주 나타나고 있다.

십진수로 표시된 수는 첫 번째 자리에 1 부터 9 까지의 9 가지 숫자가 될 수 있다. 따라서 일반적인 통계자료에서 첫 번째 자리의 숫자가 1 일 확률이 1/9 로 나올 것으로 예상하기 쉽다. 하지만 <표 1>에서처럼 어떤 경우에는 자료의 값이 첫 번째 자리의 숫자가 1 인 경우는 1/9 보다 훨씬 많이 나타나고 반대로 9 는 적게 나타난다. 이러한 현상은 하천의 길이나 호수의 넓이 등 여러 자연현상의 자료뿐만 아니라 개인의 소득, 기업의 회계자료 등 사회현상의 많은 자료에서도 공통적으로 나타난다.

미국 TV 드라마 '넘버스'에는 주인공이 통계 자료의 수가 가지는 이러한 성질을 가지고 범죄를 해결하는 이야기가 나온다. 실제로 사람이 인위적으로 고른 숫자로 만들어진 가짜 자료는 이러한 특성을 따르기가 어렵기 때문에 회계부정이나 위조 자료를 통한 의료보험의 부정수급 등을 적발하는 데 사용한다고 한다.

<표 1> 남아메리카 국가 연합 개요

국가	면적(km^2)	인구(백만명)	국가	면적(km^2)	인구(백만명)
가이아나	214,969	0.7	에콰도르	283,560	13.9
베네수엘라	912,046	27.9	우루과이	177,409	3.3
볼리비아	1,098,575	9.5	칠레	756,626	16.8
브라질	8,547,360	192.4	콜롬비아	1,138,906	48.2
수리남	163,270	0.5	파라과이	406,747	6.5
아르헨티나	2,780,388	39.8	페루	1,285,214	29.1

(자료출처: 『고등학교 세계 지리』)

【나】 자료의 어떤 통계적 특성이 단위에 의존하지 않는다는 것은 다른 단위를 사용하더라도 그 통계적 특성이 바뀌지 않는다는 것을 의미한다. 예를 들어, 길이의 통계 자료를 미터로 나타내거나 리(里) 또는 피트나 야드로 자료의 단위를 바꾸더라도 그 통계적 특성은 유지된다. 특히 경제적 가치는 각 나라의 화폐 단위로 표시되고 다른 화폐 단위로의 변경은 환율을 곱하여 이루어지는데, 환율은 거의 연속적으로 변하는 값이다.

* 동국대학교 입학처

【다】 임의의 양수 N은 $N=a\times10^n$ (n은 정수, $1\le a<10$)의 꼴로 나타낼 수 있다. 따라서 N의 상용로그의 값은

$$\log N=\log(a\times10^n)=\log a+\log10^n=n+\log a$$

이므로 $\log N$의 값을 구하려면 상용로그표에서 $\log a$의 값을 찾고, 이 값에 정수 n을 더하면 된다. 여기서 정수 n을 $\log N$의 지표, $\log a$를 $\log N$의 가수라 한다. 이때 $1\le a<10$이므로 $0\le\log a<1$이다.

-『고등학교 수학』

【라】 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$에 대하여

(1) $f(x)\ge0$

(2) 함수 $f(x)$의 그래프와 x축 사이의 넓이는 1이다.

(3) 확률 $\mathrm{P}(a\le \mathrm{X}\le b)$는 함수 $f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이이다. 즉,

$$\mathrm{P}(a\le \mathrm{X}\le b)=\int_a^b f(x)dx$$

-『고등학교 수학』

논제 I-1

현재 환율이 1달러에 1,000원이라고 하자. 달러의 가치가 원화에 대비하여 매년 2/3씩 하락한다면, 10년 후와 20년 후 각각의 1달러 대비 원화 금액의 첫 번째 자리 숫자가 무엇인지 제시문【다】에서 설명한 상용로그 가수를 이용하여 계산하시오. (단, $\log2=0.3010$, $\log3=0.4771$를 사용하며, 풀이과정을 포함하여 기술하시오.)

<7~13줄> [15점]

논제 I-2

제시문【가】에서 설명한 첫 번째 자리의 숫자의 분포에 대한 법칙을 상용로그 가수의 분포를 통하여 찾고자 한다. 첫 번째 자리의 숫자의 분포를 따르는 상용로그 가수의 확률변수가 제시문【라】에서 설명한 확률밀도함수를 가진다고 하자. 제시문【나】에서 설명한 단위에 의존하지 않는다는 가정을 이용하여 상용로그 가수의 확률밀도함수를 구하시오. 이때 첫 번째 자리의 숫자가 2일 확률을 구하시오. (단, 풀이과정을 포함하여 기술하시오.)

<8~15줄> [25점]

논술유형분석

문항 수	수학 1문항(소문항 2), 과학 2문항	시간	120분
연관 개념	상용로그, 지표와 가수, 확률변수, 확률밀도함수		

제시문분석

제시문【가】

우리 주변에 나타나는 다양한 수치 자료의 첫 자리 수는 1 부터 9 가 동등하게 나타날 것이라고 예상하기 쉽지만 어떤 경우에는 자료의 값이 첫 번째 자리의 숫자가 1 인 경우는 $\frac{1}{9}$ 보다 훨씬 많이 나타나고 반대로 9 는 적게 나타난다는 예를 제시하였고, 이를 이용하여 인위적으로 조작된 가짜 자료를 찾아낼 수도 있다는 것을 설명하고 있다. (이를 벤포드의 법칙이라고 한다.)

제시문【나】

자료의 어떤 통계적 특성은 단위에 의존하지 않는다는 것을 설명하고 있다.

제시문【다】

임의의 양수 N은 $N = a \times 10^n$ (n 은 정수, $1 \le a < 10$)으로 나타낼 수 있고 이로부터 지표와 가수의 뜻을 설명하고 있다.

제시문【라】

연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$ 의 성질에 대해 설명하고 있다.

논제분석

논제 I-1

문제에 제시된 상용로그값을 이용하여 10 년 후와 20 년 후의 1 달러 대비 원화금액의 첫째자리 숫자를 구할 수 있는지를 묻고 있다.

논제 I-2

제시문 【나】에서 설명한 단위에 의존하지 않는다는 가정과 제시문 [라]에서 확률밀도함수 $f(x)$ 의 성질을 이용하여 상용로그 가수의 확률밀도함수를 구할 수 있는지 묻고 있다.

배경지식쌓기

1. 확률변수와 확률분포

가. 확률변수

어떤 시행에서 표본공간 S의 각 원소를 실수의 집합 R의 한 원소에 대응시키는 함수 $X : S \to R$를 **확률변수**라 한다. 예를 들어, 주사위를 던질 때 나오는 눈의 수는 확률변수(X)이며, 이때 그 값이 1 일 확률은 1/6 이 된다. 확률변수에는 확률변수가 취할 수 있는 값들의 집합이 가산집합인 이산확률변수와 확률변수가 취할 수 있는 값들의 집합이 비가산집합인 연속확률변수의 두 종류가 있다.

나. 확률분포

확률변수 X가 취하는 값과 X가 이 값을 취할 확률의 대응 관계를 X의 확률분포라 한다.

2. 이산확률변수와 확률질량함수

가. 이산확률변수 : 확률변수 X가 유한개의 값 또는 자연수와 같이 셀 수 있는 값을 가질 때, X를 **이산확률변수**라 하고, X가 어떤 값 x를 가질 확률을 기호로 $\mathrm{P}(X=x)$와 같이 나타낸다.

나. 확률질량함수 : 이산확률변수 X가 가질 수 있는 값이 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n$ 일 때, X의 각 값에 X가 이 값을 취할 확률 $p_1,\ p_2,\ p_3,\ \cdots,\ p_n$ 을 대응시키는 함수 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$을 이산확률변수 X의 **확률질량함수**라고 한다.

다. 이산확률변수 X의 확률질량함수 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\ (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$에 대하여

(1) $0 \le p_i \le 1$

(2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

(3) $\mathrm{P}(x_i \le X \le x_j) = \displaystyle\sum_{k=i}^{j} p_k$ (단, $i,\ j=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ i \le j$)

이 성립한다.

3. 연속확률변수와 확률밀도함수

가. 연속확률변수 : 확률변수 X가 어떤 구간의 모든 실수값을 취할 때, X를 **연속확률변수**라고 한다.

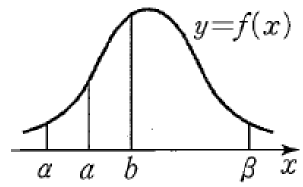
나. 확률밀도함수

닫힌 구간 $[\alpha, \beta]$의 임의의 값을 취하는 연속확률변수 X에 대하여 $f(x)$가 다음과 같은 성질을 가질 때, 함수 $f(x)$를 연속확률변수 X의 **확률밀도함수**라고 한다.

① $f(x) \geq 0$

② $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 1$

③ $\mathrm{P}(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$ (단, $\alpha \leq a \leq b \leq \beta$)



4. 상용로그의 지표와 가수

가. 상용로그 $\log N$의 값이 $\log N = n + \alpha$ (n은 정수, $0 \leq \alpha < 1$)로 표시될 때, 정수 n을 $\log N$의 지표, α를 $\log N$의 가수라 한다.

나. 지표의 성질

(i) $\log N$에서 N의 정수 부분이 n자리이면 지표는 $(n-1)$이다.

(ii) $\log N$에서 N이 소수점 아래 n번째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나면 지표는 $-n$이다.

다. 가수의 성질

진수의 숫자 배열이 같고 소수점의 위치만 다른 수들의 상용로그의 가수는 모두 같다.

풀어보기

문제 1 1 보다 큰 실수 x 에 대하여 $\log x$ 의 지표와 가수를 각각 $f(x), g(x)$ 라 하자. $3f(x)+5g(x)$ 의 값이 10 의 배수가 되도록 하는 x 의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열할 때 2 번째 수를 a, 6 번째 수를 b 라 하자. $\log ab$ 의 값은? (2013년 대수능)

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

문제 2 $\log k = 1.08$ 이라 할 때, 집합 X 는

$$X=\left\{x \,\middle|\, x\text{는 } \log\frac{1}{k^n} \text{ 의 가수, } n\text{은 자연수}\right\}$$

라고 하자. 집합 X 의 모든 원소의 합을 구하시오. (2013년 7월 전국연합)

문제 3 양수 x 에 대하여 $\log x$ 의 지표와 가수를 각각 $f(x)$, $g(x)$ 라 하자. 두 부등식

$$f(n) \le f(54)\ ,\ g(n) \le g(54)$$

를 만족시키는 자연수 n 의 개수는? (2011년 대수능)

① 42 ② 44 ③ 46 ④ 48 ⑤ 50

문제 4 양수 x 에 대하여 $\log x$ 의 가수를 $f(x)$ 라 할 때, $f(2x) \le f(x)$ 를 만족시키는 100 보다 작은 자연수 x 의 개수는? (2012년 6월 평가원)

① 55 ② 57 ③ 59 ④ 61 ⑤ 63

읽기자료

벤포드의 법칙

미국의 천문학자 사이먼 뉴컴은 1881년에 로그표가 담긴 책을 보면서 앞쪽 페이지가 뒤쪽 페이지보다 더 닳아 있다는 것을 발견했다. 이는 사람들이 로그표에서 1로 시작하는 값들을 더 자주 찾아봤음을 의미했다. 물리학자 프랭크 벤포드는 뉴컴의 이런 발견을 1938년에 공식화했다. 벤포드는 강 335개의 넓이, 물리학 상수 104가지, 분자 중량 1800가지 등 20개 분야 자료들의 첫 자리 수 분포를 분석해 '벤포드의 법칙'을 내놓았다. 벤포드의 법칙에 따르면 어떤 분야의 수치들에서 1부터 9까지의 수 n이 첫 자리 수가 될 확률은 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(n)=\log_{10}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

이 확률은 어떻게 해서 나온 값일까?

어떤 수 x의 첫째 자리의 숫자를 d라고 했을 때, 부등식 $d\times 10^n \le x<(d+1)\times 10^n$ 이 성립하고, 10을 밑으로 하는 로그를 이용하면 이 부등식은

$$n+\log_{10}d \le \log_{10}x < n+\log_{10}(d+1)$$

이 된다. 이 부등식에서 $\log_{10}x$의 소수부분은

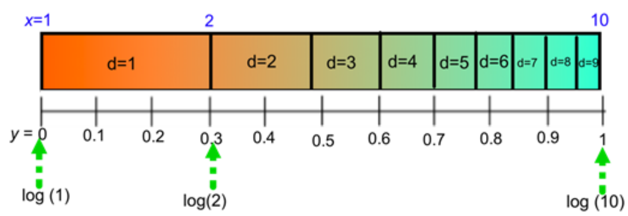
$\log_{10}x-n$이고 $\log_{10}x-n=X$라 두면 다음 부등식을 만족한다.

$$\log_{10}d \le X < \log_{10}(d+1)$$

이때, X는 확률변수로 생각할 수 있으며 0과 1사이에 있다. 또한 확률변수 X가 균등하게 분포되어 있다고 가정하면 X가 0과 1사이의 특정 구간에 있을 확률은 그 구간의 길이에 비례한다. (특히, X의 값이 0과 1사이에 균등하게 분포되어 있으므로 이 경우 X가 0과 1사이의 특정 구간에 있을 확률과 그 구간의 길이는 같은 값을 갖는다.) 이로부터 x의 첫째 자리의 숫자가 d가 될 확률 $\mathrm{P}(d)$는 $\log_{10}d \le X < \log_{10}(d+1)$일 때의 확률이고 따라서

$$\mathrm{P}(d)=\log_{10}(d+1)-\log_{10}d=\log_{10}\left(1+\frac{1}{d}\right)$$

가 성립한다.



[그림출처] http://www.codeproject.com/Articles /215620 /Detecting-Manipulations-in-Data-with-Benford-s-Law

예시답안

풀어보기

문제 1

$f(x)$는 정수이므로 $3f(x)+5g(x)$가 10의 배수가 되기 위해서는 $5g(x)$가 정수가 되어야 한다.
$0 \le g(x) < 1$이므로 $0 \le 5g(x) < 5$

(ⅰ) $5g(x)=0$: $3f(x)$ 가 10 의 배수가 되어야 하므로 $f(x)=10, 20, 30, \cdots$

(ⅱ) $5g(x)=1$: $3f(x)+1$ 이 10 의 배수가 되어야 하므로 $f(x)=3, 13, 23, \cdots$

(ⅲ) $5g(x)=2$: $3f(x)+2$ 가 10 의 배수가 되어야 하므로 $f(x)=6, 16, 26, \cdots$

(ⅳ) $5g(x)=3$: $3f(x)+3$ 이 10 의 배수가 되어야 하므로 $f(x)=9, 19, 29, \cdots$

(ⅴ) $5g(x)=4$: $3f(x)+4$ 가 10 의 배수가 되어야 하므로 $f(x)=2, 12, 22, \cdots$

이것을 크기순으로 나열하면 다음과 같다.

$$(f(x),\ g(x)) = \left(2,\ \frac{4}{5}\right),\ \left(3,\ \frac{1}{5}\right),\ \left(6,\ \frac{2}{5}\right),\ \left(9,\ \frac{3}{5}\right),\ (10,\ 0),\ \left(12,\ \frac{4}{5}\right),\ \cdots$$

따라서 $\log a = \dfrac{16}{5}$, $\log b = \dfrac{64}{5}$ 이므로 $\log ab = 16$

문제 2

$$\log\frac{1}{k^n} = -n\log k = -n(1+0.08) = -n\left(1+\frac{2}{25}\right) = -n-\frac{2n}{25}$$

(ⅰ) $n = 1, 2, 3, \cdots, 12$ 이면 $\log\dfrac{1}{k^n}$ 의 가수는 $1-\dfrac{2n}{25}$,

(ⅱ) $n = 13, 14, 15, \cdots, 24$ 이면 $\log\dfrac{1}{k^n}$ 의 가수는 $2-\dfrac{2n}{25}$,

(ⅲ) $n = 25$ 이면 $\log\dfrac{1}{k^n}$ 의 가수는 0 ,

(ⅳ) $n \ge 26$ 에서는 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 25$ 일 때의 가수가 반복하여 나타난다.

그러므로 집합 X의 원소의 개수는 25 이다.

집합 X의 모든 원소의 합은 $0+\dfrac{1}{25}+\dfrac{2}{25}+\cdots+\dfrac{24}{25} = 12$

문제 3

$\log 54 = 1 + \log 5.4$ 이므로 $f(54)=1$, $g(54)=\log 5.4$. 따라서 주어진 부등식은

$$f(n) \le 1\ ,\ g(n) \le \log 5.4\ \ \cdots\cdots\ ㉠$$

n 은 자연수이므로 $f(n)=0$ 또는 $f(n)=1$

ⅰ) $f(n)=0$ 일 때 ㉠에서 $0 \le \log n - 0 \le \log 5.4$, $1 \le n \le 5.4$

$\therefore\ n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

ⅱ) $f(n)=1$ 일 때 ㉠에서 $0 \le \log n - 1 \le \log 5.4$, $\log 10 \le \log n \le \log 54$

$10 \le n \le 54\ \ \therefore\ n=10,\ 11,\ \cdots,\ 54$

따라서 ⅰ), ⅱ)로부터 구하는 n 의 개수는 $5+45=50$

문제 4

$\log x = n + \alpha$ 로 두면 $\log 2x = \log 2 + \log x = \log 2 + n + \alpha$, $f(x) = \alpha$

$$f(2x) = \begin{cases} \log 2 + \alpha & (\log 2 + \alpha < 1) \\ \log 2 + \alpha - 1 & (\log 2 + \alpha \ge 1) \end{cases}$$

그런데 $f(2x) \le f(x)$ 를 만족해야 한다. $\log 2 + \alpha < \alpha$ 는 불가능하다.

$$\therefore \log 2 + \alpha \ge 1\ ,\ \alpha \ge 1 - \log 2\ ,\ \alpha \ge \log 5$$

즉, x 의 첫 자리수가 5 이상이어야 한다.

그러므로 가능한 한 자리의 자연수 $x=5,6,7,8,9$ 5 개,

두 자리 자연수 $x=50,51,51,\cdots,99$ 50 개

그러므로 100 보다 작은 x 의 개수는 55 개다.

논제 Ⅰ-1*

달러의 가치가 매년 $\dfrac{2}{3}$ 씩 감소한다고 하였으므로 10 년 후에는 1 달러 대비 원화 금액은 $1{,}000 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{10}$ 이 되고 20 년 후에는 그 값이 $1{,}000 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{20}$ 이 된다. 따라서 각각의 경우 1 달러 대비 원화 금액의 상용로그값은

$$3 + 10(\log 2 - \log 3) = 3 + 10(0.3010 - 0.4771) = 1.239 = 1 + 0.239$$

$$3 + 20(\log 2 - \log 3) = 3 + 20(0.3010 - 0.4771) = -0.522 = -1 + 0.478$$

이고 가수는 각각 0.239 와 0.478 이다. 어떤 양수 N의 첫 번째 자리의 숫자가 d 라는 것은 $N = a \times 10^n$ (n 은 정수, $1 \le a < 10$)의 꼴로 나타냈을 때 $d \le a < d+1$ 라는 것이므로, $\log N$ 의 가수는 $\log d \le \log a < \log(d+1)$ 을 만족한다. 따라서 제시된 조건 $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$ 에 의하여 $\log 1 = 0 < 0.239 < \log 2$

* 동국대 예시답안 참조

이고 $\log 3 < 0.478 < \log 4 = 2\log 2$ 임을 알 수 있으므로 첫 번째 자리의 숫자는 각각 1 과 3 이다. 그러므로 10 년 후의 달러 환율의 첫 번째 자리의 숫자는 1 이고, 20 년 후의 달러 환율의 첫 번째 자리의 숫자는 3 이다.

논제 Ⅰ-2

자료의 단위를 다른 단위로 바꾸는 것은 자료의 값에 단위환산율을 곱한다는 것이다. 여기에 상용로그를 취하면 환산율의 로그를 더해준 값이 된다. 임의의 단위환산율을 곱하여 상용로그를 취해도 가수의 분포가 변하지 않는다고 제시문 【나】를 통하여 가정하였으므로 상용로그 가수의 확률변수 X 는 다음을 만족한다.

$$\mathrm{P}(a \le X \le b) = \mathrm{P}(a+c \le X \le b+c) \qquad (\text{단, } a, b, a+c, b+c \in [0,1)\,)$$

주어진 가정에 의하여 X 는 확률밀도함수 $f(x)$ 를 가진다고 하자. 제시문 【라】의 (3)에 의하여 $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx$ 이고, 모든 $a,\ a+c \in [0,1)$ 에 대하여

$$f(a) = \lim_{b \to a} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b \to a} \frac{1}{b-a} \int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx = f(a+c)$$

이다. 즉, $f(x)$ 는 상수함수이다. $f(x)$ 는 제시문 【라】의 (2)에서 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ 이고 $f(x)$ 는 $[0,1)$ 에서 정의된 함수이므로, 확률밀도함수는

$$f(x) = 1 \quad (0 \le x < 1)$$

이다.

자료의 첫 번째 자리의 숫자가 2 일 확률은 자료의 상용로그의 가수가 $\log 2$ 보다 크거나 같고 $\log 3$ 보다 작을 확률과 같으므로

$$\mathrm{P}(\log 2 \le X < \log 3) = \int_{\log 2}^{\log 3} 1\,dx = \log 3 - \log 2 \fallingdotseq 0.1761$$

이다. 그러므로 첫 번째 자리의 숫자가 2 가 나올 확률은 17.61 %이다.

12 부산대학교 수학과학우수자 전형 모의 1차

제시문 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.*

피보나치 수열(Fibonacci sequence) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 은 귀납적으로

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \text{ (모든 } n \geq 1 \text{)}$$

으로 정의된 수열이다. 이 수열의 항을 순서대로 적어보면 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ⋯ 이다. 이 때 극한 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 이 존재하고, 그 극한값 $g = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 를 황금비(golden ratio)라고 한다.

논제 I-1

황금비 g 가 이차방정식 $x^2 - x - 1 = 0$ 의 근임을 보이고, g 의 값을 구하시오. (15점)

논제 I-2

β가 이차방정식 $x^2 - x - 1 = 0$ 의 근이면, 모든 $n \geq 2$ 에 대하여, $\beta^n = a_n\beta + a_{n-1}$ 이 성립함을 증명하시오. (15점)

논제 I-3

모든 $n \geq 1$ 에 대하여, $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$ 이 성립함을 증명하시오. (15 점)

논제 I-4

모든 $n \geq 1$ 에 대하여, 실수 $\frac{1}{\sqrt{5}}g^n$ 에 가장 가까운 자연수가 a_n 임을 증명하시오. (15점)

* 부산대학교 입학처

논술유형분석

문항 수	수학 1문항, 과학 1문항(총 2문항)	시간	100분
연관 개념	이차방정식, 수열, 수열의 극한, 수학적 귀납법		

제시문분석

피보나치수열 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 의 뜻을 설명하고 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 이 존재함은 증명 없이 받아들이기로 하고 그 극한값 $g=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 를 황금비라 한다고 설명하고 있다.

논제분석

논제 1

피보나치수열의 정의와 수열의 극한의 성질을 이용하여 황금비 $g=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 가 $g^2-g-1=0$ 을 만족함을 보일 수 있는지를 묻는 문항이다.

논제 2

수학적 귀납법으로 증명을 할 필요가 있는 명제에 대해 수학적 귀납법을 올바로 적용하여 증명할 수 있는지를 묻는 문항이다.

논제 3

$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 도 이차방정식 $x^2-x-1=0$ 의 한 근이라는 사실과, 논제 2를 이용하여 a_n 의 값을 찾아낼 수 있는 추론능력과 구체적인 식의 조작능력을 묻는 문항이다.

논제 4

어떤 실수가 어떤 자연수와 가장 가깝다는 것이 수직선상에서 어떤 의미를 갖는지, 이를 부등식으로 어떻게 적절히 표현할 것인지에 대한 문항이다.

풀어보기

문제 1 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n}\le\frac{1}{\sqrt{3n+1}}\quad\cdots\cdots\ (\bigstar)$$

이 성립함을 증명하는 과정이다.

<증명>

(i) $n=1$일 때

$\frac{1}{2}\le\frac{1}{\sqrt{4}}$이므로 (★)이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 (★)이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{2k-1}{2k}\times\frac{2k+1}{2k+2}$$

$$\le\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}=\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{1}{1+\boxed{(가)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(1+\boxed{(가)}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3k+1+2(3k+1)\cdot\left(\boxed{(가)}\right)+(3k+1)\cdot\left(\boxed{(가)}\right)^2}}$$

$$<\frac{1}{\sqrt{3k+1+2(3k+1)\cdot\left(\boxed{(가)}\right)+\left(\boxed{(나)}\right)\cdot\left(\boxed{(가)}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3(k+1)+1}}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 (★)이 성립한다.

그러므로 (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 (★)이 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$ 라 할 때, $f(4)\times g(13)$ 의 값은? (2013년 7월 전국연합)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

읽기자료

피보나치수열

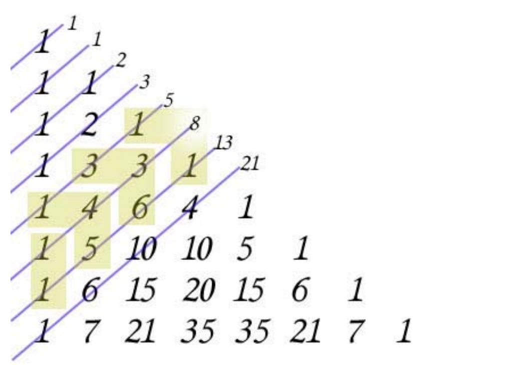
피보나치수열은 여러 가지 성질을 갖는다. 여기서는 그 중 두 가지만 증명해 보도록 하자. 여기서 두 수 a,b 의 최대공약수를 $\gcd(a,b)$, 피보나치수열을 F_n 이라고 표현하자.

정리1	모든 자연수 n 에 대해 $\gcd(F_n,F_{n+1})=1$ 이다.

정리1을 귀류법으로 증명해보자. 1보다 큰 자연수 d 에 대해 $\gcd(F_n,F_{n+1})=d$ 라고 가정하자. 그러면 $F_{n+1}-F_n=F_{n-1}$ 도 d 를 인수로 갖는다. 이와 더불어 또한 $F_n-F_{n-1}=F_{n-2}$ 이므로 F_{n-2} 도 d 를 인수로 갖는다. 이와 같은 과정을 $F_{n-3}, F_{n-4}\cdots$ 등에 계속적으로 적용하면 결국에는 F_1 도 d 를 인수로 갖게 된다. 그런데 $F_1=1$이므로 이는 모순이다. 따라서 1보다 큰 자연수 d 에 대해 $\gcd(F_n,F_{n+1})\neq d$ 이므로 $\gcd(F_n,F_{n+1})=1$이 성립한다.

정리2	$F_{n+1}=\sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]} {}_{n-j}C_j \quad (n\geq 1) \qquad \cdots(*)$

일단, 이 정리2의 의미는 아래 표와 같다.

<table>
<tr><td>1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1</td><td></td></tr>
<tr><td>파스칼의 삼각형을 왼쪽으로 밀어서 위와 같이 재배치한다.</td><td>위와 같은 방식으로 대각선으로 이항계수들을 더하면 피보나치수열이 나타난다.</td></tr>
</table>

정리2를 수학적 귀납법으로 보이자.

$n=1$ 일 때, $F_2=1={}_1C_0$ 이므로 (*)가 성립한다.

$1<k<n$ 인 모든 자연수 k 에대해 (*)이 성립한다고 가정하자. 그러면

$$F_n={}_{n-1}C_0+{}_{n-2}C_1+\cdots+{}_{n-1-[\frac{n-1}{2}]}C_{[\frac{n-1}{2}]} \quad \cdots(1)$$

$$F_{n-1} = {}_{n-2}C_0 + {}_{n-3}C_1 + \cdots + {}_{n-2-[\frac{n-2}{2}]}C_{[\frac{n-2}{2}]} \quad \cdots (2)$$

이 성립한다. 식 (1)과 (2)를 변변 더해주는데 ${}_nC_r$ 에서 n 이 같은 것 끼리 묶어서 더해준다. n 이 짝수일 때와 홀수일 때 식 (1), (2)의 항의 갯수가 같을 수도 있고 (2)의 항의 개수가 (1)의 항의 갯수보다 하나 작을 수도 있기 때문에 n 이 짝수일 때와 홀수일 때를 나눠서 적어보자.

ⅰ) n 이 짝수일 때,

$$\begin{array}{rl} & F_n = {}_{n-1}C_0 + {}_{n-2}C_1 + \cdots + {}_{n-1-[\frac{n-1}{2}]}C_{[\frac{n-1}{2}]} \\ + & F_{n-1} = {}_{n-2}C_0 + {}_{n-3}C_1 + \cdots + {}_{n-2-[\frac{n-2}{2}]}C_{[\frac{n-2}{2}]} \\ \hline \end{array}$$

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

$$= {}_{n-1}C_0 + ({}_{n-2}C_1 + {}_{n-2}C_0) + \cdots + \left({}_{n-1-\frac{n-2}{2}}C_{\frac{n-2}{2}} + {}_{n-1-\frac{n-2}{2}}C_{\frac{n-4}{2}}\right) + {}_{n-2-\frac{n-2}{2}}C_{\frac{n-2}{2}}$$

$$= {}_{n-1}C_0 + {}_{n-1}C_1 + \cdots + {}_{n-\frac{n-2}{2}}C_{\frac{n-2}{2}} + {}_{n-2-\frac{n-2}{2}}C_{\frac{n-2}{2}}$$

$$= {}_nC_0 + {}_{n-1}C_1 + \cdots + {}_{n-\frac{n-2}{2}}C_{\frac{n-2}{2}} + {}_{\frac{n-2}{2}}C_{\frac{n-2}{2}}$$

$$= {}_nC_0 + {}_{n-1}C_1 + \cdots + {}_{\frac{n}{2}+1}C_{\frac{n}{2}-1} + {}_{\frac{n}{2}}C_{\frac{n}{2}} = \sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]} {}_{n-j}C_j$$

이 성립하므로 $k = n+1$ (n 은 짝수)인 경우도 (*)가 성립한다.

ⅱ) n 이 홀수일 때,

$$\begin{array}{rl} & F_n = {}_{n-1}C_0 + {}_{n-2}C_1 + \cdots + {}_{n-1-[\frac{n-1}{2}]}C_{[\frac{n-1}{2}]} \\ + & F_{n-1} = {}_{n-2}C_0 + {}_{n-3}C_1 + \cdots + {}_{n-2-[\frac{n-2}{2}]}C_{[\frac{n-2}{2}]} \\ \hline \end{array}$$

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} = {}_{n-1}C_0 + ({}_{n-2}C_1 + {}_{n-2}C_0) + \cdots + ({}_{n-1-\frac{n-1}{2}}C_{\frac{n-1}{2}} + {}_{n-1-\frac{n-1}{2}}C_{\frac{n-3}{2}})$$

$$= {}_{n-1}C_0 + {}_{n-1}C_1 + \cdots + {}_{n-\frac{n-1}{2}}C_{\frac{n-1}{2}}$$

$$= {}_nC_0 + {}_{n-1}C_1 + \cdots + {}_{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}C_{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} = \sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]} {}_{n-j}C_j$$

이 성립하므로 $k = n+1$ (n 은 홀수)인 경우도 (*)가 성립한다.
따라서 모든 자연수 n 에 대해 (*)가 성립한다.

예시답안

풀어보기

문제 1 정답: ③

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n}\le\frac{1}{\sqrt{3n+1}}\ \cdots(\bigstar)$$

(i) $n=1$ 일 때

$\frac{1}{2}\le\frac{1}{\sqrt{4}}$ 이므로 ($\bigstar$)이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때 ($\bigstar$)이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{2k-1}{2k}\times\frac{2k+1}{2k+2}$$

$$\le\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}=\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{1}{1+\boxed{\frac{1}{2k+1}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(1+\boxed{\frac{1}{2k+1}}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3k+1+2(3k+1)\cdot\left(\boxed{\frac{1}{2k+1}}\right)+(3k+1)\cdot\left(\boxed{\frac{1}{2k+1}}\right)^2}}$$

$$<\frac{1}{\sqrt{3k+1+2(3k+1)\cdot\left(\boxed{\frac{1}{2k+1}}\right)+(\boxed{2k+1})\cdot\left(\boxed{\frac{1}{2k+1}}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3(k+1)+1}}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 ($\bigstar$)이 성립한다.

그러므로 (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 ($\bigstar$)이 성립한다.

$f(k)=\frac{1}{2k+1}$, $g(k)=2k+1$

$\therefore f(4)\times g(13)=\frac{1}{9}\cdot 27=3$

논제 1

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=1+\frac{a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{1}{\frac{a_n}{a_{n-1}}}$$ 이므로

$g=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1+\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}}=1+\frac{1}{g}$ 이고, 따라서 $g^2=g+1$ 이다. 그러므로 g 는 이차방정식 $x^2-x-1=0$ 의 한 근이고, $g\ge 1$ 이 되어 $g=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 이다.

논제 2

β 가 이차방정식 $x^2-x-1=0$ 의 근이므로, $\beta^2=\beta+1$ 이다. $n\ge 2$ 에 관한 수학적 귀납법으로 증명하자. $a_1=a_2=1$ 이므로 $n=2$ 일 때는

$\beta^n=a_n\beta+a_{n-1}$ 이 성립한다. 이제 $n\ge 2$ 에 대하여 $\beta^n=a_n\beta+a_{n-1}$ 이 성립한다고 가정하자.

$$\begin{aligned}\beta^{n+1}&=\beta^n\beta=(a_n\beta+a_{n-1})\beta=a_n\beta^2+a_{n-1}\beta\\&=a_n(\beta+1)+a_{n-1}\beta=(a_n+a_{n-1})\beta+a_n=a_{n+1}\beta+a_n\end{aligned}$$

이 되어 $n+1$ 일 때도 성립한다.

논제 3

$g=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 와 $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 가 이차방정식 $x^2-x-1=0$ 의 두 근이므로 위의 (2)에 의하여

$g^n=a_ng+a_{n-1}$ 와 $\beta^n=a_n\beta+a_{n-1}$ 가 성립한다.

그러므로 $g^n-\beta^n=a_n(g-\beta)=\sqrt{5}\,a_n$ 이다.

따라서 $a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(g^n-\beta^n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$ 이다.

논제 4

$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(g^n-\beta^n)$ 으로부터 $\left|a_n-\frac{1}{\sqrt{5}}g^n\right|=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n<\frac{1}{2}$ 을 얻는다. 그러므로

모든 $n\ge 1$ 에 대하여, 실수 $\frac{1}{\sqrt{5}}g^n$ 에 가장 가까운 자연수가 a_n 이다.

13 부산대학교 수학과학우수자 전형 모의 2차

제시문 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.*

[가] 부분적분법은 적분을 계산하는 중요하고 유용한 방법 중의 하나다. 실수 닫힌구간 $a \le x \le b$ 에서 연속이고 열린구간 $a < x < b$ 에서 미분가능인 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 에 대하여 $\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \{f(b)g(b) - f(a)g(a)\} - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$ 이 성립한다는 것이 부분적분법의 내용이다.

[나] 삼각함수는 수학에서 중요한 함수로, 대단히 넓은 범위에까지 활용되고 있다.
이제 정수 $n \ge 0$ 에 대하여 $I_n = \int_0^\pi (\cos x)^n\,dx \quad (n \ge 0)$ 라 두고 수학적 귀납법과 부분적분을 이용하여 I_n 의 값을 계산해보자.

논제 I-1

부분적분법이 성립하는 이유를 설명하시오. (10점)

논제 I-2

정수 $n \ge 1$ 에 대하여 $f(x) = (\cos x)^{n-1}$, $g(x) = \sin x$ 라 두면 $I_n = \int_0^\pi f(x)g'(x)\,dx$ 이 됨을 설명하시오.(5점)

논제 I-3

정수 $n \ge 2$ 에 대하여, $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ 이 성립함을 증명하시오. (15점)

논제 I-4

$I_8 = \int_0^\pi (\cos x)^8\,dx$ 를 계산하시오.(15점)

논제 I-5

$I_{81} = \int_0^\pi (\cos x)^{81}\,dx$ 를 계산하시오. (15점)

---

* 부산대학교 입학처

논술유형분석

문항 수	수학 1문항, 과학 1문항(총 2문항)	시간	100분
연관 개념	부분적분법, 삼각함수, 수학적 귀납법		

제시문분석

제시문 [가]

부분적분법의 쓰임과 내용에 대해 설명하고 있다.

제시문 [나]

수학적 귀납법과 부분적분법을 이용하여 삼각함수의 적분값 구하기를 설명하고 있다.

논제분석

논제 I-1

제시문 [가]에서 언급한 부분적분법이 성립하는 이유를 묻고 있다.

논제 I-2

제시문 [나]의 물음을 해결하기 위한 첫 과정으로 부분적분법을 사용할 수 있게 함수를 변형하여 계산하도록 묻고 있다.

논제 I-3

제시문 [나]의 물음을 해결하기 위해 점화식을 제시하고, 이를 증명토록 하고 있다.

논제 I-4

[논제 I-3]을 이용하여 구체적인 값을 구할 수 있는지 묻고 있다.

논제 I-5

[논제 I-3]을 이용하여 구체적인 값을 구할 수 있는지 묻고 있다.

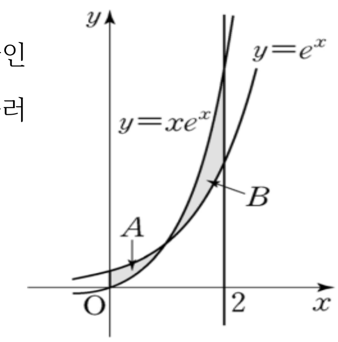
풀어보기

문제 1 자연수 n 에 대하여 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$ 라 할 때, $I_8 = \frac{q}{p} I_4$ 를 만족시키는 서로소인 두 자연수 p 와 q 의 합 $p+q$ 의 값을 구하시오. (2013년 EBS 수능완성 적분과 통계)

문제 2 정의역이 $\{x \mid x > -1\}$ 인 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(x) = \frac{1}{(1+x^3)^2}$ 이고, 함수 $g(x) = x^2$ 일 때, $\int_0^1 f(x)g'(x)dx = \frac{1}{6}$ 이다. $f(1)$ 의 값은? (2012년 6월 평가원)

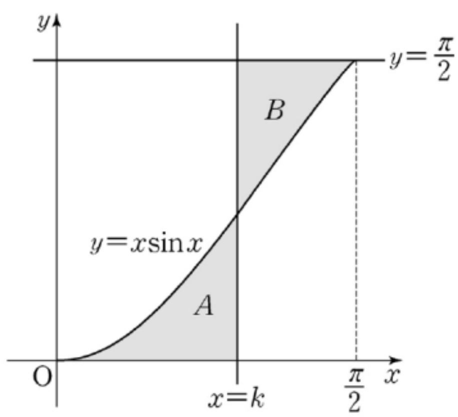
① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{5}{18}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{7}{18}$

문제 3 그림에서 두 곡선 $y=e^x$, $y=xe^x$ 과 y 축으로 둘러싸인 부분 A 의 넓이를 a, 두 곡선 $y=e^x$, $y=xe^x$ 과 직선 $x=2$ 로 둘러싸인 부분 B 의 넓이를 b 라 할 때, $b-a$ 의 값은? (2009년 대수능)



① $\frac{3}{2}$ ② $e-1$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ e

문제 4 그림과 같이 곡선 $y = x\sin x \left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$ 에 대하여 이 곡선과 x축, 직선 $x=k$로 둘러싸인 영역을 A, 이 곡선과 직선 $x=k$, 직선 $y=\frac{\pi}{2}$ 로 둘러싸인 영역을 B라 하자. A의 넓이와 B의 넓이가 같을 때, 상수 k의 값은?(단, $0 \le k \le \frac{\pi}{2}$) (2011년 9월 평가원)



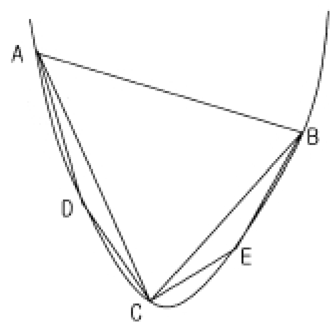
① $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{\pi}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}$ ④ $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{\pi}$ ⑤ $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\pi}$

읽기자료

적분법의 역사

적분법의 개념은 미분법의 개념과는 독립적으로 발달하였다. 그 기원은 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하는 방법을 처음으로 논의한 그리스 시대로 거슬러 올라간다. 아르키메데스(Archimedes ; BC 212~BC 287)는 포물선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 다음과 같이 구하였다. 아래 그림과 같이 선분 AB 의 중점을 지나고 포물선의 축에 평행한 직선이 포물선과 만나는 점을 C 라고 하고, 선분 AC , BC 의 중점을 지나고 포물선의 축에 평행한 직선이 포물선과 만나는 점을 각각 D , E 라고 하자. 포물선의 기하학적 성질로부터 다음이 성립함을 밝혔다.

$$\triangle ADC + \triangle BCE = \frac{1}{4}\triangle ABC$$



아르키메데스는 이러한 생각을 반복하여 포물선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 다음과 같이 구하였다.

$$\triangle ABC + \frac{1}{4}\triangle ABC + \frac{1}{4^2}\triangle ABC + \frac{1}{4^3}\triangle ABC + \cdots$$
$$= \triangle ABC\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots\right) = \frac{4}{3}\triangle ABC$$

그러나 이때에는 엄격한 뜻에서 극한의 개념을 이용하여 넓이를 구한 것은 아니며, 처음으로 극한의 개념을 도입하여 넓이를 구한 사람은 케플러(Kepler, J ; 1571 ~ 1630)이다. 케플러는 원의 넓이를 구하기 위해 원을 작은 삼각형으로 분할하여 삼각형의 넓이의 합의 극한으로 원의 넓이를 계산하였다. 그의 방법은 선을 합하면서 면적을 구하려는 생각으로 적분법과는 다른 방법으로 이루어진 것이다. 이러한 극한에 의한 구분구적법은 뉴턴(Newton, I ; 1642 ~ 1727)과 라이프니츠(Leibniz, G. W. ; 1646 ~ 1716)에 의하여 정적분으로 연결되었다. 라이프니츠는 카발리에리(Cavalieri ; 1598 ~ 1647)의 방법을 따른

원리를 이용해 기하학적인 접선의 관점에서 독립적으로 구적법(적분)과 접선법(미분)이 서로 역연산의 관계가 있음을 밝혔으며 그의 업적은 구적법과 접선법을 합리화하고, dx, dy 등의 기호를 써서 그들 사이의 규칙을 확립하였다. 라이프니츠는 카발리에리의 불가분량의 합을 나타내는 라틴어 sum의 첫 문자를 딴 S를 길게 늘인 문자로서 현대 적분 기호인 $\int$ 를 처음 사용하였다.

Gottfried Wilhelm von Leibniz
그림출처 : www.somangnote.com

또한 그는 적분을 $\int x\,dx$, $\int y\,dy$ 와 같이 쓰는 것과 마찬가지로 미분과 도함수를 오늘날 우리가 사용하는 것과 같이 쓰고 있었다. 하지만 극한의 수학적인 정의를 사용하여 적분의 개념을 정의함으로써 미적분학의 논리적 기초를 엄밀하게 확립한 사람은 프랑스의 코시(Cauchy, A. L. ; 1789 ~ 1857)였고, 그 후 19세기 말경에 독일의 리만(Riemann, G. F. B. ; 1826 ~ 1866)에 의하여 보다 엄밀한 적분법이 확립되었다. 그러나 리만적분법도 적분법으로서 완전한 것이 못되었고, 프랑스의 르베그(Lebesque, H. L. ; 1875 ~ 1941)에 의하여 더욱 일반적인 적분론이 확립되었다.

적분이 실생활과 관련해서 사용되는 몇 가지 예로는 CT(Computed Tomography)가 있다. CT란 병원에서 내장 기관의 상태를 알아 볼 때 쓰이는, 자르지 않고도 단면을 볼 수 있는 장치이다. 우리말로는 '컴퓨터 단층촬영기'로 뇌를 단층 촬영 할 때 뇌를 빙 둘러 가면서 X-ray를 비추어 맞은편에서 그 강도를 측정하는 것이다. 그러면 X-ray가 가는 길에 있는 조직의 밀도를 하나의 함수로 볼 때 그 정적분 값을 알 수 있게 된다. 이런 일을 계속해서 모든 방향에서의 적분값을 알면 계산에 의해 뇌의 2차원적 밀도분포함수를 알아낼 수 있게 된다. 즉 CT의 컴퓨터가 하는 일은 적분값으로부터 원래의 함수를 알아내는 것이다. 또한 댐이 받는 힘을 계산할 때도 적분이 활용된다. 정해진 수면의 깊이에서 댐에 수직으로 미치는 수압이 일정하고 댐의 폭과 댐에 일정 높이까지 물이 찾을 때 미치는 힘이 어떠한지 알아내려면 W(힘)=S(면적)×P(수압)으로 계산할 수 있다. 그러나 댐의 모든 면에서 수압이 일정하지 않아 깊이에 따라 수압이 변하는데, 이것을 미분방정식을 세워 적분시키면 일반방정식으로 구할 수 있다. 그 계산 결과로 댐이 받는 힘에 따라 댐의 밑부분 두께와 윗부분 두께를 변화시켜 나가는 것이다.

예시답안

풀어보기

문제 1

$n \geq 3$ 일 때,

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-1} x \cdot \sin x) dx$

$= \left[-\cos x \cdot \sin^{n-1} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{-\cos x \cdot (n-1)\sin^{n-2} x \cdot \cos x\} \, dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2} x(1-\sin^2 x) \, dx$

$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-2} x - \sin^n x) \, dx$

$= (n-1)(I_{n-2} - I_n)$

따라서 $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ 이므로

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \, (n = 3, 4, \cdots)$$

$$\therefore \; I_8 = \frac{7}{8} I_6 = \frac{7}{8} \times \frac{5}{6} I_4 = \frac{35}{48} I_4$$

$$\therefore \; p = 48, \; q = 35$$

$$\therefore p + q = 83$$

문제 2

$\int_0^1 f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_0^1 - \int_0^1 f'(x)g(x)dx = f(1)g(1) - f(0)g(0) - \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^3)^2} dx$

$g(1) = 1, \; g(0) = 0$ 이고

$1 + x^3 = t$ 로 치환하면

$$f(1) - \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{1}{t^2} \, dt = f(1) - \frac{1}{6}$$

$f(1) - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$ 이므로 $f(1) = \frac{1}{3}$ 이다.

문제 3

두 곡선의 교점의 x 좌표를 구하면

$$xe^x = e^x \text{ 에서 } xe^x - e^x = 0$$

$$e^x(x-1)=0 \qquad \therefore\ x=1$$

$$a=\int_0^1 (e^x - xe^x)dx = \int_0^1 (1-x)e^x dx$$

여기에서 $f(x)=1-x$, $g'(x)=e^x$ 으로 놓으면 $f'(x)=-1$, $g(x)=e^x$ 이므로

$$= \left[(1-x)e^x\right]_0^1 + \int_0^1 e^x dx$$

$$=-1+\left[e^x\right]_0^1 \ =-1+(e-1)\ = e-2$$

$$b=\int_1^2 (xe^x - e^x)dx = \int_1^2 (x-1)e^x dx$$

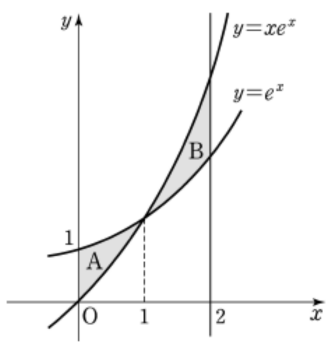
여기에서 $f(x)=x-1$, $g'(x)=e^x$ 으로 놓으면 $f'(x)=1$, $g(x)=e^x$ 이므로

$$= \left[(x-1)e^x\right]_1^2 - \int_1^2 e^x dx$$

$$= e^2 - \left[e^x\right]_1^2 = e^2 - \left(e^2 - e\right) = e$$

$$\therefore\ b-a = e-(e-2)=2$$

다른 풀이



두 부분의 넓이의 차 $b-a$ 는 $y=xe^x - x$ 의 정적분 결과와 같다.

$$b-a=\int_0^2 (xe^x - e^x)dx = \int_0^2 (x-1)e^x dx$$

$$= \left[(x-1)e^x\right]_0^2 - \int_0^2 e^x dx = 1-(-e^2)-(e^2-1)=2$$

문제 4

$$\int_0^k x\sin x dx = \int_k^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2} - x\sin x dx) dx$$

$$\int_0^k x\sin x dx = \int_k^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} dx - \int_k^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$$

$$\int_0^k x\sin x dx + \int_k^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx = \int_k^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx = \int_k^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} dx$$

이때, $f(x) = x$, $g'(x) = \sin x$ 라고 하면 $f'(x) = 1$, $g(x) = -\cos x$ 이므로

(좌변)$= [-x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

(우변)$= \left[\frac{\pi}{2}x\right]_k^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2}k$

따라서 $1 = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2}k$ 이므로 $\frac{\pi}{2}k = \frac{\pi^2}{4} - 1$

$$\therefore\ k = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}$$

논제 I -1*

주어진 구간에서 미분가능인 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 에 대하여
$\{f(x)g(x)\}' = f(x)'g(x) + f(x)g(x)'$ 이 성립하므로

$$\int_a^b \{f(x)g(x)\}' dx = \int_a^b \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\} dx$$

이다.

한편 $\int_a^b \{f(x)g(x)\}' dx = f(b)g(b) - f(a)g(a)$ 이고

$$\int_a^b \{f(x)'g(x) + f(x)g(x)'\} dx = \int_a^b f'(x)g(x) dx + \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

이므로 정리하면

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = \{f(b)g(b) - f(a)g(a)\} - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

을 얻는다.

---

* 부산대 예시답안 참조

논제 I -2

$(\sin x)' = \cos x$ 이므로, 정수 $n \ge 1$ 에 대하여 $f(x) = (\cos x)^{n-1}$, $g(x) = \sin x$ 라 두면,
$\int_0^{\pi} f(x) g'(x) dx = \int_0^{\pi} (\cos x)^{n-1} (\sin x)' dx = I_n$ 이다.

논제 I -3

$n \ge 2$ 일 때,

$$I_n = \int_0^{\pi} (\cos x)^n dx = \int_0^{\pi} (\cos x)^{n-1} (\sin x)' dx$$

$$= [(\cos x)^{n-1} \sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \{-(n-1)(\cos x)^{n-2} (\sin x)^2\} dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\pi} \{(\cos x)^{n-2} - (\cos x)^n\} dx = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

이고 정리하면

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

을 얻게 된다.

논제 I -4

위의 3번 관계식을 반복해서 적용하면

$$I_8 = \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} I_0 = \frac{35}{128} I_0$$

이다.

한편 $I_0 = \int_0^{\pi} dx = \pi$ 이므로 $I_8 = \frac{35}{128}\pi$ 이다.

논제 I -5

역시 3번 문제의 관계식을 반복해서 이용하면

$$I_{81} = \frac{80}{81} \cdot \frac{78}{79} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} I_1$$

이다. 한편 $I_1 = \int_0^{\pi} \cos x \, dx = 0$ 이므로 $I_{81} = 0$ 이다.

14 부산대학교 수학과학우수자 전형 모의 3차

제시문 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.*

[가] 치환적분법은 적분을 계산하는 중요하고 유용한 방법 중의 하나다.
두 함수 $y=f(x)$ 와 $x=g(t)$ 가 모두 미분가능이면, 함수 y 의 도함수는 합성함수의 미분법인 연쇄법칙에 의하여 $\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}=f'(g(t))g'(t)$ 가 성립한다.
한편 함수 $x=g(t)$ 가 구간 $\alpha \le t \le \beta$ 에서 증가함수이고, $g(\alpha)=a$ 이고 $g(\beta)=b$ 이면, $\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)\,dt=\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ 이 성립한다는 것이 치환적분법의 내용이다.

[나] 이차곡선의 하나인 타원은 두 초점으로부터의 거리의 합이 일정하다. 또한 하나의 초점에서 나온 빛은 타원면에 반사한 뒤에 다른 초점으로 향한다. 이러한 성질을 이용하면 실생활에 흥미로운 응용이 가능하다. 한 예로, '속삭이는 회랑'을 들 수 있는데, 영국 런던의 성 바오로 대성당은 타원형으로 생긴 천장이 있어서 복도 한 곳(초점)에서 작은 소리로 속삭이면, 조금 떨어진 곳에서는 못 듣는데도 더 멀리 있는 특정한 장소(다른 초점)에서는 또렷하게 들린다. 이것은 한 초점에서 소리를 내면 타원의 성질로 인하여 음파가 천장에서 반사된 뒤 다른 초점에 모이게 되기 때문이다. 또한 타원형 풀장, 타원모양의 그림이나 디자인도 생활 주변에서 종종 접하게 된다.

논제 1

치환적분법이 성립하는 이유를 원시함수를 이용하여 증명하시오.(15점)

논제 2

이제 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a, b>0)$ 의 내부의 넓이를 치환적분을 이용하여 구하려고 한다.
편의상 구하려는 타원의 넓이를 A 라고 하자.

1. $A=\frac{4b}{a}\int_{0}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ 이 됨을 설명하시오.(15점)
2. $x=a\sin t$ 로 치환하면, $\int_{0}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\cos t)^2\,dt$ 이 됨을 증명하시오.(15점)
3. 위의 치환과정을 이용하여, A 의 값을 구하시오.(15점)

* 부산대학교 입학처

논술유형분석

문항 수	수학 1문항, 과학 1문항(총 2문항)	시간	100분
연관 개념	치환적분법, 이차곡선(타원)		

제시문분석

제시문[가]

치환적분법의 쓰임과 내용에 대해 설명하고 있다.

제시문[나]

이차곡선의 하나인 타원의 성질에 대해 설명하고 있다.

논제분석

논제 1

제시문 [가]에서 언급한 치환적분법이 성립하는 이유를 묻고 있다.

논제 2

타원의 방정식을 제시하고, 타원의 넓이를 치환적분법을 사용하여 구하는 과정을 제시하고 있다.

논제 2-1

[논제 2]에서 언급한 타원의 넓이를 적분으로 나타내고, 이를 설명하도록 하고 있다.

논제 2-2

[논제 2-1]의 해결을 위해 변수를 치환하고, 제시된 치환적분법에 의한 적분에 관한 식을 증명토록 하고 있다.

논제 2-3

[논제 2-1], [논제 2-2]를 이용하여 [논제 2]에서 제시한 타원의 넓이를 구하도록 하고 있다.

풀어보기

문제 1 연속함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = e^{x^2} + \int_0^1 tf(t)dt$$

를 만족시킬 때, $\int_0^1 xf(x)dx$ 의 값은? (2012년 대수능)

① $e-2$ ② $\frac{e-1}{2}$ ③ $\frac{e}{2}$ ④ $e-1$ ⑤ $\frac{e+1}{2}$

문제 2 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 t 에 대하여 $\int_0^2 xf(tx)dx = 4t^2$ 을 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값은? (2010년 9월 평가원)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

문제 3 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 있다. 모든 실수 x 에 대하여 $f(2x) = 2f(x)f'(x)$ 이고, $f(a) = 0$, $\int_{2a}^{4a} \frac{f(x)}{x}dx = k$ $(a > 0,\ 0 < k < 1)$ 일 때, $\int_a^{2a} \frac{\{f(x)\}^2}{x^2}dx$ 의 값을 k 로 나타낸 것은? (2010년 대수능)

① $\frac{k^2}{4}$ ② $\frac{k^2}{2}$ ③ k^2 ④ k ⑤ $2k$

읽기자료

치환 적분의 활용

1. 타원의 넓이 구하기

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

타원의 넓이를 S라고 하면 $\dfrac{S}{4}=\displaystyle\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ 에서 $x=a\sin\theta$ 로 치환하면

$dx=a\cos\theta d\theta,\ x=0 \Rightarrow \theta=0, x=a \Rightarrow \theta=\dfrac{\pi}{2}$ 이므로

$$\frac{S}{4}=\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}\,a\cos\theta d\theta=ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=\frac{ab\pi}{4}$$

$$\therefore S=ab\pi$$

2. 치환적분을 사용하여 적분을 간단하게 변형하기

함수 $f(x)$ 가 연속이고 임의의 실수 a 에 대하여 $\displaystyle\int_0^{\frac{a}{2}}(f(x)+f(a-x))dx$ 는 다음과 같이 변형시킬 수 있다. $\displaystyle\int_0^{\frac{a}{2}}f(a-x)dx$ 에서 $a-x=t$ 로 두면

$-dx=dt$ 이고 $x=0$ 일 때 $t=a$, $x=\dfrac{a}{2}$ 일 때 $t=\dfrac{a}{2}$ 이므로

$$\int_0^{\frac{a}{2}}f(a-x)dx=\int_a^{\frac{a}{2}}f(t)(-dt)=\int_{\frac{a}{2}}^a f(t)dt=\int_{\frac{a}{2}}^a f(x)dx$$

이다. 따라서 $\displaystyle\int_0^{\frac{a}{2}}(f(x)+f(a-x))dx=\int_0^{\frac{a}{2}}f(x)dx+\int_{\frac{a}{2}}^a f(x)dx=\int_0^a f(x)dx$ 이다.

예시답안

풀어보기

문제 1

$f(x)=e^{x^2}+\int_0^1 tf(t)dt$ 에서 $\int_0^1 tf(t)dt=a$ 라 하면 $f(x)=e^{x^2}+a$ 이므로

$a=\int_0^1 tf(t)dt \;=\int_0^t t\left(e^{t^2}+a\right)dt \;=\int_0^1\left(te^{t^2}+at\right)dt \;=\int_0^1 te^{t^2}dt+\left[\frac{a}{2}t^2\right]_0^1 \;=\int_0^1 te^{t^2}dt+\frac{a}{2}$

$t^2=z$ 로 놓으면

$t=0$ 일 때 $z=0$, $t=1$ 일 때 $z=1$ 이고, $2t=\frac{dz}{dt}$ 이므로

$$\int_0^1 te^{t^2}dt=\int_0^1\frac{e^z}{2}dz=\left[\frac{e^z}{2}\right]_0^1=\frac{e}{2}-\frac{1}{2}$$

따라서 $a=\frac{e}{2}-\frac{1}{2}+\frac{a}{2}$ 에서 $a=e-1$

$$\therefore\ \int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 tf(t)dt=a=e-1$$

문제 2

$tx=a$로 치환하면,

$$\int_0^2 xf(tx)dx=\int_0^{2t}\frac{a}{t^2}f(a)da=4t^2$$

$\int_0^{2t}af(a)da=4t^4$, 양변을 t 에 대하여 미분하면 $4tf(2t)=16t^3$, $t=1$ 을 대입하면

$$4f(2)=16,\ f(2)=4$$

문제 3

조건에서 $f(a)=0$ 이고 $f(2x)=2f(x)f'(x)$ 이므로 $f(2a)=2f(a)f'(a)=0$

또한 $f(4a)=2f(2a)f'(2a)=0$ 이다.

$\int_a^{2a}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2}dx=\int_a^{2a}x^{-2}\{f(x)\}^2dx=[-x^{-1}\{f(x)\}^2]_a^{2a}-\int_a^{2a}-x^{-1}\cdot 2f(x)f'(x)dx$

($\because$ 부분적분법)

$$=0+\int_a^{2a}x^{-1}\cdot 2f(x)f'(x)dx=\int_a^{2a}\frac{2f(x)f'(x)}{x}dx=\int_a^{2a}\frac{f(2x)}{x}dx$$

여기서 $2x=t$ 로 치환하면 $2dx=dt \Leftrightarrow dx=\frac{1}{2}dt$

$\begin{cases} x=a \to t=2a \\ x=2a \to t=4a \end{cases}$ 로 변환되므로

$$=\int_{2a}^{4a}\frac{1}{2}\frac{f(t)}{\frac{1}{2}t}dt=\int_{2a}^{4a}\frac{f(t)}{t}dt=k$$

논제 1

F를 f의 한 부정적분(원시함수)라 하자. 즉, $\int f(x)dx=F(x)+C$ (C는 상수)이다.

정적분의 기본 정리에 의하여

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)}f(x)\,dx=[F(x)]_{g(\alpha)}^{g(\beta)}=F(g(\beta))-F(g(\alpha)) \quad \text{--------①}$$

이다.

한편, 연쇄법칙과 $f(x)$와 이것의 한 부정적분인 $F(x)$의 관계 $F'=f$에 의하여

$$\frac{d}{dt}(F(g(t)))=F'(g(t))g'(t)=f(g(t))g'(t)$$

이고, 다시 정적분의 기본 정리에 의하여

$$F(g(\beta))-F(g(\alpha))=[F(g(t))]_\alpha^\beta=\int_\alpha^\beta\frac{d}{dt}(F(g(t))\,dt=\int_\alpha^\beta f(g(t))\,g'(t)\,dt \quad \text{--②}$$

이다.

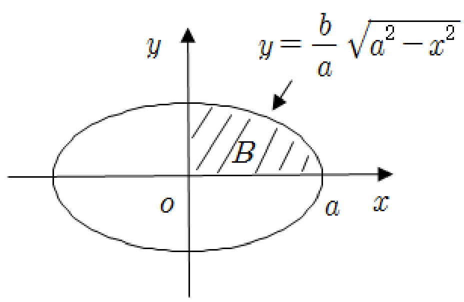
따라서 ①과 ②에 의하여

$$\int_\alpha^\beta f(g(t))\,g'(t)\,dt=\int_a^b f(x)\,dx$$

이다.

논제 2-1

좌표평면 위에 주어진 타원을 그리면 제 1사분면에 있는 함수는 $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ 이다.([그림 1])



[그림 1]

따라서 제 1사분면에 위치한 타원의 일부분의 넓이를 B라 하고 타원곡선과 x축으로 둘러싸인

부분의 넓이를 구하면

$$A = 4 \times B$$

$$= 4 \times \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{4b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

논제 2-2

주어진 문제에서 $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$, $g(t) = x = a\sin t$ 으로 두면 f 는 구간 $0 \le x \le a$ 에서 잘 정의된 연속이고, g 는 삼각함수로 항상 미분가능하고, 구간 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 에서 증가함수이다. 따라서 치환적분법을 이용할 수 있다.

$f(x) = f(a\sin t) = \sqrt{a^2 - (a\sin t)^2} = a\cos t$, $g'(t) = a|\cos t|$ 이용하면

구간 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 에서 $f(g(t))g'(t) = a^2(\cos t)^2$ 이고

또한 g 는 구간 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 에서 증가함수이고

$$g(\alpha) = a\sin\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0\ ,\ g(\beta) = a\sin\beta = a \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\pi}{2}$$

이다. 따라서 치환적분법을 적용하면

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^2\, dt$$

이 성립한다.

논제 2-3

(2)와 (3)의 과정에 의하여 주어진 타원의 넓이 A 는

$$A = \frac{4b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^2\, dt$$

$$= 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt = 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\, dt$$

$$= 2ab \times \frac{\pi}{2} = \pi ab$$

이다.

15 부산대학교 일반전형 모의 1차

제시문 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.*

> 임의의 실수 α, β 에 대하여 아래의 결과는 쉽게 유도할 수 있는 성질이다.
> $$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$$
> $$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$$

논제 I-1

제시문의 성질을 이용하여, 실수 α, β 에 대하여
$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ 이 성립함을 보이시오. (10점)

논제 I-2

실수 $x\left(0<|x|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 에 대하여, 부등식 $|\sin x|<|x|<|\tan x|$ 이 성립하는 이유를 설명하시오. (20점)

논제 I-3

위의 부등식을 이용하여, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 이 됨을 증명하시오. (10점)

논제 I-4

도함수의 정의를 이용하여, $(\sin x)'=\cos x$ 임을 증명하시오. (20점)

* 부산대학교 입학처

논술유형분석

문항 수	수학 1문항, 과학 1문항	시간	100분
연관 개념	삼각함수, 삼각함수의 덧셈정리, 함수의 극한과 미분		

제시문분석

삼각함수의 여러 공식 중 사인함수의 덧셈 정리를 설명하고 있다.

논제분석

논제 I-1

제시문의 정리를 이용하여 주어진 명제를 증명하는 문항이다.

논제 I-2

주어진 실수 x 의 범위에서 사인함수, 탄젠트함수의 성질을 이용하여, 문제의 부등식이 성립함을 보이는지 묻고 있다.(함수의 증가, 감소를 이용하여 문제를 해결 할 수도 있다.)

논제 I-3

[논제 I-2]에서 구한 부등식을 변형하여 함수의 극한의 대소관계를 적용할 수 있는지 묻고 있다.

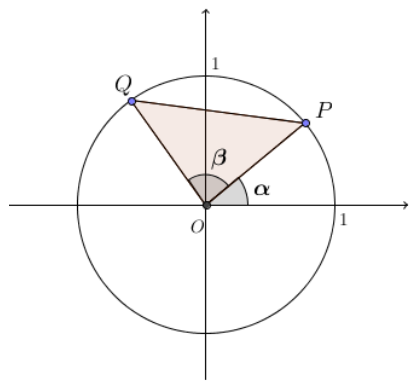
논제 I-4

[논제 I-1], [논제 I-2], [논제 I-3]에서 증명한 내용을 활용하여 사인함수의 도함수를 유도할 수 있는지 묻고 있다.

배경지식쌓기

1. 삼각함수의 덧셈 정리

가. 코사인함수의 덧셈 정리



오른쪽 그림과 같이 두 각 α ,β 를 나타내는 두 동경이 단위원과 만나는 점을 각각 P ,Q 라고 하면

$$P(\cos\alpha,\ \sin\alpha),\ Q(\cos\beta,\ \sin\beta)$$

이다. 이때, $\triangle OPQ$ 에서 제이코사인법칙에 의하여

$\overline{PQ}^2=\overline{OP}^2+\overline{OQ}^2-2\cdot\overline{OP}\cdot\overline{OQ}\cdot\cos(\angle POQ)$

이고, $\overline{OP}=\overline{OQ}=1$,$\angle POQ=\beta-\alpha$ 이므로

$$\overline{PQ}^2=1+1-2\cdot1\cdot1\cdot\cos(\beta-\alpha)$$

한편, 좌표평면 위에서 두 점 사이의 거리 구하는 공식에 의하여

$\overline{PQ}^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=2-2(\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha)$이다.

따라서 $2-2(\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha)=1+1-2\cdot1\cdot1\cdot\cos(\beta-\alpha)$

$$\therefore\ \cos(\beta-\alpha)=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha\ \cdots\cdots㉠$$

㉠에 α 대신 $-\alpha$ 를 대입하여 정리하면 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$가 성립한다.

나. 사인함수의 덧셈 정리

$\sin\theta=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$ 이므로

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left\{\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right\}=\cos\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right\}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta$$

$$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\therefore\ \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\ \cdots\cdots㉡$$

㉡에 β 대신 $-\beta$ 를 대입하여 정리하면

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

다. 탄젠트함수의 덧셈 정리

사인함수와 코사인함수의 덧셈정리를 이용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

우변의 분모, 분자를 $\cos\alpha\cos\beta\,(\cos\alpha\cos\beta\neq0)$로 각각 나누면

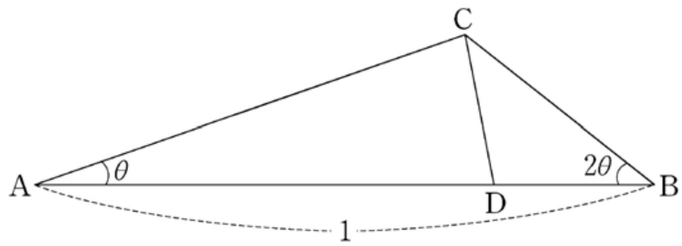
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\ \cdots\cdots㉢$$

㉢에 β 대신 $-\beta$ 를 대입하여 정리하면 $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$가 성립한다.

풀어보기

문제 1 삼각형 ABC 에서 $\overline{AB}=1$ 이고 $\angle A=\theta$, $\angle B=2\theta$ 이다. 변 AB 위의 점 D를 $\angle ACD=2\angle BCD$ 가 되도록 잡는다. $\lim_{\theta\to+0}\frac{\overline{CD}}{\theta}=a$ 일 때, $27a^2$ 의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) (2012년 대수능)



문제 2 두 수열 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 이 각각

$$\begin{cases} x_1=\sqrt{3} \\ x_{n+1}=x_n+\sqrt{1+x_n^2} \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1=\sqrt{3} \\ y_{n+1}=\dfrac{y_n}{1+\sqrt{1+y_n^2}} \end{cases}$$

로 정의된다. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 $2<x_ny_n\le 3$ 이 성립함을 증명한 것이다.

<증명>

(1) 수열 $\{x_n\}$ 의 일반항을 구해보자.

$x_n=\tan\alpha_n$ $(0°<\alpha_n<90°)$ 이라 하자.

$x_{n+1}=\tan\alpha_n+\sec\alpha_n=\dfrac{1+\sin\alpha_n}{\cos\alpha_n}$ 을 $\sin\alpha_n=2\sin\dfrac{\alpha_n}{2}\cos\dfrac{\alpha_n}{2}$,

$\cos\alpha_n=\cos^2\dfrac{\alpha_n}{2}-\sin^2\dfrac{\alpha_n}{2}$ 임을 이용하여 정리하면, $x_{n+1}=$ $\boxed{\text{(가)}}$ 이다.

따라서 $\alpha_1=60°$, $\alpha_2=75°$, $\alpha_3=82.5°$,⋯이므로 $\alpha_n=90°-\dfrac{30°}{2^{n-1}}$ 이 된다.

$\therefore x_n=\tan\left(90°-\dfrac{30°}{2^{n-1}}\right)=\cot\left(\dfrac{30°}{2^{n-1}}\right)\cdots㉠$

(2) 수열 $\{y_n\}$ 의 일반항을 구해보자.

$y_n = \tan\beta_n$ $(0° < \beta_n < 90°)$ 이라 하자. $y_{n+1} = \dfrac{\tan\beta_n}{1+\sec\beta_n} = \boxed{(나)}$ 이다.

따라서 $\beta_1 = 60°$, $\beta_2 = 30°$, $\beta_3 = 15°$,⋯이므로

$\beta_n = \dfrac{60°}{2^{n-1}}$ 이 된다. $\therefore y_n = \tan\left(\dfrac{60°}{2^{n-1}}\right)$ ⋯ⓛ

$\gamma_n = \dfrac{30°}{2^{n-1}}$ 라 하면, ㉠과 ⓛ에 의하여 $x_n y_n = \dfrac{2}{1-\tan^2\gamma_n}$ 이 된다.

∴모든 자연수 n에 대하여 $0 < \tan\gamma_n \le \boxed{(다)}$ 이므로 $2 < x_n y_n \le 3$ 이 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? (2007년 10월 대전교육청)

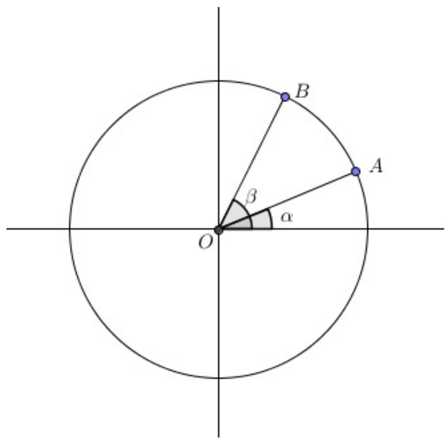
	(가)	(나)	(다)
①	$\tan\left(\dfrac{90°+\alpha_n}{2}\right)$	$\tan\dfrac{\beta_n}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
②	$\cot\alpha_n$	$\tan(90°+\beta_n)$	$\sqrt{3}$
③	$\tan\left(\dfrac{90°+\alpha_n}{2}\right)$	$\tan(90°+\beta_n)$	$\sqrt{3}$
④	$\cot\alpha_n$	$\tan\dfrac{\beta_n}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
⑤	$\tan\left(\dfrac{90°+\alpha_n}{2}\right)$	$\tan(90°+\beta_n)$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

읽기자료

삼각함수의 덧셈정리의 다른 증명 방법

1. 벡터의 내적을 이용

아래 그림과 같이 반지름이 1 인 원이 있다.



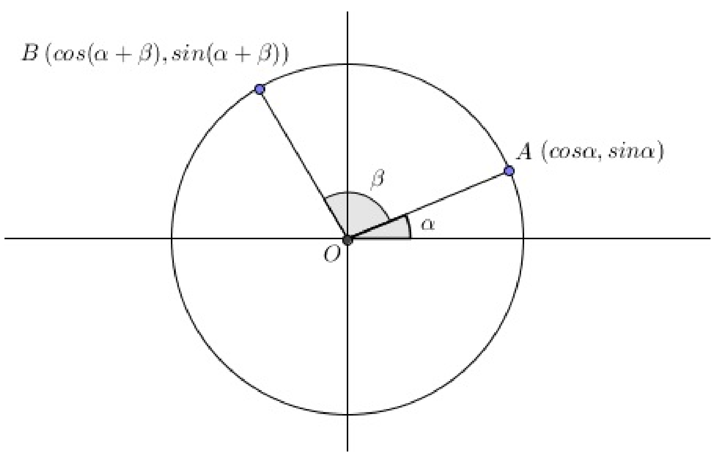
벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (\cos\beta, \sin\beta)$이고, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ 을 내적하면

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{OB}} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}| \cdot |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| \cos(\beta - \alpha)$$

이므로

$$\cos(\beta-\alpha) = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| \cdot |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|} = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

2. 회전변환을 이용

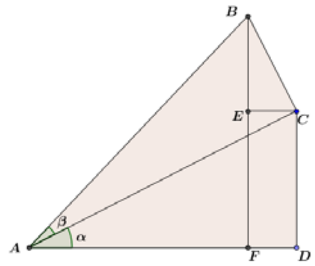


점 A 에서 점 B 로 회전변환하면 아래와 같다.

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta \end{pmatrix}$$

3. 삼각형을 이용

$\overline{AB}=1$ 이라 두자.



그림에서

$$\sin(\alpha+\beta)=\overline{BF}\ ,\ \overline{BF}=\overline{BE}+\overline{EF}$$

이다. 그리고

$$\angle ACE=\alpha,\ \angle BCE=\frac{\pi}{2}-\alpha$$

이므로

$$\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\overline{BE}}{\overline{BC}},\ \sin\alpha=\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$$

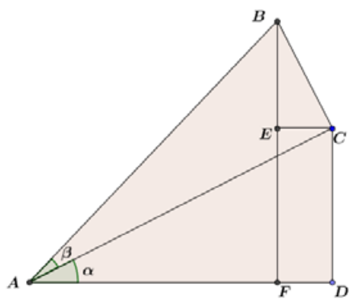
이다. 여기서

$$\overline{BC}=\sin\beta,\ \overline{AC}=\cos\beta$$

따라서

$$\sin(\alpha+\beta)=\overline{BF}=\overline{BE}+\overline{EF}=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

또한,



$\cos(\alpha+\beta)=\overline{AF}$ 이고 $\overline{AF}=\overline{AD}-\overline{DF}$ 이다. 그리고

$$\cos\alpha=\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}},\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha=\frac{\overline{CE}}{\overline{BC}},\ \overline{BC}=\sin\beta,\ \overline{AC}=\cos\beta$$

이므로

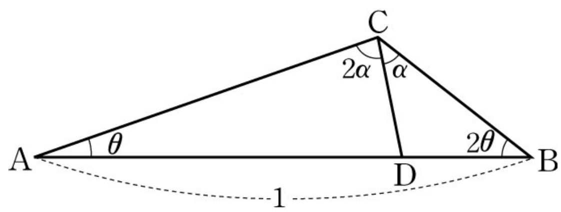
$$\cos(\alpha+\beta)=\overline{AF}=\overline{AD}-\overline{DF}=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

예시답안

풀어보기

문제 1

$\angle BCD = \alpha$ 라 하면 사인법칙에서



$$\frac{\overline{CD}}{\sin\theta} = \frac{\overline{AD}}{\sin 2\alpha},\quad \frac{\overline{CD}}{\sin 2\theta} = \frac{\overline{BD}}{\sin\alpha}$$

$$\therefore \overline{AD} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin\theta}\overline{CD},\quad \overline{BD} = \frac{\sin\alpha}{\sin 2\theta}\overline{CD}$$

$\overline{AD} + \overline{BD} = 1$ 이므로

$$\overline{CD} = \frac{1}{\frac{\sin 2\alpha}{\sin\theta} + \frac{\sin\alpha}{\sin 2\theta}}$$

한편, $3\theta + 3\alpha = \pi$ 이므로 $\alpha = \frac{\pi}{3} - \theta$

$$\therefore \lim_{\theta\to+0}\frac{\overline{CD}}{\theta} = \lim_{\theta\to+0}\frac{1}{\frac{\sin 2\alpha}{\sin\theta}\cdot\theta + \frac{\sin\alpha}{\sin 2\theta}\cdot\theta} = \lim_{\alpha\to\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin 2\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}}$$

$$= \frac{4}{3\sqrt{3}} = a$$

$$\therefore 27a^2 = 27\cdot\frac{16}{27} = 16$$

문제 2

(가) $\frac{1+\sin\alpha_n}{\cos\alpha_n}$ 을 정리하여보자.

$$\sin\alpha_n = 2\sin\frac{\alpha_n}{2}\cos\frac{\alpha_n}{2},\quad \cos\alpha_n = \cos^2\frac{\alpha_n}{2} - \sin^2\frac{\alpha_n}{2}$$

분자는 $\left(\sin\frac{\alpha_n}{2} + \cos\frac{\alpha_n}{2}\right)^2$ 이고, 분모는 $\left(\cos\frac{\alpha_n}{2} - \sin\frac{\alpha_n}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha_n}{2} + \sin\frac{\alpha_n}{2}\right)$ 이므로

$$\frac{1+\sin\alpha_n}{\cos\alpha_n} = \frac{\cos\frac{\alpha_n}{2} + \sin\frac{\alpha_n}{2}}{\cos\frac{\alpha_n}{2} - \sin\frac{\alpha_n}{2}}$$

이다.

분모, 분자를 $\cos\frac{\alpha_n}{2}$ 로 나누면

$$\frac{1+\tan\frac{\alpha_n}{2}}{1-\tan\frac{\alpha_n}{2}} = \frac{\tan 45^\circ+\tan\frac{\alpha_n}{2}}{1-\tan 45^\circ \tan\frac{\alpha_n}{2}} = \tan\left(45^\circ+\frac{\alpha_n}{2}\right)$$

(나) $\frac{\tan\beta_n}{1+\sec\beta_n} = \frac{\sin\beta_n}{1+\cos\beta_n}$ 에서

$\sin\beta_n = 2\sin\frac{\beta_n}{2}\cos\frac{\beta_n}{2}$, $\cos\beta_n = 2\cos^2\frac{\beta_n}{2}-1$ 에 의하여 $\tan\frac{\beta_n}{2}$ 이 된다.

(다) $\gamma_n = \frac{30^\circ}{2^{n-1}}$ 에서 n 은 자연수이므로 $0<\gamma_n \le 30^\circ$ 을 얻을 수 있다.

따라서 $0<\tan\gamma_n \le \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이 된다.

논제 I -1*

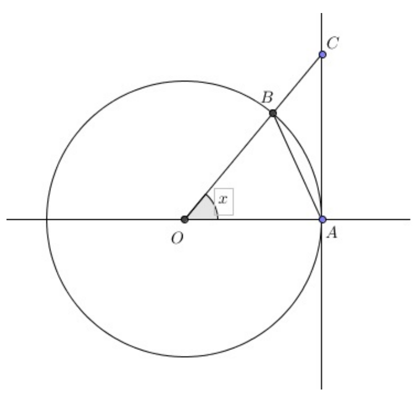
$\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}$, $\beta = \frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}$ 이므로

$$\sin\alpha = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\sin\beta = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

이다. 그러므로 $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ 이 성립한다.

논제 I -2



* [논제 I -1], [논제 I -2], [논제 I -3], [논제 I -4] 부산대 예시답안 참조

위의 그림과 같이 반지름 1 인 원을 하나 그리고, 중심을 O 라 하자. 원주 위의 두 점 A, B 를 중심각이 $\angle AOB = x$ 가 되도록 잡고, A 를 지나는 원의 접선과 직선 $\overleftrightarrow{OB}$ 가 만나는 점을 C 라고 하자. 분명히 삼각형 OAB 의 면적은 부채꼴 OAB 의 면적보다 작고, 또 부채꼴 OAB 의 면적은 삼각형 OAC 의 면적보다 작다. 한편 삼각형 OAB 의 면적은 $\frac{1}{2}|\sin x|$, 부채꼴 OAB 의 면적은 $\frac{1}{2}|x|$, 그리고 직각삼각형 OAC 의 면적은 $\frac{1}{2}|\tan x|$ 이다. 그러므로 부등식 $|\sin x| < |x| < |\tan x|$ 이 성립한다.

다른 풀이

(ⅰ) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 일 때,

(1) $f(x) = x - \sin x$ 라 하자. 함수 f는 실수 전체에서 미분가능이므로, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 $f'(x) = 1 - \cos x > 0$ 이다. 그러므로 함수 f 는 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 증가함수이다. 그리고 $f(0) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1 > 0$ 이므로 함수 f 는 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 양수이다.

따라서 $\sin x < x$ 이다.

(2) 그리고 $g(x) = \tan x - x$ 라 하자. 함수 g 는 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 미분가능이므로,

$$g'(x) = \sec^2 x - 1 = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} > 0$$

함수 g 는 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 증가함수이다. 그리고 $g(0) = 0$ 이므로 함수 g 는 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 양수이다.

따라서 $\tan x > x$ 이다.

이를 종합하면 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 $\sin x < x < \tan x$

(ⅱ) $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 일 때,

(ⅰ)의 x 를 $-x$ 로 바꾸면 $-\sin x = \sin(-x) < -x$ 이므로 $\sin x > x$.

$-x < -\tan x = \tan(-x)$ 이므로 $x > \tan x$

따라서 $\tan x < x < \sin x$ 이다.

(ⅰ), (ⅱ)를 종합하면 $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ 인 x 에 대해 $|\sin x| < |x| < |\tan x|$ 이 성립한다.

논제 Ⅰ-3

주어진 범위의 x 값에 대하여 x, $\sin x$, $\tan x$ 의 부호가 모두 같으므로 $1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}$ 이고, 역수를 취하면 $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$ 이다. 그러므로 $1 = \lim\limits_{x\to 0}\cos x \le \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} \le 1$ 이 되어 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ 이다.

논제 Ⅰ-4

도함수의 정의에 의하여 $(\sin x)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}$ 이다. 한편

$$\sin(x+\Delta x)-\sin x = 2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

이므로, 위의 부등식을 적용하면

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2}{\Delta x}\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = 1\cdot\cos x = \cos x\end{aligned}$$

이다.

16 부산대학교 일반전형 모의 2차

제시문 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.*

(가) 사인함수와 코사인함수의 각의 합의 공식은 아래와 같다.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

(나) 복소수 $z=a+ib$ (a, b는 실수, $i^2=-1$) 에 대하여 원점에서 점 $P(a,b)$ 까지의 거리 $\sqrt{a^2+b^2}$ 를 z 의 크기(혹은 절댓값)이라 하고 $|z|$ 로 나타낸다. 또한 $z\neq 0$ 일 때, 원점에서 점 $P(a,b)$ 를 잇는 선분과 x-축 양의 방향 사이의 각 α 를 z 의 편각이라 하고 $\alpha=\arg(z)$ 로 나타낸다. $z=0$ 일 때는 편각으로 어떠한 값이라도 취할 수 있다.

(다) (오일러의 공식) 크기가 1 이고 편각이 α 인 복소수를 $e^{i\alpha}$ 로 표시한다. 즉, $e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha$ 이다.

(주: 오일러의 공식이라고 부르는 표현 $e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha$ 은 함수의 멱급수를 이용하여 그 표현식의 타당성을 보일 수 있다.)

논제 I-1

실수 α, β 에 대하여, $e^{i\alpha}e^{i\beta}=e^{i(\alpha+\beta)}$ 이 성립함을 증명하시오. (10점)

논제 I-2

임의의 실수 α 에 대하여, $(e^{i\alpha})^{-1}=e^{-i\alpha}$ 임을 증명하시오. (10점)

논제 I-3

복소수 $z=a+ib$ 의 편각이 α 이면, $z=|z|e^{i\alpha}$ 로 쓸 수 있음을 설명하시오. (10점)

논제 I-4

임의의 두 복소수 z_1, z_2 에 대하여, $\arg(z_1z_2)=\arg(z_1)+\arg(z_2)$ 이 성립함을 증명하시오. (15점)

논제 I-5

오일러공식을 이용하여, $(\sqrt{3}+i)^{11}$ 을 $a+ib$ 꼴로 나타내시오. (15점)

---

* 부산대학교 입학처

논술유형분석

문항 수	수학 1문항, 과학 1문항	시간	100분
연관 개념	삼각함수의 덧셈정리, 복소수의 극형식, 오일러 공식		

제시문분석

제시문

(가)에서 사인함수, 코사인함수의 덧셈정리를 제시하고 있다. (나)에서는 복소수를 극형식으로 나타낼 때, 여러 가지 용어를 설명하고 있다. 또, (다)에서는 복소수와 관련된 중요한 공식 중 하나인 오일러의 공식을 제시하고 있다.

논제분석

논제 I-1

제시문의 내용을 이용하여 주어진 명제를 증명하는 문항이다.

논제 I-2

[논제 I-1]을 이용하여 주어진 명제를 증명하는 문항이다. 또는, 제시문의 내용을 이용하여 증명할 수도 있다.

논제 I-3

제시문의 내용을 이용하여 오일러 공식의 형태로 변형시킬 수 있는지 묻고 있다. 그리고 $z=0$일 때의 증명을 제시해야한다.

논제 I-4

[논제 Ⅰ-1], [논제 Ⅰ-3]에서 증명한 내용을 이용하여 주어진 명제를 증명하는 문항이다.

논제 I-5

[논제 Ⅰ-1]에서 [논제 Ⅰ-4]에서 증명한 내용을 이용하여 주어진 문제를 해결 할 수 있는 지 묻고 있다.

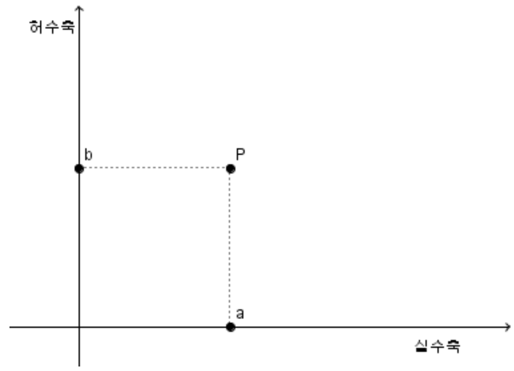
배경지식쌓기

1. 복소평면

실수를 수직선 위의 점에 대응시킬 수 있는 것처럼 복소수를 평면 위의 점에 대응시킬 수 있다. 복소수 $a+bi$ (a, b는 실수)를 좌표평면 위의 점 $P(a, b)$에 대응시키면 그 대응

$$a+bi \to P(a, b)$$

에 의하여 복소수는 좌표평면 위의 각 점은 복소수를 나타내는 것으로 생각할 때 이 평면을 복소평면(가우스평면)이라고 한다.



또, 실수 a는 x축 위의 점 $(a,0)$으로, 순허수 bi는 y축 위의 점 $(0,b)$로 나타낼 수 있으므로 x축을 실수축, y축을 허수축이라고 한다.

복소수 $z=a+bi$에 대응되는 복소평면 위의 점 $P(a,b)$의 x좌표인 a와 y좌표인 b를 각각 복소수 $z=a+bi$의 실수부분와 허수부분이라고 하고 다음과 같이 나타낸다.

$$Re(z)=a, \ Im(z)=b$$

그리고 실수부분과 허수부분의 성질은 다음과 같다. 복소수 $z=a+bi$에 대하여

가. $Re(z)=\frac{1}{2}(z+\overline{z})$

나. $Im(z)=\frac{1}{2i}(z-\overline{z})=\frac{i}{2}(\overline{z}-z)$

다. $Re(\overline{z})=Re(z)$, $Im(\overline{z})=-Im(z)$

라. $Re(iz)=-Im(z)$, $Im(iz)=Re(z)$

마. $Re\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{Re(z)}{a^2+b^2}$, $Im\left(\frac{1}{z}\right)=-\frac{Im(z)}{a^2+b^2}$ (단, $z\neq 0$)

2. 드무아브르의 정리

n개의 복소수 $z_1, z_2, \ldots, z_n$에 대하여 다음 등식이 성립한다.

가. $|z_1 z_2 \cdots z_n| = |z_1||z_2|\cdots|z_n|$

나. $\arg(z_1 z_2 \cdots z_n)=\arg(z_1)+\arg(z_2)+\cdots+\arg(z_n)$

복소수 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$에 위의 두 등식과 수학적 귀납법을 이용하면, 모든 자연수 n에 대하여

$$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

임을 알 수 있다. 또한

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^{-n}=\left\{(\cos\theta+i\sin\theta)^n\right\}^{-1}=(\cos n\theta+i\sin n\theta)^{-1}=\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)$$

가 되어, 모든 정수 n에 대하여

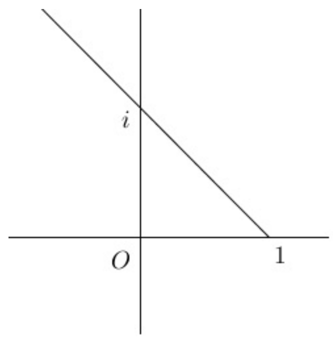
$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

가 성립한다. 이를 **드무아브르의 정리**라 한다.

풀어보기

문제 1 복소수 z가 $z+\bar{z}=2$, $\arg(z)=\dfrac{\pi}{3}$를 만족시킬 때, z^3의 값은? (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이며, $\arg(z)$는 z의 편각이다.) (1999년 대수능)

문제 2 복소평면 위의 점 $P(1)$에서 i를 지나는 반직선 위의 점들의 집합을 A라 하자.
$z^5=1$을 만족하는 서로 다른 5개의 복소수 중에서 A의 적당한 원소와의 곱이 실수가 되는 원소의 개수는?
(단, $i=\sqrt{-1}$) (1995년 대수능)



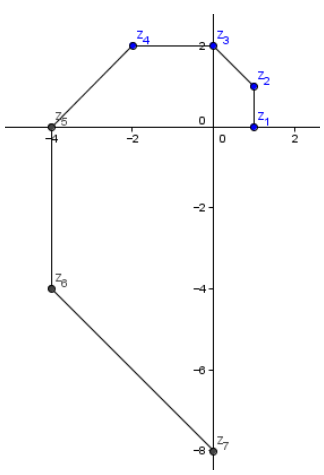
문제 3 두 복소수 $z_1=i$, $z_2=1+i$에 대하여 다음 중 편각의 크기가 가장 큰 것은? (단, $i=\sqrt{-1}$이고, 편각의 크기 θ의 범위는 $0\le\theta<2\pi$로 한다.) (1997년 대수능)

① $4z_1$ ② z_1+z_2 ③ z_1-z_2 ④ z_1z_2 ⑤ $\dfrac{z_1}{z_2}$

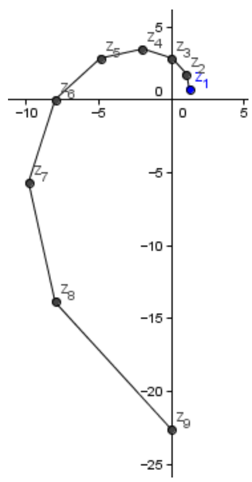
읽기자료

복소평면에서의 소용돌이

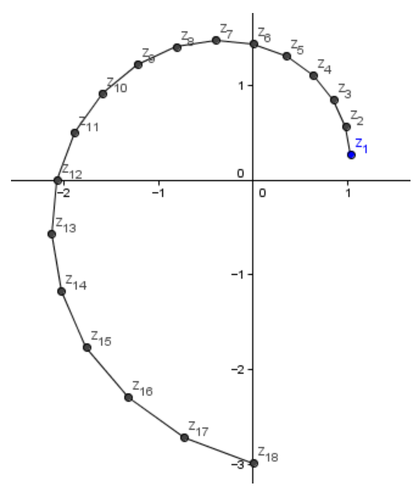
복소평면 상에 점 a_1 이 있다고 하자. $a_1=1$ 이라 두고 복소수 $w=1+i$ 를 계속 곱해가면서 점을 표시하자.
예를 들면, $a_2=1\times w=1\times(1+i)=1+i$, $a_3=a_2\times w=(1+i)^2=2i$,
$a_4=a_3\times w=(1+i)^3=-2+2i$ 과 같이 계속 점을 찍어나가게 된다. 각 인접한 점들에 선분을 그으면 <그림1>과 같은 형태가 된다.
그리고 $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ 이므로 각을 $\frac{\pi}{4}$ 만큼 회전하면서 원점에서의 거리는 점점 길어진다.
이번에는 절댓값이 1 보다 크고, 각을 $\frac{\pi}{6}$ 만큼 회전하면서 점들을 찍어보자. 그러면 <그림 2>와 같은 형태가 된다.
또, 절댓값이 1 보다 크고, 각을 $\frac{\pi}{12}$ 만큼 회전하면서 점들을 찍어보면 <그림3>과 같은 형태가 된다.
각이 점점 작아지면 작아질수록 소용돌이의 형태를 띄는 것을 알 수 있다.



<그림 1>



<그림 2>

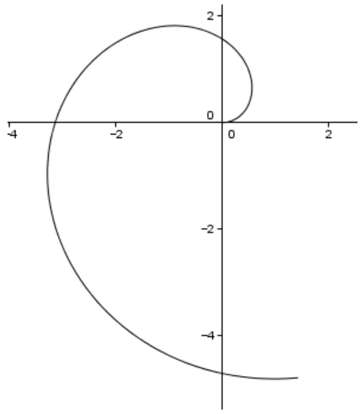


<그림 3>

이러한 소용돌이의 형태는 원뿔형 꼭대기에서 일정한 경사를 이루면서 그려지는 곡선을 꼭대기에서 바라보는 것과 같다.
예를 들면, 곡선 $\alpha(t)=(t\cos t,\, t\sin t,\, t)$ (단, $t>0$)은 원뿔나선(conical helix)이다. 이 곡선을 미분하면 $\alpha'(t)=(\cos t-t\sin t,\, \sin t+t\cos t,\, 1)$ 이고 $\alpha'(t)$ 는 t 에서 곡선의 접선

이다. z 축의 단위벡터는 $(0,0,1)$ 이고 $\alpha'(t)$ 과 $(0,0,1)$ 의 내적 $\alpha'(t)\cdot(0,0,1)=1$ 이므로 양수 t 에 대해 항상 일정한 각을 이룬다.

이 곡선을 $xy-$평면으로 정사영시키면 $\beta(t)=(t\cos t,\ t\sin t)$ (단, $t>0$)이다. 이 곡선을 그리면 다음과 같다.



이 그래프는 <그림 3>과 매우 유사함을 알 수 있다.
이러한 독특한 나선을 '대수 나선'이라고 하는데, 자연계에서도 흔히 볼 수 있는 형태이다. 예를 들면, 조개껍데기 위의 선이나 소라껍데기의 선이나 해바라기 씨의 배열, 우주의 성운 모양 등이 이러한 형태를 띈다.

예시답안

풀어보기

문제 1

$\arg(z)=\frac{\pi}{3}$ 이므로 $|z|=r$ 라 하면

$$z=r(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}),\ \bar{z}=r(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3})$$

주어진 조건에서 $z+\bar{z}=2$ 이므로

$$r(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})+r(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3})=2$$

$$2r\cos\frac{\pi}{3}=2,\ 2r\times\frac{1}{2}=2 \quad \therefore r=2$$

따라서 $z=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$ 이다.

드 무아브르의 정리에 의하여

$$z^3=\left\{2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})\right\}^3=2^3\left\{\cos(3\times\frac{\pi}{3})+i\sin(3\times\frac{\pi}{3})\right\}=8(\cos\pi+i\sin\pi)=-8$$

문제 2

$A=\left\{\alpha \,\middle|\, \alpha-1=r\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)\right\}$

$\alpha=1+r\cos\frac{3}{4}\pi+ir\sin\frac{3}{4}\pi\ (r\geq 0)$

$z^5=1,\ z=\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5},\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$

$\alpha z=\left(1+r\cos\frac{3}{4}\pi+ir\sin\frac{3}{4}\pi\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5}\right)$

$=\left(1+r\cos\frac{3}{4}\pi\right)\cos\frac{2k\pi}{5}-r\sin\frac{3}{4}\pi\sin\frac{2k\pi}{5}+i\left\{\left(1+r\cos\frac{3}{4}\pi\right)\sin\frac{2k\pi}{5}+r\sin\frac{3}{4}\pi\cos\frac{2k\pi}{5}\right\}$

$\alpha z\in R$ 이려면 허수부분이 0이어야 하므로

$\left(1+r\cos\frac{3}{4}\pi\right)\sin\frac{2k\pi}{5}+r\sin\frac{3}{4}\pi\cos\frac{2k\pi}{5}=0$

$\sin\frac{2k\pi}{5}+r\sin\left(\frac{2k\pi}{5}+\frac{3\pi}{4}\right)=0$

(1) $k=0$ 이면 $r=0$ 이 되어 실수가 된다.

(2) $k=1$ 이면 $\sin\frac{2\pi}{5}+r\sin\left(\frac{2\pi}{5}+\frac{3\pi}{4}\right)=0$

$\sin\frac{2\pi}{5}>0$, $\sin\left(\frac{2\pi}{5}+\frac{3\pi}{4}\right)<0$ 이므로 실수가 된다.

(3) $k=2$ 이면 $\sin\frac{4\pi}{5}+r\sin\left(\frac{4\pi}{5}+\frac{3\pi}{4}\right)=0$

$\sin\frac{4\pi}{5}>0$, $\sin\left(\frac{4\pi}{5}+\frac{3\pi}{4}\right)<0$ 이므로 실수가 된다.

(4) $k=3$ 이면 $\sin\frac{6\pi}{5}+r\sin\left(\frac{6\pi}{5}+\frac{3\pi}{4}\right)=0$

$\sin\frac{6\pi}{5}<0$, $\sin\left(\frac{6\pi}{5}+\frac{3\pi}{4}\right)<0$ 이므로 실수가 되지 않는다.

(5) $k=4$ 이면 $\sin\frac{8\pi}{5}+r\sin\left(\frac{8\pi}{5}+\frac{3\pi}{4}\right)=0$

$\sin\frac{8\pi}{5}<0$, $\sin\left(\frac{8\pi}{5}+\frac{3\pi}{4}\right)>0$ 이므로 실수가 된다. 따라서 $k=0,\ 1,\ 2,\ 4$의 4가지이다.

문제 3

① $4z_1=4i=4(\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ)$

② $z_1+z_2=i+1+i=1+2i=\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{5}}i\right)=\sqrt{5}(\cos\theta+i\sin\theta)$

여기서 $\tan\theta=2$이므로 $0^\circ<$ 편각 $<90^\circ$

③ $z_1-z_2=i-(1+i)=-1=\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ$

$\therefore$ (편각) $=180^\circ$

④ $z_1z_2=i(i+1)=-1+i=\sqrt{2}(\cos 135^\circ+i\sin 135^\circ)$

$\therefore$ (편각) $=135^\circ$

⑤ $\frac{z_1}{z_2}=\frac{i}{1+i}=\frac{i(1-i)}{2}=\frac{i+1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)$

$\therefore$ (편각) $=45^\circ$

따라서 편각이 가장 큰 것은 z_1-z_2 이다.

논제 I -1*

제시문을 이용하여

$$\begin{aligned}e^{i\alpha}e^{i\beta}&=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)\\&=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+i(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\\&=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

그러므로 오일러 공식을 이용하여

$$e^{i\alpha}e^{i\beta}=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)=e^{i(\alpha+\beta)}$$

* [논제 I -1], [논제 I -2], [논제 I -3], [논제 I -4], [논제 I -5] 부산대 예시답안 참조

논제 Ⅰ-2

$$e^{i\alpha}e^{-i\alpha}=e^{i(\alpha-\alpha)}=e^{0i}=\cos 0+i\sin 0=1$$
$$\therefore (e^{i\alpha})^{-1}=e^{-i\alpha}$$

다른 풀이

$$(e^{i\alpha})(e^{-i\alpha})=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\alpha-i\sin\alpha)$$
$$=(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+i(\sin\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)=1$$
$$\therefore (e^{i\alpha})^{-1}=e^{-i\alpha}$$

논제 Ⅰ-3

$z=0$ 일 때는 $|z|=0$ 이므로 $z=0=|z|e^{i\alpha}$ 이 성립한다.

$z\neq 0$ 일 때는 크기가 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}\ (\neq 0)$ 이므로

$$z=a+ib=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha+i\sin\alpha)$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\,e^{i\alpha}=|z|e^{i\alpha}$$

논제 Ⅰ-4

두 복소수 $z_1=a_1+b_1i$ 와 $z_2=a_2+b_2i$ 의 편각을 각각 α, β 라 두면,

$$z_1=a_1+ib_1=|z_1|(\cos\alpha+i\sin\alpha)=|z_1|e^{i\alpha}$$
$$z_2=a_2+ib_2=|z_2|(\cos\beta+i\sin\beta)=|z_2|e^{i\beta}$$

로 쓸 수 있다. 한편 [**논제 Ⅰ-1**]에 의하여,

$$z_1z_2=|z_1|e^{i\alpha}|z_2|e^{i\beta}$$
$$=|z_1||z_2|e^{i\alpha}e^{i\beta}=|z_1||z_2|e^{i(\alpha+\beta)}$$
$$=|z_1||z_2|\{\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)\}$$

이므로 $\arg(z_1z_2)=\alpha+\beta=\arg(z_1)+\arg(z_2)$

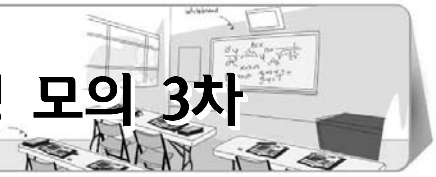
논제 Ⅰ-5

$\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2e^{\frac{\pi}{6}i}$ 이므로

$$(\sqrt{3}+i)^{11}=2^{11}\left(e^{\frac{\pi}{6}i}\right)^{11}=2^{11}\left(e^{\frac{11\pi}{6}i}\right)=2^{11}\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$$
$$=2^{11}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=1024\sqrt{3}-1024i$$

이다.

17 부산대학교 일반전형 모의 3차



제시문 **다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.***

현대에 와서 행렬(matrix)은 아주 넓은 범위에 까지 응용이 되는 아주 중요한 학문의 한 분야가 되었다. 특히 행렬과 연산이 결합된 행렬대수는 다양한 문제의 해결에 적용되고 있다.

(가) 2차정사각행렬의 일반형은 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 인 꼴이다. $a_{12}=a_{21}=0$ 일 때, A 를 대각행렬(diagonal matrix)이라고 한다. 특히 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 을 단위행렬(unit matrix)이라 하고 보통 E 로 표기한다.

(나) 행렬 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 와 $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ 의 곱 AB 를 아래와 같이 정의한다.

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

행렬의 곱에 대한 결합법칙이 성립하고, 또한 임의의 2차정사각행렬 A 에 대하여, $AE=EA=A$ 이 성립함을 쉽게 보일 수 있다.

(다) $AB=BA=E$ 일 때, A 를 가역적(invertible)인 행렬, B 를 A 의 역행렬(inverse matrix)이라 하고, $B=A^{-1}$ 로 쓴다.

(라) 2차정사각행렬 A 의 거듭제곱은 귀납적으로

$$A^1=A,\ A^2=AA, \cdots,\ A^n=A^{n-1}A\ \ (n\geq 2)$$

로 계산한다.

2차정사각행렬 $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 와 $P=\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

* 부산대학교 입학처

논제 I-1

P는 가역적이고, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$이다. $P^{-1}AP$를 계산하여라. (15점)

논제 I-2

정수 $n(\geq 1)$에 대한 거듭제곱 $(P^{-1}AP)^n$을 구하여라. (10점)

논제 I-3

정수 $n(\geq 1)$에 대한 거듭제곱 A^n을 구하여라. (20점)

논제 I-4

정수 $n(\geq 1)$에 대하여, $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$라 둘 때, $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n + c_n - d_n)$의 값을 계산하여라. (15점)

논술유형분석

문항 수	수학 1문항, 과학 1문항(총 2문항)	시간	100분
연관 개념	행렬, 수학적 귀납법		

제시문분석

제시문[가]

대각행렬과 단위행렬의 뜻을 설명하고 있다.

제시문[나]

행렬의 곱셈을 설명하고 있다.

제시문[다]

역행렬의 뜻을 설명하고 있다.

제시문[라]

행렬의 거듭제곱의 뜻을 설명하고 있다.

논제분석

논제 Ⅰ-1

주어진 행렬을 가지고 실제 행렬의 곱셈을 할 수 있는지 묻는 문항이다.

논제 Ⅰ-2

n의 값에 구체적인 숫자 $1, 2, 3 \cdots$ 등을 대입하여 $(P^{-1}AP)^n$ 의 규칙을 찾은 다음 수학적 귀납법으로 모든 자연수 n 에 대해 그 규칙이 성립함을 보일 수 있는지를 묻는 문항이다.

논제 Ⅰ-3

[논제 Ⅰ-2]에서 구한 $(P^{-1}AP)^n$ 의 값과 $P^{-1}A^nP$ 이 같음을 이용하여 A^n 값을 구할 수 있는지를 묻는 문항이다.

논제 Ⅰ-4

[논제 Ⅰ-3]에서 구한 A^n 의 결과를 이용하여 구체적인 극한값을 계산할 수 있는지를 묻는 문항이다.

배경지식쌓기

1. 대각행렬

일반적인 $n \times n$ 대각행렬 D는 다음과 같이 표기될 수 있다.

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & d_2 & .. & 0 \\ : & : & & : \\ 0 & 0 & .. & d_n \end{bmatrix} \quad \bullet \bullet \bullet (1)$$

대각행렬이 가역이기 위한 필요충분조건은 그 대각선상의 모든 성분이 0이 아닌 것이다. 이 경우 즉, (1)에서 $d_1 d_2 \bullet \bullet \bullet d_n \neq 0$ 일 때

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & d_2 & .. & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & .. & d_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/d_1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 1/d_2 & .. & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & .. & 1/d_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1/d_1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 1/d_2 & .. & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & .. & 1/d_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & d_2 & .. & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & .. & d_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 1 & .. & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & .. & 1 \end{bmatrix}$$ 이므로

(1)의 역행렬은 $D^{-1}=\begin{bmatrix} 1/d_1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 1/d_2 & .. & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & .. & 1/d_n \end{bmatrix}$ 이다.

대각행렬의 거듭제곱은 쉽게 계산될 수 있다. D가 대각행렬 (1)일 때, 모든 자연수 m에 대해

$$D^m=\begin{bmatrix} d_1^m & 0 & .. & 0 \\ 0 & d_2^m & .. & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & .. & d_n^m \end{bmatrix} \quad \cdots \quad (2)$$

가 성립한다. 수학적 귀납법을 이용하여 (2)가 참임을 보이자.

i) $m=1$ 일 때 $D^1=\begin{bmatrix} d_1^1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & d_2^1 & .. & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & .. & d_n^1 \end{bmatrix}$ 이므로 (2)가 성립한다.

ii) $m=k$ 일 때 (2)가 성립한다고 가정하면 $D^k=\begin{bmatrix} d_1^k & 0 & .. & 0 \\ 0 & d_2^k & .. & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & .. & d_n^k \end{bmatrix}$ 이므로

$$D^{k+1}=D^kD=\begin{bmatrix} d_1^k & 0 & .. & 0 \\ 0 & d_2^k & .. & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & .. & d_n^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & d_2 & .. & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & .. & d_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_1^{k+1} & 0 & .. & 0 \\ 0 & d_2^{k+1} & .. & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & .. & d_n^{k+1} \end{bmatrix}$$

이므로 $m=k+1$ 일때도 (2)는 성립한다. i), ii)에 의해 모든 자연수 m에 대해 (2)는 성립한다. 위와 같이 대각행렬이면 역행렬이나 거듭제곱을 계산하기가 편리해진다. 특히 주어진 행렬 A에 대응하는 어떤 가역행렬 P를 이용하여 $P^{-1}AP$가 대각행렬이 되도록 하여 A^n의 계산을 간단히 할 수 있는데 이러한 과정이 가능한 행렬A를 대각화가능 하다고 한다. 정사각행렬 A에 대하여 $P^{-1}AP$가 대각행렬로 되는 가역행렬 P가 존재하면 A를 대각화가능이라고 한다. 주어진 행렬 A가 대각화가능한 행렬인지 아닌지를 알아내는 방법, A가 대각화가능 행렬이라고 할 때, 그에 대응되는 가역행렬 P를 찾는 구체적인 방법은 고등학교 교육과정을 벗어난다.

풀어보기

문제 1 두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 4\end{pmatrix}$에 대하여

$$A^{-1}B^nA=\begin{pmatrix}a_n & b_n\\c_n & d_n\end{pmatrix}\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

이라 하자. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n+c_n}{a_n+d_n}$의 값은? (2010년 3월 전국연합)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

문제 2 영행렬이 아닌 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (2012년 4월 전국연합)

< 보 기 >

ㄱ. 행렬 A의 역행렬이 존재하면 $(ABA^{-1})^2=AB^2A^{-1}$이다.
ㄴ. 행렬 A의 역행렬이 존재하면 행렬 A^2의 역행렬도 존재한다.
ㄷ. 행렬 AB의 역행렬이 존재하지 않으면 행렬 A의 역행렬도 존재하지 않는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

예시답안

풀어보기

문제 1 정답 ⑤

$$B^2=\begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^2 & 0\\0 & 4^2\end{pmatrix},\ B^3=\begin{pmatrix}3^2 & 0\\0 & 4^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^3 & 0\\0 & 4^3\end{pmatrix},\ \cdots$$

이므로 $B^n=\begin{pmatrix}3^n & 0\\0 & 4^n\end{pmatrix}$임을 알 수 있다.

$$\therefore\ A^{-1}B^nA=\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^n & 0\\0 & 4^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^n & -2\cdot3^n+2\cdot4^n\\0 & 4^n\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{b_n+c_n}{a_n+d_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2\cdot3^n+2\cdot4^n}{3^n+4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n+2}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}=2$$

문제 2 정답 ③

ㄱ. $(ABA^{-1})^2=(ABA^{-1})(ABA^{-1})=AB(A^{-1}A)BA^{-1}=ABEBA^{-1}$

$=ABBA^{-1}=AB^2A^{-1}$ (참)

ㄴ. 행렬 A의 역행렬이 존재하면

$A^2(A^{-1})^2=AAA^{-1}A^{-1}=A(AA^{-1})A^{-1}=AEA^{-1}=AA^{-1}=E$

$\therefore\ (A^2)^{-1}=(A^{-1})^2$ (참)

ㄷ. (반례) $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

논제 1

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&1\\-3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\\\frac{3}{4}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}\\\frac{3}{5}&\frac{1}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\\frac{3}{4}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}\\\frac{3}{5}&\frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$ 이다.

논제 2

$$(P^{-1}AP)^n=\begin{pmatrix}1&0\\0&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1&0\\0&\left(-\frac{1}{4}\right)^n\end{pmatrix}$$ 이다.

논제 3

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0\\0&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$이므로 $A=P\begin{pmatrix}1&0\\0&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}P^{-1}$ 이다.

그러므로

$$A^n=\left(P\begin{pmatrix}1&0\\0&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}P^{-1}\right)^n$$

$$=\underbrace{\left(P\begin{pmatrix}1&0\\0&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}P^{-1}\right)\left(P\begin{pmatrix}1&0\\0&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}P^{-1}\right)\cdots\left(P\begin{pmatrix}1&0\\0&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}P^{-1}\right)}_{n}$$

$$= \underbrace{P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}P^{-1} \cdots P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}}_{n}P^{-1}$$

$P^{-1}P$ 는 단위행렬이므로

$$= P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}^n P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{5}+\frac{3}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n & \frac{2}{5}-\frac{2}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n \\ \frac{3}{5}-\frac{3}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n & \frac{3}{5}+\frac{2}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}$$ 이다.

논제 4

$a_n = \frac{2}{5}+\frac{3}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$, $b_n = \frac{2}{5}-\frac{2}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$, $c_n = \frac{3}{5}-\frac{3}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$, $d_n = \frac{3}{5}+\frac{2}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n + c_n - d_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n - \left(\frac{2}{5}-\frac{2}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)+\frac{3}{5}-\frac{3}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n - \left(\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)\right)$$

$$= \frac{2}{5}-\frac{2}{5}+\frac{3}{5}-\frac{3}{5} = 0$$

이다.

18 부산대학교 수학과학우수자 전형

제시문 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.*

(가) 어떤 함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제는 실생활에서 유용하게 활용된다. 예를 들면 비용함수, 거리함수 및 시간함수에 대한 최대 혹은 최소를 구하는 문제 등이 이에 해당된다. 보통 함수의 최대 혹은 최소문제는 도함수를 이용하여 해결할 수 있는데, 도함수를 이용하여 주어진 함수의 증가와 감소 혹은 극대와 극소를 판정할 수 있기 때문이다.

(나) 함수 $f(x)$ 가 $x=c$ 에서 연속이고, $x=c$ 를 경계로 $f(x)$ 가 감소상태에서 증가상태로 바뀌면, $f(x)$ 는 $x=c$ 에서 극소라 하고 함숫값 $f(c)$ 를 극솟값이라 한다.

(다) 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a,b]$ 에서 연속이면, $f(x)$ 는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다. 이것을 최대·최소의 정리라 한다. 또한, 닫힌구간 $[a,b]$ 에서 연속인 함수 $y=f(x)$ 의 최솟값은 구간의 양 끝점에서의 함숫값 $f(a), f(b)$ 와 이 구간에서의 극솟값 중에서 가장 작은 값이다.

(라) 함수 $y=f(x)$ 는 $x=a$ 에서의 미분계수 $f'(a)$ 가 존재할 때, $x=a$ 에서 미분가능하다고 한다. 그리고 함수 $y=f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하면 $y=f(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이다.

(마) 최대·최소 문제는 빛을 연구하는 광학에서도 적용된다. 17 세기 프랑스의 수학자 피에르 페르마는 최단시간의 원리(페르마 원리)를 발견하였는데, 빛이 반사와 굴절을 통하여 진행할 때 소요시간이 최소가 되는 경로를 따른다는 것이다.

논제 1

$a<x<b$ 에서 미분가능한 함수 $y=f(x)$ 에 대하여 $f'(c)=0$ $(a<c<b)$ 이고 $x=c$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x=c$ 에서 극소가 됨을 증명하시오. (10점)

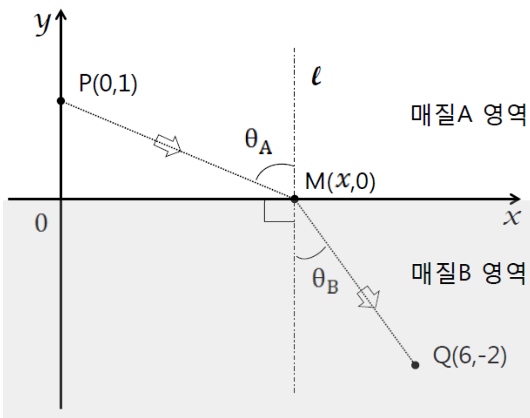
논제 2

$0 \le x \le \pi$ 에서 정의된 함수 $g(x)=x-\sin 2x$ 에 대하여 $g(x)$ 의 최솟값의 존재성에 대하여 논하고, 만약 존재한다면 그 값을 구하시오. (10점)

* 부산대학교 입학처

논제 3

그림과 같이 평면이 x 축을 경계로 매질A 영역과 매질B 영역으로 나누어져 있다. 매질A 와 매질B 영역에서의 빛의 속력이 각각 $v_A=1$, $v_B=\frac{1}{2}$ 이고, x 축 위를 움직이는 점 $\mathrm{M}(x,0)$ 과 M 을 지나면서 x 축에 수직인 직선을 ℓ 이라 하자. 두 점 $\mathrm{P}(0,1)$, $\mathrm{Q}(6,-2)$ 에 대하여 직선 ℓ 과 두 선분 PM, MQ 가 이루는 예각을 각각 θ_{A}, θ_{B} 라 할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, 빛이 두 매질의 경계면에서 모두 반사되지는 않으며, x 축을 통과할 때 점 $\mathrm{M}(x,0)$ 를 지난다.)



논제 3-1

빛이 점 P 에서 x 축 위의 점 M 을 지나 점 Q 까지 가는데 걸리는 시간을 T 라 할 때, $0 \le x \le 6$ 에서 정의되는 함수 $T=h(x)$ 를 구하시오. (10점)

논제 3-2

제시문 (마)에서 언급된 최단시간의 원리(페르마 원리)를 만족하는 경로를 찾고자 한다. 빛이 점 P 에서 점 Q 까지 가는데 걸리는 시간 T가 최소가 되게 하는 x 축 위의 점 $\mathrm{M}(c,0)$ 이 존재함을 보이고, 꼭 하나만 존재함을 이계도함수를 이용하여 설명하시오. (단, $0 \le c \le 6$) (15점)

논제 3-3

그림에서 최단시간의 원리(페르마 원리)를 만족하는 점 M 에 의해 정해지는 θ_{A}, θ_{B} 에 대하여 $\dfrac{\sin\theta_{\mathrm{A}}}{\sin\theta_{\mathrm{B}}}$ 의 값을 구하시오. (15점)

논술유형분석

문항 수	수학 3문항(소문항 5문항)	시간	100분
연관 개념	함수의 극대 · 극소, 최대 · 최소, 미분가능성, 유리함수 · 무리함수		

제시문분석

제시문 [가]

함수의 최대 · 최소에 관한 간단한 예를 제시하고 있다. 또한, 최대 · 최소 문제는 도함수를 이용할 수 있음을 제시하고 있다.

제시문 [나]

극소에 대한 정의를 제시하고 있다.

제시문 [다]

최대 · 최소 정리에 대해 설명하고 있다.

제시문 [라]

미분가능성에 대해 설명하고 있다.

제시문 [마]

최단시간의 원리(페르마 원리)가 적용되는 영역과 역사적 사실에 대한 내용을 제시하고 있다.

논제분석

논제 1

제시문 [가]와 제시문 [나]의 내용을 이용하여 주어진 명제를 증명할 수 있는가를 묻고 있다.

논제 2

제시문 [다]를 이용하여 주어진 함수에 대해 최솟값의 존재성을 판단하고, 존재한다면 최솟값을 구하는 것을 묻고 있다.

논제 3

제시문 [마]에서 제시한 빛의 굴절에 대한 생활 속 현상을 설명하고 있다.

논제 3-1

[논제 3]에서 빛이 점 P 에서 x 축 위의 점 M 을 지나 점 Q 까지 가는데 걸리는 시간 T 를 시간 $= \dfrac{거리}{속력}$ 를 이용하여 무리함수로 표현할 수 있는지를 묻고 있다.

논제 3-2

[논제 3-1]에서 구한 무리함수 $T=h(x)$의 최솟값의 존재성과 유일성을 동시에 묻고 있는 문항이다. 제시문 [다]의 최대·최소의 정리를 이용하여 존재성을 보이고, 이계도함수와 중간값 정리를 이용하여 유일성을 보여야 한다.

논제 3-3

[논제 3-2]에서 구한 내용을 통해 $\sin\theta_A$ 과 $\sin\theta_B$ 의 관계식을 찾아 물음에 답할 수 있는지를 묻고 있다. $\sin\theta_A$ 과 $\sin\theta_B$ 을 각각 구해서는 물음에 답하는 것이 아니라, 이 둘의 관계식을 찾는 것이 이 문항의 핵심이다.

배경지식쌓기

1. 미분계수의 정의

함수 $y=f(x)$ 에 대하여 x 의 값이 a 에서 $a+\Delta x$ 까지 변할 때의 평균변화율

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

에서 Δx 가 0 에 한없이 가까워질 때의 극한값

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

가 존재하면 함수 $y=f(x)$ 는 $x=a$ 에서 미분가능하다고 하며, 이 극한값을 함수 $y=f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 순간변화율 또는 미분계수라고 하고, 기호로

$$f'(a)$$

와 같이 나타낸다.

2. 미분계수와 함수의 극대·극소의 관계

미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극값을 가지면 $f'(x)=0$ 이다.

(증명) 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하고 $x=a$ 에서 극댓값을 가진다고 하자. 이 때, Δx 가 충분히 0 에 가까워지면 $f(a+\Delta x)<f(a)$ 이므로

(ⅰ) $\Delta x>0$ 이면

$$\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}<0$$

(ⅱ) $\Delta x<0$ 이면

$$\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}>0$$

또한 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하므로

$$0\le \lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=f'(a)\ ,\ f'(a)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\le 0$$

따라서

$$f'(a)=0$$

마찬가지로 $x=a$ 에서 극솟값을 가질 때에도 $f'(a)=0$ 임을 보일 수 있다.

그러나 위의 명제는 역이 성립하지 않는다. 그 예로 함수 $f(x)=x^3$ 에서 $f'(0)=0$ 이지만, 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극값을 가지지 않는다.

3. 극대·극소 판정

가. 미분가능한 함수 $f(x)$ 에서 $f'(a)=0$ 이고 $x=a$ 의 좌우에서

(1) $f'(x)$ 의 부호가 양(+) 에서 음(−) 으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극대이고, $f(a)$ 는 극댓값이다.

(2) $f'(x)$ 의 부호가 음(−) 에서 양(+) 으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극소이고, $f(a)$ 는 극솟값이다.

나. 함수 $f(x)$ 가 이계도함수를 갖고 $f'(a)=0$ 일 때,

(1) $f''(a)<0$ 이면 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극댓값 $f(a)$ 를 가진다.

(2) $f''(a)>0$ 이면 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극솟값 $f(a)$ 를 가진다.

풀어보기

문제 1

닫힌 구간 $[0,\ \ln 4]$ 에서 함수 $f(x)=e^{2x}-2e^{x}-4x$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m=a+b\ln 2$ 이다. 두 정수 $a,\ b$ 에 대하여 $a-b$ 의 값을 구하시오. (단, e 는 자연로그의 밑이다.) (2013년 EBS 수능완성)

문제 2

함수 $f(x)=\ln(x^2+a)-x$ 가 실수 전체의 집합에서 감소함수가 되도록 하는 양의 실수 a 의 최솟값은? (2013년 EBS 수능완성)

문제 3

정의역이 $\{x\,|\,0\le x\le \pi\}$ 인 함수 $f(x)=2x\cos x$ 에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (2012년 수능)

<보 기>

ㄱ. $f'(a)=0$ 이면 $\tan a=\dfrac{1}{a}$ 이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극댓값을 가지는 a 가 구간$\left(\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{3}\right)$ 에 있다.

ㄷ. 구간 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ 에서 방정식 $f(x)=1$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2 이다.

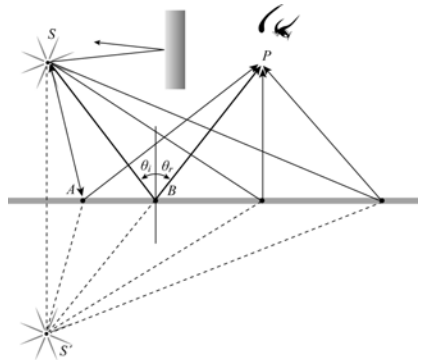
① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

읽기자료

페르마의 원리와 반사와 굴절의 법칙

1. 헤론의 최단경로의 원리와 반사의 법칙

고대 그리스의 헤론은 ‘빛이 어떤 점 S에서 다른 점 P로 움직일 때 빛은 최단경로로 진행한다.’ 라는 최단경로의 원리를 이용하여 반사의 법칙을 설명하였다. 점광원 S에서 나온 여러 광선이 반사되어 점 P로 갈 때, 광선들이 S'(S의 상)에서 나온다고 하면 S'에서 P까지의 최단경로는 S'와 P를 직선으로 연결한 광선이 될 것이다. 이 경우 삼각형의 합동조건으로부터 $\theta_i = \theta_r$ 임을 알 수 있으며, 이것으로 반사의 법칙을 설명할 수 있다. 헤론의 최단경로의 원리는 빛의 반사의 법칙은 설명할 수 있으나 굴절의 법칙은 설명할 수 없다. 1657년 페르마는 ‘광선이 지나는 두 지점 사이의 실제 경로는 최소시간 동안 통과하는 경로이다’ 라는 최소시간의 원리(principle of least time)를 제안한다. 페르마의 최소시간의 원리는 같은 매질에서 빛이 반사하는 경우 최단경로가 최단시간이므로 반사의 법칙을 설명할 수 있다.



[그림 1]

2. 최단시간의 원리와 굴절의 법칙

헤론의 최단경로 원리는 굴절의 법칙을 설명할 수 없으나 페르마의 최소시간의 원리로는 굴절의 법칙을 유도할 수 있다.

[그림 2]에서 S에서 출발한 빛이 P점에 도착할 때의 최단시간 경로를 미분을 이용하여 구해보자. 먼저 S에서 P점에 이르는 광선의 소요시간 $t(x)$를 식으로 표현하면 아래와 같다.

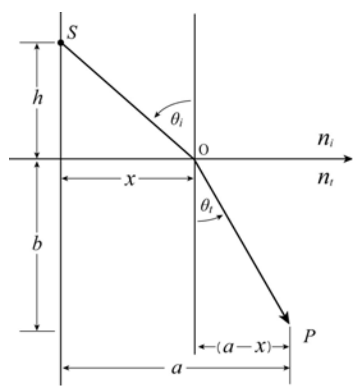
$$t = \frac{\overline{\mathrm{SO}}}{v_i} + \frac{\overline{\mathrm{OP}}}{v_t} = n_i \frac{\sqrt{h^2+x^2}}{c} + n_t \frac{\sqrt{b^2+(a-x)^2}}{c}$$

시간이 최소라는 것은 $t(x)$를 x에 대해 미분한 값이 0이므로 다음의 식이 성립한다.

$$\frac{dt}{dx} = \frac{xn_i}{c\sqrt{h^2+x^2}} + \frac{-(a-x)n_t}{c\sqrt{b^2+(a-x)^2}} = 0$$

이 식을 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{x}{\overline{\mathrm{SO}}} n_i = \frac{(a-x)}{\overline{\mathrm{OP}}} n_t$$

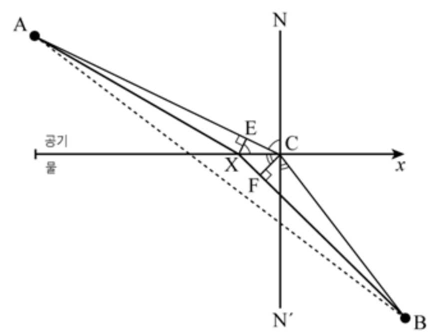


[그림 2]

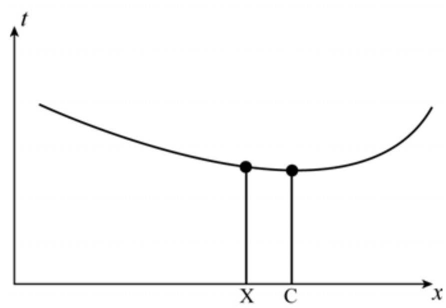
이 식에서 $\frac{x}{\overline{\mathrm{SO}}} = \sin\theta_i$, $\frac{(a-x)}{\overline{\mathrm{OP}}} = \sin\theta_t$ 이므로 스넬의 법칙 $n_i \sin\theta_i = n_t \sin\theta_t$ 을 얻을 수 있다.

3. 기하학적 해석을 이용한 굴절의 법칙

[그림 3]과 같이 공기 중의 A 점에서 출발한 빛이 물속의 B 점에 갈 때, 최소시간 경로를 찾으면 굴절의 법칙을 유도할 수 있다. 물속에서의 빛의 속도는 공기 중의 속도를 n 으로 나눈 값이라고 하자. 만일 경로 ACB 가 최소시간 경로라면, 여기서 조금만 벗어나도 소요 시간이 길어질 것이다. 이제 임의의 경로가 x 축과 만나는 지점을 X 라 하고, 빛의 진행 시간을 x 의 함수로 나타내어 그래프를 그려 보면 [그림 4]와 같은 곡선이 얻어진다. X = C 일 때 곡선은 최솟값을 갖는데, 곡선의 최소지점에서는 기울기가 0이기 때문에 그 근방에서 X 를 C 근처로 조금 이동해도 소요 시간에는 거의 차이가 없다. 그러므로 임의의 지점 X 를 잡은 후에, 이 위치를 아주 조금 이동시켰을 때 소요 시간의 변화가 나타나지 않는다는 조건을 부가하면 C 를 찾을 수 있다. 즉, 임의의 지점 X 를 잡아서 빛이 AXB 를 이동하는데 데 걸리는 시간을 계산한 후, 그 근방의 새로운 경로를 다시 잡아서 이전의 경로와 소요 시간을 비교하는 것이다. X 가 C 근처에 있으면 둘 사이의 시간차는 거의 0 이다. 먼저, 공기 중에서의 경로를 살펴보자. X 에서 최소시간 경로에 내린 수선을 $\overline{XE}$라 하면, 공기 중에서 X 를 지나는 경로는 C 를 지나는 경로보다 $\overline{EC}$ 만큼 짧다. 그러나 물속에서 수선 $\overline{CF}$ 를 그려놓고 보면, X 를 지나는 경로가 C 를 지나는 경로보다 $\overline{XF}$만큼 길다. 그런데 방금 위에서 말한 바와 같이 C 를 지나는 경로는 최소시간 경로이고 X 는 C 와 아주 인접해 있으므로 두 경로의 소요 시간은 1 차 근사 이내에서 같아야 한다. 또한, 물속에서 빛의 속도는 공기 중의 속도보다 $\frac{1}{n}$ 만큼 느리다고 했으므로, 이로부터 다음의 관계가 성립함을 알 수 있다.



[그림 3]



[그림 4]

$\overline{EC} = n\cdot\overline{XF}$, $\overline{EC} = \overline{XC}\sin(\angle EXC)$ 이고 $\overline{XF} = \overline{XC}\sin(\angle XCF)$ 이므로
$\sin(\angle EXC) = n\sin(\angle XCF)$ 이다.
여기에 $\angle EXC = \angle ECN = \theta_i$, $\angle XCF = \angle BCN' = \theta_r$ 을 이용하면 $\sin\theta_i = n\sin\theta_r$ 이다.

예시답안

풀어보기

문제 1 **답**: 20

$f(x)=e^{2x}-2e^{x}-4x$ 에서 $f'(x)=2e^{2x}-2e^{x}-4=2(e^{2x}-e^{x}-2)=2(e^{x}+1)(e^{x}-2)$

$f'(x)=0$ 에서 $e^{x}=2$ ($\because e^{x}>0$) $\therefore x=\ln2$

$f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\ln2$	$\cdots$	$\ln4$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	-1	↘	$-4\ln2$	↗	$8-8\ln2$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=\ln4$ 일 때, 최댓값 $8-8\ln2$, $x=\ln2$ 일 때, 최솟값 $-4\ln2$ 를 가지므로 $M=8-8\ln2,\ m=-4\ln2$ $\therefore M+m=8-8\ln2+(-4\ln2)=8-12\ln2$

따라서 $a=8$, $b=-12$ 이므로 $a-b=8-(-12)=20$

문제 2 **답**: 1

함수 $f(x)=\ln(x^2+a)-x$ 가 실수 전체의 집합에서 감소함수가 되려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x)\le 0$ 이 성립해야 한다.

즉, $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+a}-1=\dfrac{2x-x^2-a}{x^2+a}\le 0$

a 가 양의 실수이므로 $x^2+a>0$

$f'(x)\le 0$ 이려면 $-x^2+2x-a\le 0$, 즉 $x^2-2x+a\ge 0$

이차방정식 $x^2-2x+a=0$ 의 판별식을 D 라 할 때, $\dfrac{D}{4}=1-a\le 0$ $\therefore a\ge 1$

따라서 양의 실수 a 의 최솟값은 1 이다.

문제 3 **답**: ⑤

ㄱ. $f(x)=2x\cos x$ 에서 $f'(x)=2\cos x-2x\sin x$, $f'(a)=2\cos a-2a\sin a=0$

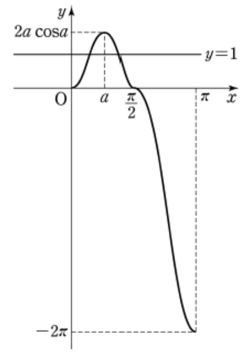
$\therefore \tan a=\dfrac{\sin a}{\cos a}=\dfrac{\sin a}{a\sin a}=\dfrac{1}{a}$ (참)

ㄴ. $f'(x)=2\cos x(1-x\tan x)=0$ 에서 $\cos x=0$ 또는 $\tan x=\dfrac{1}{x}$

$\tan x=\dfrac{1}{x}$ 의 근을 a 라 하면 $0<a<\dfrac{\pi}{2}$

증감표를 그려보면

	0		a		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$	2	$+$	0	$-$	0	$-$	-2
$f(x)$	0	↗	$2a\cos a$	↘	0	↘	-2π

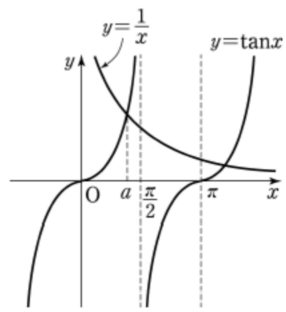


$\therefore$ $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극댓값을 가진다.

구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 $y=\frac{1}{x}$ 은 감소함수, $y=\tan x$ 는 증가함수이므로

$g(x)=\tan x-\frac{1}{x}$ 은 증가함수 $g\left(\frac{\pi}{4}\right)=1-\frac{4}{\pi}<0$,

$g\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}-\frac{3}{\pi}>0$ 이므로



중간값 정리에 의해 $\frac{\pi}{4}<a<\frac{\pi}{3}$ (참)

ㄷ. $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2}{3}\pi\cdot\frac{1}{2}>1$ 이므로 $f(a)>1$

$\therefore$ 구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ 에서 $f(x)=1$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

논제 1*

함수 $f(x)$ 가 $x=c$ 에서 미분가능하므로 제시문 (라)에 의해 $x=c$ 에서 연속이고, 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀐다는 가정에 의해 $x=c$ 를 경계로 좌에서 $f'(x)<0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 감소상태에 있고, 우에서 $f'(x)>0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 증가상태에 있다. 따라서 제시문 (나)에 의해 $f(x)$ 는 $x=c$ 에서 극소가 된다.

논제 2**

제시문 (라)에 의해 $g'(x)=1-2\cos 2x$ 으로 모든 실수 x 에서 미분가능하므로 $g(x)$ 는 닫힌구간 $[0,\pi]$ 에서 연속이다. 따라서 제시문 (다)의 최대·최소의 정리에 의해 최솟값이 존재한다.
그리고 함수 $g(x)=x-\sin 2x$ 는 열린구간 $(0,\pi)$ 에서 미분가능하므로

$g'(x)=1-2\cos 2x=0 \Rightarrow \cos 2x=\frac{1}{2}$ 에서 $x=\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}$

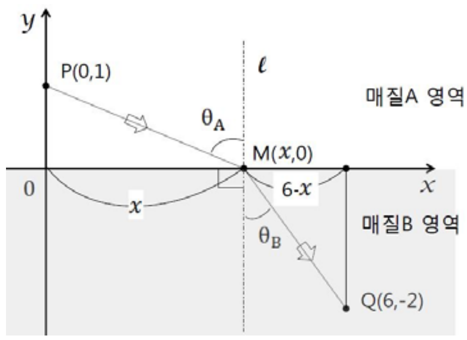
$g''(x)=4\sin 2x$ 에서 $g''(\frac{\pi}{6})>0$, $g''(\frac{5\pi}{6})<0$ 이므로 $x=\frac{\pi}{6}$ 에서만 극솟값을 갖는다.

제시문 (다)에 의해 양 끝 점에서의 함숫값과 극솟값 중에서 가장 작은 값을 구하면 $g(0)=0$, $g(\frac{\pi}{6})=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $g(\pi)=\pi$ 이므로 최솟값은 $\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.

* 부산대 풀이 참조
** 부산대 풀이 참조

논제 3*

그림에서 $\overline{\mathrm{PM}}=\sqrt{x^2+1}$, $\overline{\mathrm{MQ}}=\sqrt{(6-x)^2+4}$ 이고, (시간)=(거리)/(속력) 이므로 $T=h(x)$ $=\dfrac{\overline{\mathrm{PM}}}{v_{\mathrm{A}}}+\dfrac{\overline{\mathrm{MQ}}}{v_{\mathrm{B}}}$ 이다. 따라서 $h(x)=\sqrt{x^2+1}+2\sqrt{x^2-12x+40}$ $(0\le x\le 6)$



논제 3-2**

[논제 3-1]에서 구한 시간 $T=h(x)$가 최소가 되는 $x=c$가 존재함을 보이면 충분하다.
닫힌구간 $[0,6]$에서 $h(x)=\sqrt{x^2+1}+2\sqrt{x^2-12x+40}$ 는 연속이므로 제시문 (다)의 최대·최소의 정리에 의해 최솟값이 존재한다. 따라서 시간 T가 최소가 되게 하는 x축 위의 점 $M\ (c,0)$이 존재한다.

$$h'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{2(6-x)}{\sqrt{x^2-12x+40}}\ ,\ h''(x)=\frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}+\frac{8}{(x^2-12x+40)^{3/2}}$$

에서 모든 실수 x에 대하여 $h''(x)>0$ 이므로 $h'(x)$는 닫힌구간 $[0,6]$에서 증가함수이다. $h'(0)<0$, $h'(6)>0$ 이므로 $h'(x)=0$는 단 하나의 실근 $x=c$를 가져 $h'(c)=0$ 이고, 따라서 $T=h(x)$는 $x=c$를 경계로 감소에서 증가상태이므로 $x=c$에서 극솟값을 가진다. 그러므로 함수 $T=h(x)$의 그래프는 닫힌구간 $[0,6]$에서 아래로 볼록이고 $x=c$에서 $h(c)$가 유일한 최솟값을 가진다. 따라서 시간 T가 최소가 되게 하는 x축 위의 점 $M\ (c,0)$이 꼭 하나만 존재한다.

논제 3-3***

최단시간의 원리(페르마 원리)를 만족하는 점 $\mathrm{M}\ (c,0)$에 의해 정해지는 θ_{A} , θ_{B}에 대하여

$$\sin\theta_A=\frac{c}{\sqrt{c^2+1}}\ ,\ \sin\theta_B=\frac{6-c}{\sqrt{c^2-12c+40}}$$

이다. 또한, 시간 함수 $T=h(x)=\sqrt{x^2+1}+2\sqrt{x^2-12x+40}$ 가 $x=c$에서 미분가능하고 극소이므로

$$h'(c)=\frac{c}{\sqrt{c^2+1}}-\frac{2(6-c)}{\sqrt{c^2-12c+40}}=0$$

이다. 따라서 $\sin\theta_A-2\sin\theta_B=0$ 이고 $\dfrac{\sin\theta_A}{\sin\theta_B}=2$ 이다.

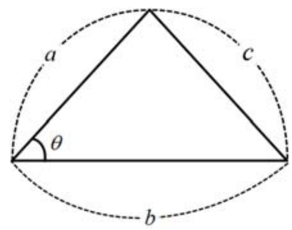
---

* 부산대 풀이 참조
** 부산대 풀이 참조
*** 부산대 풀이 참조

19 부산대학교 일반전형

제시문 I 다음 제시문을 읽고 각 문항의 문제를 푸시오.

(가) 오른쪽 그림의 삼각형에 대하여 코사인 법칙 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$ 가 성립한다.



(나) 벡터 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 의 크기는 $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ 으로 정의하고, 두 벡터 $\vec{a}$ 와 $\vec{b}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라고 할 때, 두 벡터의 내적을 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ 로 정의한다.

(다) 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 에 대하여 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ 로 정의한다.

논제 I -1

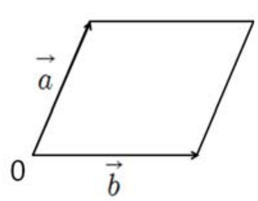
두 벡터 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 와 $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 에 대하여 $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ 임을 증명하시오. (10점)

논제 I -2

임의의 두 벡터 $\vec{a}$ 와 $\vec{b}$ 에 대하여, 부등식 $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \le |\vec{a}||\vec{b}|$ 가 성립함을 보이시오. 이를 이용하여 모든 실수 x, y, z 에 대하여 부등식 $(x+2y+3z)^2 \le 14(x^2+y^2+z^2)$ 이 성립함을 보이시오. (5점)

논제 I -3

[논제 I -1]을 이용하여 두 벡터 $\vec{a} = (a_1, a_2, 0)$ 와 $\vec{b} = (b_1, b_2, 0)$ 에 의하여 결정되는 평행사변형의 넓이는 $\left| \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right|$ 임을 증명하시오. (단, $\left| \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right|$ 의 바깥쪽 막대는 절댓값을 나타내는 기호이다.) (10점)



제시문 Ⅱ **다음 제시문을 읽고 각 문항의 문제를 푸시오.**

(가) 양의 정수 n 과 양의 실수 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 에 대하여, 산술평균과 기하평균 사이에는 부등식

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

이 성립한다. 단, 등호는 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 일 때만 성립한다.

(나) 양의 실수 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 과 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 에 대하여, $a_1 \le b_1$, $a_2 \le b_2$, $\cdots$, $a_n \le b_n$ 이 성립하면

$$a_1 a_2 \cdots a_n \le b_1 b_2 \cdots b_n$$

이 성립한다.

논제 Ⅱ-1

$\dfrac{1}{1+x_1} + \dfrac{1}{1+x_2} + \dfrac{1}{1+x_3} + \dfrac{1}{1+x_4} = 1$ 을 만족시키는 양의 실수 x_1, x_2, x_3, x_4 의 곱 $x_1 x_2 x_3 x_4$ 의 최솟값을 구하시오. (10점)

제시문 Ⅲ **다음 제시문을 읽고 각 문항의 문제를 푸시오.**

(가) 두 무한수열 $\{a_n\}$ 과 $\{b_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \le b_n$ 을 만족시킨다고 하자. 수열 $\{a_n\}$ 이 양의 무한대로 발산하면 수열 $\{b_n\}$ 도 양의 무한대로 발산한다.

(나) 구간 $[a, b]$ 에서 정의된 연속함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x = a$ 와 $x = b$ 로 둘러싸인 도형을 x 축을 회전축으로 하여 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피는 $\pi \int_a^b \{f(x)\}^2\, dx$ 이다.

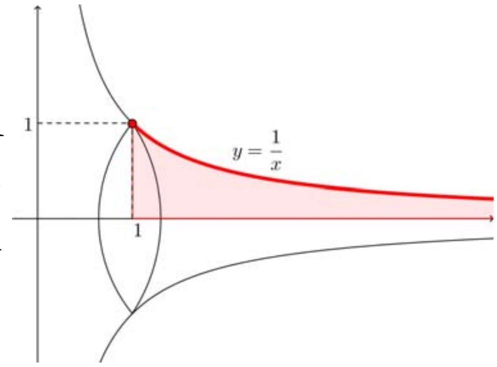
(다) 구간 $[a, b]$ 에서 정의되고 모든 함숫값이 0 이상인 연속함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축을 회전축으로 하여 회전시킬 때 생기는 곡면(회전면)의 넓이는

$$2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}\, dx \quad \text{이다.}$$

(라) 함수 $y = f(x)$ 는 구간 $[a, \infty)$ 에서 정의된 연속함수이다. a 보다 큰 임의의 자연수 n 에 대하여 $A_n = \int_a^n f(x)\, dx$ 로 두면, 구간 $[a, \infty)$ 에서 함수 $y = f(x)$ 의 정적분을

$\int_a^\infty f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} A_n$ 으로 정의한다.

논제 Ⅲ-1



구간 $[1, \infty)$ 에서 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 의 그래프와 x 축 사이에 있는 영역을 x 축을 회전축으로 하여 회전시키면, 무한히 긴 나팔 모양의 회전체가 생긴다. 이 회전체의 부피를 구하시오. (10점)

논제 Ⅲ-2

구간 $[1, \infty)$ 에서 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축을 회전축으로 하여 회전시키면, 무한히 긴 나팔 모양의 곡면이 생긴다. 이 곡면의 넓이가 무한하다는 것을 보이시오. (15점)

논술유형분석

문항 수	수학 3문항(소문항 6문항)	시간	100분
연관 개념	함수, 방정식 · 부등식, 삼각함수, 수열 · 급수의 극한, 적분, 벡터의 내적, 행렬		

제시문분석

제시문 Ⅰ

[가]는 코사인법칙을 제시하고 있다.
[나]는 벡터의 크기와 내적에 대해 설명하고 있다.
[다]는 행렬의 행렬식을 제시하고 있다.

제시문 Ⅱ

[가]는 일반화된 산술평균 · 기하평균 부등식을 제시하고 있다.
[나]는 간단한 부등식의 예를 제시하고 있다.

제시문 Ⅲ

[가]는 수열의 발산을 판정하는 방법의 내용을 제시하고 있다.
[나]는 정적분을 이용하여 회전체의 부피를 구하는 방법에 대해 설명하고 있다.
[다]는 정적분을 이용하여 회전체의 곡면 넓이를 구하는 방법에 대해 설명하고 있다.
[라]는 구간 $[a, \infty)$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 정적분을 정의하고 있다.

논제분석*

논제 Ⅰ-1

제시문 [Ⅰ-가]의 코사인법칙을 이용하여 계산한 벡터의 내적이 제시문 [Ⅰ-나]의 내적과 일치함을 보일 수 있는지를 묻고 있다. 이 과정에서 다항식의 조작능력을 판단하고, 벡터의 크기, 벡터의 내적 등에 관한 개념을 논리적으로 설명할 수 있는 능력을 평가한다.

논제 Ⅰ-2

제시문 [Ⅰ-나]를 이용하여 간단한 부등식을 증명하고, 증명한 부등식을 이용하여 구체적인 부등식을 해결할 수 있는지 묻고 있다.

논제 Ⅰ-3

[논제Ⅰ-1]을 이용하여 평행사변형의 넓이를 제시문 [Ⅰ-다]에서 정의한 행렬식의 형태로 표현할 수 있는지 묻고 있다. 이는 독립적으로 다루어졌던 벡터와 행렬을 개념적으로 연관시켜 생각하는 추론적인 사고능력을 평가한다.

논제 Ⅱ-1

제시문 [Ⅱ-가], [Ⅱ-나]의 사실을 이용하여, 식을 잘 조작하여 부등식을 이끌어낼 수 있는지 묻고 있다. 이 과정에서 응용능력을 기를 수 있다.

논제 Ⅲ-1

제시문 [Ⅲ-나]를 이용하여 유한 구간에서의 회전체 부피를 구하고, 제시문 [Ⅲ-라]를 이용하여 수열의 극한값을 구할 수 있는지 묻고 있다.

논제 Ⅲ-2

주어진 구간에서 함수의 그래프의 길이를 구하는 문제를 변형하여 회전면의 넓이를 구하는 문제로 확장시킨 것으로, 극한을 이용하여 무한히 길게 나타나는 곡면의 넓이와 발산하는 수열을 비교하여, 곡면의 넓이가 무한히 크다는 것을 이끌어 낼 수 있는지 묻고 있다.

---

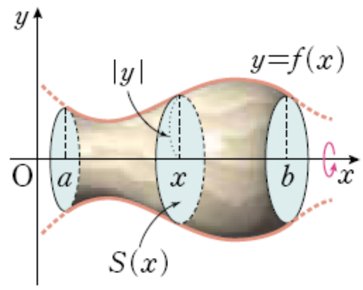
* 부산대 채점 기준 참조

배경지식쌓기

1. 회전체의 부피 측정

함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$를 x축의 둘레로 회전시켜서 생기는 회전체의 부피 V를 구해 보자.

오른쪽 그림과 같이 x좌표가 x인 점을 지나 x축에 수직인 평면으로 이 회전체를 자르면, 그 단면은 반지름의 길이가 $|y|$인 원이 된다.

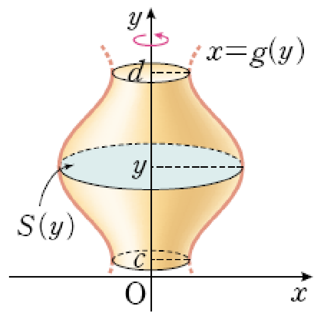


그 단면의 넓이를 $S(x)$라고 하면 $S(x)=\pi y^2=\pi\{f(x)\}^2$

따라서 구하는 회전체의 부피 V는

$$V=\int_a^b S(x)dx=\int_a^b \pi y^2 dx=\pi\int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$

마찬가지로 구간 $[c,\ d]$에서 곡선 $x=g(y)$를 y축의 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피 V를 같은 방법으로 구하면 다음과 같다.



$$V=\int_c^d \pi x^2 dy=\pi\int_c^d \{g(y)\}^2 dy$$

2. 벡터의 내적과 외적

가. 벡터의 내적

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a},\ \vec{b}$에 대하여 한 점 O를 잡아서 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$가 되도록 A, B를 정할 때, $\angle AOB$의 크기 θ는 점 O의 위치에 관계없이 일정하고,

$\theta=\angle AOB\ (0\le\theta\le\pi)$를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각이라고 한다.

이때, $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$를 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 내적이라 하고, 기호로 $\vec{a}\bullet\vec{b}$와 같이 나타낸다. 즉, $\vec{a}\bullet\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$이다. 또, $\vec{a}=\vec{0}$ 또는 $\vec{b}=\vec{0}$일 때에는 $\vec{a}\bullet\vec{b}=0$으로 정한다.

나. 벡터의 외적

일반적으로, 두 3차원 벡터 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$에 대하여, 다음 벡터를 두 벡터의 외적이라고 하고 기호 '×'를 사용하여 나타낸다.

$$(a_1,a_2,a_3)\times(b_1,b_2,b_3)$$

벡터의 외적 계산은 다음과 같다.

$$(a_1,a_2,a_3)\times(b_1,b_2,b_3)=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$$

그리고 두 벡터의 외적 $\vec{a}\times\vec{b}$는 벡터 $\vec{a},\vec{b}$에 모두 수직이다. 즉

$$(\vec{a}\times\vec{b})\bullet\vec{a}=0,\quad(\vec{a}\times\vec{b})\bullet\vec{b}=0$$

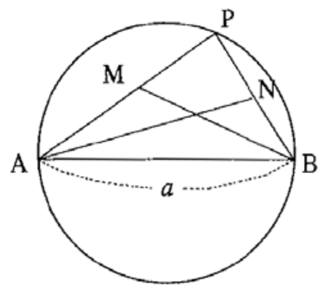
외적 $\vec{a}\times\vec{b}$의 방향은 벡터 $\vec{a}$에서 벡터 $\vec{b}$의 방향으로 오른 나사를 돌렸을 때, 나사가 진행하는 방향이다.

풀어보기

문제 1

한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자. 점 P가 선분 AH 위를 움직일 때, $\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|$의 최댓값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) (2013년 대수능)

문제 2

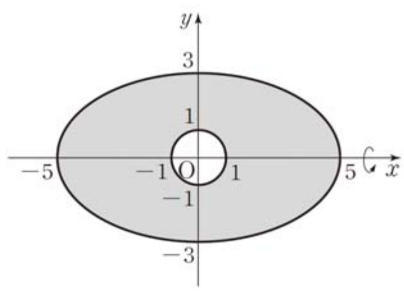


그림과 같이 길이가 a인 선분 AB를 지름으로 하는 원 위를 움직이는 점 P가 있다. 선분 PA와 선분 PB의 중점을 각각 M과 N이라고 하면, $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2=$ (가) 이다. 따라서 $\overline{\mathrm{AN}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2=$ (나) 이므로 $\overline{\mathrm{AN}} \bullet \overline{\mathrm{BM}}$의 최대값은 (다) 이다. 위의 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?(2003년 수능)

	(가)	(나)	(다)
①	a^2	$\frac{5}{4}a^2$	$\frac{\sqrt{5}}{2}a^2$
②	a^2	$\frac{5}{4}a^2$	$\frac{5}{8}a^2$
③	a^2	$\frac{3}{2}a^2$	$\frac{3}{4}a^2$
④	$2a^2$	$\frac{3}{2}a^2$	$\frac{\sqrt{5}}{2}a^2$
⑤	$2a^2$	$\frac{5}{4}a^2$	$\frac{5}{8}a^2$

문제 3

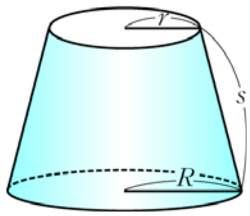
그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$의 내부와 원 $x^2+y^2=1$의 외부의 공통인 부분을 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피를 V라 할 때, $\frac{3V}{\pi}$의 값을 구하시오. (2013년 EBS 수능완성)



읽기자료

회전체의 겉넓이*

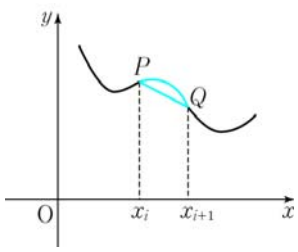
구간 $[a,b]$ 에서 연속인 도함수를 가지는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 y축의 둘레로 회전시켰을 때 생기는 회전체의 겉넓이를 구하여 보자.



먼저, 구간 $[a,b]$ 를 n 개로 나누어 작은 구간의 끝점을

$$a=x_1<x_2<\cdots<x_i<x_{i+1}<\cdots<x_{n+1}=b$$

라 하고 $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$ 라 하고



위의 그림과 같이 곡선 상에서 점 $\mathrm{P}(x_i,f(x_i)),\mathrm{Q}(x_{i+1},f(x_{i+1}))$ 을 잡자. 곡선의 길이를 구할 때와 같은 방법에 의하여 선분 PQ의 길이는 거의 $\sqrt{1+\{f'(x_i)\}^2}\,\Delta x_i$ 와 같다. 또, 윗면의 반지름의 길이가 r, 밑면의 반지름의 길이가 R이고 모서리의 길이가 s인 원뿔대의 옆넓이는 $\pi(r+R)s$ 이다. 따라서 회전체에서 선분 PQ에 의하여 만들어지는 부분의 겉넓이는 거의 $\pi(2x_i+\Delta x_i)\sqrt{1+\{f'(x_i)\}^2}\,\Delta x_i$ 이다. n 을 점점 증가시키고 Δx_i 를 모두 0에 수렴시키면, 위의 근삿값들의 합은 극한값

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}2\pi x_i\sqrt{1+\{f'(x_i)\}^2}\,\Delta x_i$$

에 수렴하는 것이 알려져 있다. 이 극한값을 정적분으로 나타내면

$$\int_a^b 2\pi x\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

이다. 이 정적분의 값을 구간 $[a,b]$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 y축의 둘레로 회전시켰을 때 생기는 회전체의 겉넓이라고 한다. 또, 같은 도형을 x축의 둘레로 회전시켰을 때는 원뿔대의 반지름의 길이만 달라지고 나머지는 y축의 둘레로 회전시켰을 때와 똑같다. 따라서 x축의 둘레로 회전시켰을 때 생기는 회전체의 겉넓이는

$$\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

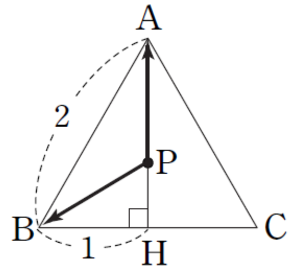
로 정의한다.

예시답안

풀어보기

문제 1 답: 7

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = -\overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}) = -\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP}$



점 H 가 선분 BC 의 중점이므로 $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

$\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AH}$ $(0 \le k \le 1, k$는 실수)이므로 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

이 때,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} &= \frac{1}{2}k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \frac{1}{2}k\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}k\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \frac{1}{2}k|\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{1}{2}k|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{AB}|\cos 60^\circ \\ &= \frac{1}{2}k \times 2^2 + \frac{1}{2}k \times 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 2k + k = 3k\end{aligned}$$

$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP} = |\overrightarrow{AP}|^2 = |k\overrightarrow{AH}|^2 = k^2|\overrightarrow{AH}|^2 = k^2 \times \overline{AH}^2 = 3k^2 \because (\overline{AH} = \sqrt{3})$

$\therefore \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = -\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP} = -3k + 3k^2$

$= 3\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}$ (단, $0 \le k \le 1$)

따라서 $|\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}|$ 의 최댓값은 $k = \frac{1}{2}$ 일 때, $\frac{3}{4}$ 이다.

$\therefore p + q = 4 + 3 = 7$

문제 2 답: ②

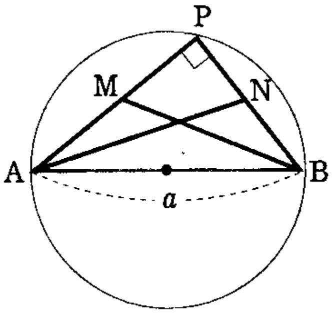
$\overline{AB}$ 가 지름이므로 $\angle P = 90^\circ$ 이다.

$\therefore\ \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = a^2$

$\triangle APN$ 에서 $\overline{PA}^2 + \overline{PN}^2 = \overline{PA}^2 + \left(\frac{1}{2}\overline{PB}\right)^2 = \overline{AN}^2$

$\triangle BPM$ 에서 $\overline{PB}^2 + \overline{PM}^2 = \overline{PB}^2 + \left(\frac{1}{2}\overline{PA}\right)^2 = \overline{BM}^2$

* 서울대학교 국정도서 편찬위원회, 고급수학, 교육인적자원부, 2007



따라서 $\overline{AN}^2+\overline{BM}^2=\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\frac{1}{4}(\overline{PA}^2+\overline{PB}^2)=\frac{5}{4}a^2$

에서 $\overline{AN}^2+\overline{BM}^2 \geq 2\overline{AN}\cdot\overline{BM}$ 이므로

$\overline{AN}\cdot\overline{BM}$ 의 최댓값은 $\frac{5}{8}a^2$ 이다.

문제 3 답: 176

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 에서 $y^2=9-\frac{9}{25}x^2$, $x^2+y^2=1$ 에서

$y^2=1-x^2$ 이므로

$$V=2\left\{\pi\int_0^5\left(9-\frac{9}{25}x^2\right)dx-\pi\int_0^1(1-x^2)dx\right\}$$

$$=2\pi\left\{\left[9x-\frac{3}{25}x^3\right]_0^5-\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1\right\}$$

$$=2\pi\left\{(45-15)-\left(1-\frac{1}{3}\right)\right\}$$

$$=\frac{176}{3}\pi$$

$$\therefore \frac{3V}{\pi}=176$$

논제 I -1*

두 벡터 $\vec{a}$ 와 $\vec{b}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라고 하자.

$\vec{a}$ 와 $\vec{b}$ 가 결정하는 삼각형의 나머지 한 변의 길이는 $|\vec{a}-\vec{b}|$ 이므로

제시문 [I -가]에 의하여 $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ 가 성립한다.

제시문 [I -나]에 의하여,

$(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)+(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-2\vec{a}\cdot\vec{b}$ 이고, 따라서

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}\{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)+(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1-b_1)^2-(a_2-b_2)^2-(a_3-b_3)^2\}$$

$$=\frac{1}{2}\{2a_1b_1+2a_2b_2+2a_3b_3\}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

논제 I -2**

두 벡터의 $\vec{a}$ 와 $\vec{b}$ 의 내적은 제시문 [I -나]에 의하여 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ 이고,

$|\cos\theta|\leq 1$ 이므로, $|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leq|\vec{a}||\vec{b}|$ 이 성립한다.

---

* 부산대 풀이 참조

** 부산대 풀이 참조

이 부등식에 $\vec{a} = (x, y, z)$, $\vec{b} = (1, 2, 3)$ 을 대입하여 양변을 제곱하면
$(x+2y+3z)^2 \le 14(x^2+y^2+z^2)$ 이 성립함을 알 수 있다.

논제 Ⅰ-3*

두 벡터 $\vec{a}$ 와 $\vec{b}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하고, 평행사변형의 넓이를 A 라고 하면
$A = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ 이다.

양변을 제곱하면,

$$A^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\theta = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1-\cos^2\theta)$$
$$= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$$ (제시문 ([Ⅰ-나]에 의하여)
$$= (a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2) - (a_1b_1+a_2b_2)^2$$
$$= a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1b_1a_2b_2 = (a_1b_2 - a_2b_1)^2$$
$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2$$ 이 성립한다. (제시문 [Ⅰ-다]에 의하여)

양변에서 제곱근을 취하면 A 는 0 이상이므로 $A = \left|\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right|$ 를 얻는다.

논제 Ⅱ-1**

$a_i = \dfrac{1}{1+x_i}\ (>0)\quad (i=1,2,3,4)$ 라 두면 $a_1+a_2+a_3+a_4 = 1$ 이다. 제시문 [Ⅱ-가]에 의하여

$$\sqrt[3]{a_2a_3a_4} \le \frac{a_2+a_3+a_4}{3} = \frac{1-a_1}{3}$$ (등호는 $a_2=a_3=a_4$ 일 때 성립)

$$\sqrt[3]{a_1a_3a_4} \le \frac{a_1+a_3+a_4}{3} = \frac{1-a_2}{3}$$ (등호는 $a_1=a_3=a_4$ 일 때 성립)

$$\sqrt[3]{a_1a_2a_4} \le \frac{a_1+a_2+a_4}{3} = \frac{1-a_3}{3}$$ (등호는 $a_1=a_2=a_4$ 일 때 성립)

$$\sqrt[3]{a_1a_2a_3} \le \frac{a_1+a_2+a_3}{3} = \frac{1-a_4}{3}$$ (등호는 $a_1=a_2=a_3$ 일 때 성립)

위의 네 부등식에서 좌변끼리, 또 우변끼리 각각 곱하면, 제시문 [Ⅱ-나]에 의하여

$$a_1a_2a_3a_4 = \sqrt[3]{a_1^3a_2^3a_3^3a_4^3} \le \frac{(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)(1-a_4)}{3^4}$$ 가 되고,

* 부산대 풀이 참조
** 부산대 풀이 참조

$\dfrac{1-a_i}{a_i} = x_i$ 이므로

$3^4 \le \dfrac{(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)(1-a_4)}{a_1 a_2 a_3 a_4} = x_1 x_2 x_3 x_4$ 가 성립한다.

등호는 $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \dfrac{1}{4}$ 일 때 성립하므로,

$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 3$ 이고 따라서 $x_1 x_2 x_3 x_4$ 의 최솟값은 3^4이다.

논제 Ⅲ-1*

구간 $[1, n]$ 에서의 회전체의 부피를 V_n 이라고 하면, 제시문 [Ⅲ-나]에 의하여

$V_n = \pi \displaystyle\int_1^n (\frac{1}{x})^2 dx = \pi[-\frac{1}{x}]_1^n = \pi(1-\frac{1}{n})$ 이다.

구간 $[1, \infty)$ 에서의 회전체의 부피를 V라고 하면, 제시문 [Ⅲ-라]에 의하여

$V = \displaystyle\lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty}\pi(1-\frac{1}{n}) = \pi$ 이다.

논제 Ⅲ-2**

구간 $[1, n]$ 에서의 곡면의 넓이를 A_n 이라고 하면, 제시문 [Ⅲ-다]에 의하여

$A_n = 2\pi \displaystyle\int_1^n \frac{1}{x}\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$ 이다.

$\sqrt{1+(f'(x))^2} \ge 1$ 이므로 $A_n \ge 2\pi \displaystyle\int_1^n \frac{1}{x}dx = 2\pi\,[\ln x]_1^n = 2\pi \ln n$

A 를 구하는 곡면의 넓이라면 제시문 [Ⅲ-라] 의하여

$A = 2\pi \displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = \lim_{n\to\infty} A_n$ 이다.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2\pi \ln n = \infty$ 이므로 제시문 [Ⅲ-가]에 의하여 $A = \displaystyle\lim_{n\to\infty} A_n$ 은 무한하다.

---

* 부산대 풀이 참조
** 부산대 풀이 참조

20 서강대학교 모의

문항1 제시문을 읽고 다음 물음에 답하라.(50% 배점)*

[가]

첫째항 a_1 과 둘째항 a_2 가 주어지고 $p+q+r=0$ 인 실수 p, q, r 과 모든 자연수 n 에 대하여 등식

$$pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0$$

을 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 이 있을 때 $q=-p-r$ 을 주어진 식에 대입하고 정리하면

$$p(a_{n+2}-a_{n+1})=r(a_{n+1}-a_n)$$

즉, 등식

$$a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{r}{p}(a_{n+1}-a_n)$$

을 만족하므로 $\{a_n\}$ 의 계차수열은 공비가 $\frac{r}{p}$ 인 등비수열이다. 이 때 $a_{n+1}-a_n=b_n$ 이라 놓으면,

$$b_{n+1}=\frac{r}{p}b_n\ ,\ \ b_1=a_2-a_1$$

이므로 모든 자연수 n 에 대하여

$$b_n=(a_2-a_1)\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1}$$

이다. 그러므로 $n>1$ 에 대하여

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_2-a_1)\left(\frac{r}{p}\right)^{k-1}=a_1+\frac{(a_2-a_1)\left\{1-\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{r}{p}}$$

이다.

[나]

수열 $\{a_n\}$ 이 $p+q+r\neq 0$ 인 실수 p, q, r 과 모든 자연수 n 에 대하여

$$pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0$$

을 만족하는 경우

$$(a_{n+2}-\alpha a_{n+1})=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$$

을 성립하게 하는 실수 α, β 를 찾는다.

먼저 $\alpha=\beta$ 인 경우를 살펴보자. 예를 들어, 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

---

* 서강대학교 입학처

$$a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$$

을 만족할 때, 식

$$(a_{n+2}-\alpha a_{n+1})=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$$

으로부터 $\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=4$ 를 얻고 이를 풀면 $\alpha=\beta=2$ 를 얻는다. 이 경우 수열 $\{a_n\}$ 은

$$(a_{n+2}-2a_{n+1})=2(a_{n+1}-2a_n)$$

을 만족한다.

이때 $a_{n+1}-2a_n=b_n$ 이라 놓으면, $b_{n+1}=2b_n$, $b_1=a_2-2a_1$ 이므로 $b_n=(a_2-2a_1)2^{n-1}$ 이고, 이로부터 수열의 일반항 a_n 을 구할 수 있다.①

α,β 가 서로 다른 실수 $(\alpha\neq\beta)$ 인 경우에는 두 식

$$(a_{n+2}-\alpha a_{n+1})=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$$

과

$$(a_{n+2}-\beta a_{n+1})=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$$

이 모든 자연수 n에 대하여 성립하고, 이는 두 수열 $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$ 과 $\{a_{n+1}-\beta a_n\}$ 이 각각 공비가 β 와 α 인 등비수열이라는 것을 의미한다. 따라서 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1}-\alpha a_n=(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-1}$$

$$a_{n+1}-\beta a_n=(a_2-\beta a_1)\alpha^{n-1}$$

이 성립하고, 이 두 개의 식 중 위의 식에서 아래의 식을 빼고 정리하면 수열의 일반항 a_n 을 구할 수 있다.

[다]

두 개의 용기 A, B 에 현재 적당한 양의 물이 들어있는데, 용기 A 에 담긴 물의 양의 10% 를 용기 B 로 옮겨 담는 동시에 용기 B 에 담긴 물의 양의 20% 를 용기 A 로 옮겨 담는 작업을 매 1 분마다 지속적으로 반복한다. 즉, 현재부터 매 1 분마다 용기 A 에는 담겨 있던 물의 10% 가 빠져나가는 동시에 용기 B 에 담겨져 있던 물의 20% 가 들어오는 것이 반복된다. 이때 아주 오랜 시간이 지난 후 두 용기에 담긴 물의 양의 비율은 일정한 값으로 수렴한다.

논제1-1

$p+q+r\neq0$ 인 실수 p,q,r 과 모든 자연수 n 에 대하여 $pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0$ 을 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 이 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ 을 설명하시오. 또한, $p+q+r=0$ 인 경우에도 $pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0$ 을 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 이 수렴할 때 항상 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ 이 성립하는가?

논제1-2

제시문 [나]의 밑줄 친 ①에서 언급한 수열에서 $a_1=1$, $a_2=4$ 일 때 일반항 a_n 을 구하시오.

또한, 제시문 [나]를 참조하여 $a_1=1$, $a_2=4$ 그리고 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=0$ 을 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하라.

논제1-3

제시문 **[다]**에서 아주 오랜 시간이 지난 후에 용기 A 에 담긴 물의 양은 용기 B 에 담긴 물의 양의 2 배의 값으로 수렴함을 설명하라.

문항2 제시문을 읽고 다음 물음에 답하라.*

한국대학교는 교수 100 명의 직접투표를 통해 총장 선거를 실시했다. 총장후보자는 A, B, C, D 네 사람이고, 유권자인 교수 100 명은 투표용지에 각 후보자의 순위를 적는 방식으로 선거가 진행되었으며, 투표결과는 다음의 표와 같다.

득표수(명)	1위	2위	3위	4위
35	A	B	C	D
1	A	B	D	C
0	A	C	B	D
1	A	C	D	B
0	A	D	B	C
1	A	D	C	B
0	B	A	C	D
0	B	A	D	C
0	B	C	A	D
1	B	C	D	A
0	B	D	A	C
10	B	D	C	A
0	C	A	B	D
0	C	A	D	B
2	C	B	A	D
25	C	B	D	A
0	C	D	A	B
3	C	D	B	A
0	D	A	B	C
0	D	A	C	B
0	D	B	A	C
1	D	B	C	A
0	D	C	A	B
20	D	C	B	A

* 서강대학교 입학처

투표결과 4 명의 후보들은 각자가 총장이 되어야 한다고 주장하였고, 학교의 이사회는 토론 끝에 후보 D를 탈락시킨 후 교수 20 명으로 총장 후보 추천 위원회를 새롭게 구성하여 이들로 하여금 후보 A, B, C를 각자 선호하는 순서대로 적는 2 차 투표를 실시하였다. 위원회는 2 차 투표 결과를 단순히 1 순위를 가장 많이 얻은 후보가 총장으로 당선된다고 룰을 정했고, 개표결과 20 명의 위원들 중 11 명이 A보다 B를 선호하였고, 14 명이 B보다 C를 선호하였으며, 12 명이 C보다 A를 선호하였고, 또한 아래 표에서 개표결과 발생 가능한 6 가지 결과의 득표수를 나타내는 $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ 중 단 하나도 0 이 아니었다고 공표하였다.

득표수(명)	1위	2위	3위
f_1	A	B	C
f_2	A	C	B
f_3	B	A	C
f_4	B	C	A
f_5	C	A	B
f_6	C	B	A

논제2-1

1 차 투표결과 세 명의 후보 A, B, C 모두 각자 자신이 총장이 되어야 한다고 주장하였을 때 그 이유가 나름대로 의미 있다고 받아들여진 이유를 설명하시오.
(15% 배점)

논제2-2

1 차 투표에서 탈락한 후보 D가 총장이 되어야 한다고 주장할 수 있는 근거를 나름의 논리로 설명하시오. (10% 배점)

논제2-3

2 차 투표 후 위원회가 공표한 내용으로 총장 당선자가 결정되었다고 말할 수 있는가? 만일 그렇다면 총장 당선자는 누구인가? (25% 배점)

논술유형분석

문항 수	수학 2문항(소문항 6문항)	시간	120분
연관 개념	문항1- 수열의 점화식과 극한 문항2- 도수분포, 1차 연립방정식의 정수해 (2013년 모의 문항1과 같음)		

제시문분석

문항1-[가]

$p+q+r=0$ 인 경우의 점화식 $pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0$ 의 해법에 대해 설명하고 있다.

문항1-[나]

$p+q+r\neq 0$ 인 경우의 점화식 $pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0$ 의 해법을 예를 들어 설명하고 있다.

문항1-[다]

두 개의 용기 A, B에 담긴 물의 양의 일정 비율을 서로 옮겨 담는 과정을 반복하면 두 용기에 담긴 물의 양의 비율은 일정한 값으로 수렴함을 설명하고 있다.

문항2

다양한 투표방식이 존재함을 알고 합리적인 투표방법을 생각해 보도록 하고 있다.

논제분석

논제1-1

$p+q+r=0$ 인 경우와 $p+q+r\neq 0$ 인 경우에 점화식 $pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0$ 을 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 의 수렴성에 대해 각각 묻고 있다.

논제1-2

첫째 항과 둘째 항이 주어진 점화식의 일반항을 제시문 [나]의 내용을 참고로 하여 구하도록 하고 있다.

논제1-3

제시문 [다]의 내용을 참고로 하여 연립점화식을 만든 후 제시문 [가]의 제시된 방법을 통해 수열의 일반항을 구하고 수렴 값에 대해 묻는 문항이다.

논제2-1

세 명의 후보 A, B, C가 각각 총장으로 당선될 수 있는 이유를 다양한 투표 방식 중 하나로 설명할 수 있는지 묻고 있다.

논제2-2

후보 D가 총장으로 당선될 수 있는 이유를 다양한 투표 방식 중 하나로 설명할 수 있는지 묻고 있다.

논제2-3

위원회가 공표한 내용을 만족하는 총장 당선자를 구할 수 있는지 묻고 있다.

배경지식쌓기

1. 여러 가지 점화식

가. 2항간의 점화식

1) $a_{n+1}=a_n+f(n) \quad \Rightarrow$

① 축차대입(변변 더한다.)

② $a_n=a_1+(f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1))=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)$: 계차수열 이용

2) $a_{n+1}=f(n)\cdot a_n \quad \Rightarrow$

① 축차대입(변변 곱한다.)

② $a_n=a_1\times(f(1)\times f(2)\times f(3)\times\cdots\times f(n-1))$

3) $a_{n+1}=pa_n+q$ (단, p, q는 상수, $p\neq1$, $q\neq0$) $\Rightarrow$

① $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$, α는 $x=px+q$의 근

② $a_n=pa_{n-1}+q$와 주어진 식을 변변 뺀다.

4) $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{pa_n+q}$ $(p\neq0,\ q\neq0)$ $\quad\Rightarrow\quad$ 양변 역수 취한다.

5) $a_{n+1}=k\cdot {a_n}^p$ $(p\neq0,\ p\neq1)$ $\quad\Rightarrow\quad$ 양변에 log를 취한다.

6) $(n+1)a_n=na_{n+1}+p$ $(p\neq0)$ $\quad\Rightarrow\quad$ 양변을 $n(n+1)$로 나눈다.

7) $a_{n+1}=pa_n+f(n)$ $(p\neq0,\ p\neq1)$ $\quad\Rightarrow\quad$ 양변을 p^{n+1}로 나눈다.

8) $pa_n\cdot a_{n+1}+qa_{n+1}+ra_n=0$ $(pqr\neq0)$ $\quad\Rightarrow\quad$ 양변을 $a_n\cdot a_{n+1}$로 나눈다.

9) $a_n\cdot a_{n+1}+pa_n^2+qa_n+ra_{n+1}=0$ $(pqr\neq0)$ $\quad\Rightarrow\quad$ 인수분해

10) $a_{n+1}=pa_n+qn+r$ $(p\neq1,\ q\neq0)$ $\Rightarrow$

① $a_{n+1}-f(n+1)=pa_n-f(n)$ $\qquad$ (단, $f(n)=an+b$)

② $a_{n+2}=pa_{n+1}+q(n+1)+r$과 주어진 식을 변변 뺀다.

11) $a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ $(pqr\neq0)$ $\quad\Rightarrow$

$x=\dfrac{px+q}{rx+s}$의 두 근 α, β $(a_{n+1}=a_n=x)$

(1) $\alpha\neq\beta$ $\begin{cases} a_{n+1}-\alpha=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}-\alpha & \cdots\cdots ① \\ a_{n+1}-\beta=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}-\beta & \cdots\cdots ② \end{cases}$ $\Rightarrow \dfrac{①}{②}$: 등비수열

(2) $\alpha=\beta$: $a_{n+1}-\alpha=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}-\alpha$ $\qquad\Rightarrow$ 양변 역수 취함 (등차수열)

나. 3항간의 점화식

$pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0,\ (p\neq 1,\ q\neq -2,\ r\neq 1)$

(1) $p+q+r=0\ :\ p(a_{n+2}-a_{n+1})=r(a_{n+1}-a_n) \Rightarrow a_{n+1}-a_n$: 등비수열

(2) $p+q+r\neq 0\ :\ px^2+qx+r=0$의 두 근 $\alpha,\ \beta$

$$\text{i)}\ \alpha\neq\beta \begin{cases} a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n) & \Rightarrow\ a_{n+1}-\alpha a_n=f(n) \\ a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\alpha a_n) & \Rightarrow\ a_{n+1}-\beta a_n=g(n) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow\ f(n)-g(n)$

ii) $\alpha=\beta\ :\ a_{n+2}=\alpha a_{n+1}=a(a_{n+1}-\alpha a_n)$

$\Rightarrow a_{n+1}-\alpha a_n=(a_2-\alpha a_1)a^{n-1}$: 양변을 a^{n+1} 로 나눈다.

다. 연립점화식

$$\begin{cases} x_{n+1}=ax_n+by_n & \cdots\cdots\ ① \\ y_{n+1}=cx_n+by_n & \cdots\cdots\ ② \end{cases}$$

(1) $a=d,\ b=c$ 인 경우 $\Rightarrow$ ①±②

(2) $a\neq d,\ b\neq c$ 인 경우 $\Rightarrow$ ①, ②에서 $x_n,\ y_n$ 소거

$$\begin{cases} x_{n+2}-(a+d)x_{n+1}+(ad-bc)x_n=0 \\ y_{n+2}-(a+d)y_{n+1}+(ad-bc)y_n=0 \end{cases}$$ 으로 유도하여 3항간 점화식으로 푼다.

2. 선거투표방식

투표하여 대표를 결정하는 방법에는 여러 가지가 있다.

가. 단순다수결

출마한 후보자가 여러 명일 때, 유권자들이 후보 중 한 명에게 한 표를 던져 최다 득표자가 당선되는 제도가 단순다수결이다.

그러나 이 경우의 문제점은 후보자가 여러 명 난립하여 유권자들의 표가 분산되었을 때, 과반수에 훨씬 못 미치는 지지율로 당선되는 경우가 있다는 것이다. 이때, 많은 사람이 싫어하게 되므로 그 집단에 소속되어 있는 사람들 사이에 갈등이 일어날 수 있다.

나. 점수투표

유권자는 여러 명의 후보자 모두에게 순위를 두어 순위별 가중치를 두어 이를 합산한 점수로 선출하는 투표방법이 점수투표이다. 예를 들어, 후보자가 4명일 때, 유권자는 가장 마음에 드는 순서로 각각에게 4점, 3점, 2점, 1점을 준다. 이렇게 많은 유권자들에게 받은 점수를 후보자 별로 합산하여 가장 높은 점수를 받은 후보가 당선된다. 이 투표방법을 프랑스의 수학자 보다(Borda)의 이름을 따서 보다 산출법(Borda count method)이라고 한다. 이 방법은 주로 각종 프로 스포츠에서 MVP를 뽑을 때 많이 쓰고 있다.

다. 선호투표

유권자는 후보자 각각에 대한 선호도에 따라 1순위, 2순위, 3순위, …의 순으로 순위를 매겨 1순위를 과반수 득표한 사람을 선출한다.
첫 번째 투표에서 과반수가 나오지 않으면 1순위를 최하위로 득표한 후보를 탈락시킨다. 이때, 탈락시킨 후보가 1순위로 받은 표에서 2순위로 지지한 후보에게 탈락시킨 후보의 득표수를 합산해 준다. 그 결과 다시 1순위를 최하위로 득표한 후보를 탈락시키고, 이 후보의 지지표에서 2순위로 지지한 후보에게 두 번째 탈락 후보의 득표수를 합산해 준다. 이렇게 과반수 득표자가 나올 때까지 집계를 반복하는 방식을 선호투표(preferential voting)라고 한다. 미국의 영화제인 아카데미상의 선정방식이 이 투표와 유사하다.

라. 결선투표

선거에서 후보들이 난립하는 경우가 많기 때문에 1차 투표에서 과반수 득표자가 없는 경우가 빈번하다. 그래서 1차 투표에서 일정 득표 이상 또는 1, 2위 득표를 얻은 후보들만을 대상으로 다시 투표를 실시하여 최종 선출하는 방법을 결선투표(final ballot) 또는 재투표라고 한다. 프랑스나 러시아 대통령 선거가 결선투표이다.

마. 쌍대비교

후보들을 두 후보씩 짝을 지어 비교하여 두 후보 중 지지도가 높은 후보에게 1점, 지지도가 같으면 각각에게 0.5점씩을 주고 이 점수를 합산하여 가장 높은 점수를 얻은 후보가 당선된다. 이 방법을 쌍대비교 또는 조합비교(method of pairwise comparison)라고 한다.

바. 찬성투표

유권자는 후보자 중 찬성(지지)하는 모든 후보에게 표를 던져 최고 득표자를 당선시킨다. 이것은 유권자 한 명에게 하나의 투표권을 주는 것이 아니라 한 명의 후보자에게 하나의 투표권을 주는 것과 같다. 유엔사무총장을 선출할 때 이 방법을 사용한다.

풀어보기

문제 1 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\log a_n$ 의 가수와 $\log a_{n+1}$ 의 가수는 서로 같다.
(나) $1 < \dfrac{a_n}{a_{n+1}} < 100$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 500$ 일 때, a_1 의 값을 구하시오. (2013년 6월 평가원)

문제 2 자연수 n 에 대하여 부등식 $4^k - (2^n + 4^n)2^k + 8^n \le 1$ 을 만족시키는 모든 자연수 k 의 합을 a_n 이라 하자. $\sum_{n=1}^{20} \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) (2013년 9월 평가원)

문제3 (2010년 한양대 수시2차 논술)

대호는 점화식 $pa_{n+2} + qa_{n+1} + ra_n = 0\ (p \ne 0,\ n \ge 1) \cdots ㉠$ 을 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하려고 여러 가지 시도를 하다가, 수열이 등비수열 또는 등비수열들의 합의 형태로 나타난다고 예상을 하였다. 실제 $p+q+r=0$ 인 경우, 어떤 0 이 아닌 t 에 대해 등비수열 $\{t^n\}$ 이 점화식 ㉠ 을 만족한다고 가정하면 $pt^{n+2} + qt^{n+1} + rt^n = 0$ 이므로 $pt^2 - (p+r)t + r = 0$ 이 되어 $(pt-r)(t-1) = 0$ 을 만족한다. 즉 $t = \dfrac{r}{p}$ 또는 $t=1$ 이 되어, 등비수열 $\left\{\left(\dfrac{r}{p}\right)^n\right\}$ 또는 $\{1^n\}$ 이 되어 점화식 ㉠ 을 만족한다. 뿐만 아니라, 임의의 c_1, c_2 에 대해 수열 $\left\{c_1\left(\dfrac{r}{p}\right)^n + c_2(1)^n\right\}$ 역시 점화식 ㉠ 을 만족한다.

(1) 대호의 방법을 사용하여 점화식 $a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n\ (n \ge 1)$ 으로 정의되는 수열의 일반항을 구하시오.

(2) 초깃값 a_1 과 a_2 가 어떻게 주어지더라도 점화식 ㉠ 을 만족하는 등비수열의 합으로 이루어진 수열 $\{a_n\}$ 이 단 하나 존재할 조건을 논하시오.

읽기자료

생성함수를 이용한 점화식의 일반해 탐구

수열 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ 에 대하여

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

을 이 수열의 **생성함수(Generating Function)**라고 한다.

[예제1]

(1) 수열 $1,1,1,\cdots$ 의 생성함수는

$$g(x) = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1)$$

(2) 이항계수로 이루어진 수열 $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \cdots, \binom{n}{n}$ 의 생성함수는

$$g(x) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n = (1+x)^n$$

(3) 다음 세 수를 살펴보자.

(ㄱ) P, Q, R 세 종류의 물건을 중복을 허락하여 뽑되, P는 4개 이하, Q는 2개 이하, R은 3개 이하가 되도록 n개를 선택하는 방법의 수 a_n

(ㄴ) $p+q+r=n\ (0 \le p \le 4, 0 \le q \le 2, 0 \le r \le 3)$ 의 정수해의 개수 b_n

(ㄷ) $g(x) = (1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)$ 의 전개식의 x^n 의 계수 c_n

$\Rightarrow$ $a_n = b_n$ 임은 자명하다. 또한 전개식에서 각항의 꼴은 $x^p x^q x^r$ $(0 \le p \le 4, 0 \le q \le 2, 0 \le r \le 3)$ 이고 동류항을 정리하면 x^n 의 계수는 $p+q+r=n$ 인 항 $x^p x^q x^r$ 의 계수와 같다. 따라서 $b_n = c_n$ 이다.
그러므로 $g(x)$ 는 수열 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ 의 생성함수이다.

이와 같이 생성함수는 함수를 관찰함으로써 수열의 성질을 파악할 수 있는 중요한 도구가 된다. 생성함수는 주로 조합의 개수를 구하는 데 유용하게 사용되지만 우리의 주요 관점은 생성함수를 이용하여 점화식을 해결할 수 있다는 것이다.

[예제2] (선형동차점화식)

$a_0 = 1, a_1 = -2, a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}\ (n \ge 2)$ 로 정의되는 수열의 일반항을 생성함수를 이용하여 구하시오.

[풀이] 수열 $\{a_n\}$ 의 생성함수를 $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 이라 하자.

각 $n=1,2,3,\cdots$ 에 대하여 $a_n-5a_{n-1}+6a_{n-2}=0$ 이므로

$$\begin{array}{rcl} g(x) & = & a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots \\ -5xg(x) & = & -5a_0x-5a_1x^2-5a_2x^3-5a_3x^4+\cdots \\ +6x^2g(x) & = & 6a_0x^2+6a_1x^3+6a_2x^4+\cdots \end{array}$$

이다. 세 등식을 변끼리 더하면

$$(1-5x+6x^2)g(x)=a_0+(a_1-5a_0)x=1-7x$$

이다. 따라서

$$g(x)=\frac{1-7x}{1-5x+6x^2}=\frac{5}{1-2x}-\frac{4}{1-3x}$$

$$=5\sum_{n=0}^{\infty}2^nx^n-4\sum_{n=0}^{\infty}3^nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(5\times2^n-4\times3^n)x^n$$

그러므로 $a_n=5\times2^n-4\times3^n\,(n\ge0)$ 이다.

[예제3] (비동차선형점화식)

$a_0=1, a_n=8a_{n-1}+10^{n-1}\,(n\ge1)$ 으로 정의되는 수열의 일반항을 구하시오.

[풀이] 수열 $\{a_n\}$ 의 생성함수를 $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 이라 하면

$$\begin{aligned} g(x)-a_0 &= \sum_{n=1}^{\infty}(8a_{n-1}+10^{n-1})x^n=8\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}10^{n-1}x^n \\ &= 8x\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n-1}+x\sum_{n=1}^{\infty}10^{n-1}x^{n-1} \\ &= 8x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+x\times\frac{1}{1-10x}=8xg(x)+\frac{x}{1-10x} \end{aligned}$$

이 등식을 $g(x)$ 에 관하여 풀면

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1-9x}{(1-8x)(1-10x)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-8x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-10x} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}8^nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}10^nx^n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(8^n+10^n) \end{aligned}$$

$$\therefore a_n=\frac{1}{2}(8^n+10^n)\ (n\ge0)$$

예시답안

풀어보기

문제 1 $\log a_n$ 의 가수가 $\log a_{n+1}$ 의 가수와 같으므로$\log a_n - \log a_{n+1}$ 은 정수이다.

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} < 100$$

양변에 log 를 취하면 $0 < \log a_n - \log a_{n+1} < 2$ 이므로 $\log a_n - \log a_{n+1} = 1$ 이다.

$$\therefore\ a_{n+1} = \frac{1}{10}a_n$$

따라서 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 a_1 이고 공비가 $\dfrac{1}{10}$ 인 등비수열이므로$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-\frac{1}{10}} = 500$ 이므로

$a_1 = 450$

문제 2 $(2^k)^2 - (2^n + 4^n)2^k + 8^n = (2^k - 2^n)(2^k - 2^{2n}) \le 1 \quad \therefore n \le k \le 2n$

$$\sum_{k=1}^{2n} k - \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} = \frac{3}{2}n(n+1) = a_n$$

$$\sum_{n=1}^{20} \frac{1}{a} = \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{20}\frac{1}{n(n+1)} = \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{20}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right) = \frac{40}{63}$$

$$\therefore p+q = 103$$

문제 3

(1) $a_{m+n} = a_{m+n-2} + a_{m+n-1} = a_1 a_{m+n-2} + a_2 a_{m+n-1} = a_1 a_{m+n-2} + a_2(a_{m+n-3} + a_{m+n-2})$

$\qquad = a_2 a_{m+n-3} + (a_1 + a_2)a_{m+n-2} = a_2 a_{m+n-3} + a_3 a_{m+n-2}$

이와 같이 계속하면 $a_{m+n} = a_p a_q + a_r a_s$ 꼴로 나타낼 수 있고 이 때, $p+q = m+n-1$, $r+s = m+n+1$, $r-p=1$ 이다. 그러므로 $p = m-1$ 일 때 $a_{m+n} = a_{m-1}a_n + a_m a_{n+1}$ 이 성립한다.

$a_{m+n} = a_{m-1}a_n + a_m a_{n+1}$ 에서$m = n+1$ 이면 $a_{2n+1} = (a_n)^2 + (a_{n+1})^2$ 이 된다.

제시문에 의해 등비수열 $\{t^n\}$ 이 점화식 $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n\ (n \ge 1)$ 을 만족한다고 가정하면

$$t^{n+2} = 2t^{n+1} + 3t^n \quad 즉,\ t^2 - 2t - 3 = 0$$

가 되고 $t = 3$, -1 이므로 $\{3^n\}$ 과 $\{(-1)^n\}$ 과 $a3^n + b(-1)^n$ 꼴이다.

여기서 $\{3^n\}$ 과 $\{(-1)^n\}$ 은 $a_1 = 0, a_2 = 1$ 를 만족하지 않는다. 따라서 $3a - b = 0$, $9a + b = 1$

이 되고, 이 식을 풀면 $a=\frac{1}{12}$, $b=\frac{1}{4}$ 이므로 구하려는 수열의 일반항 a_n 은

$$a_n=\frac{3^n}{12}+\frac{(-1)^n}{4}=\frac{1}{4}\left\{3^{n-1}+(-1)^n\right\}\ (n\ge 1)$$

이다.

(2) 제시문에 의해 $pt^2+qt+r=0\,(p\neq 0)$ 의 두 근을 α, β 라고 하면 임의의 c_1, c_2 에 대해 $a_n=c_1\alpha^n+c_2\beta^n$ 이다. 따라서

$$c_1\alpha+c_2\beta=a_1$$
$$c_1\alpha^2+c_2\beta^2=a_2$$

이고 행렬의 곱셈으로 표현하면

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \alpha^2 & \beta^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1 \\ c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1 \\ a_2\end{pmatrix}$$

이다. 초깃값 a_1 과 a_2 가 어떻게 주어지더라도 수열 $\{a_n\}$ 이 단 하나 존재하기 위해서는 $\alpha\beta^2-\alpha^2\beta\neq 0$ 이어야 한다. $\alpha\beta(\beta-\alpha)\neq 0$ 이므로 $\alpha\neq 0, \beta\neq 0, \alpha\neq\beta$ 이다.
즉, 두 근이 모두 0 이 아니면서 또한 두 근은 서로 같지 않아야 한다.

논제 I -1*

$p+q+r\neq 0$ 에 대하여 $pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0$ 을 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 이 수렴한다고 하자. $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ 라 놓고 등식 $pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0$ 에 $n\to\infty$ 의 극한을 취하면
$(p+r+r)\alpha=0$ 을 얻는다. 이때 $p+q+r\neq 0$ 이므로 $\alpha=0$ 이어야 한다. 한편 $p+q+r=0$ 인 경우에는 $(p+r+r)\alpha=0$ 은 모든 실수 α 에 대하여 성립하므로 $\alpha=\lim_{n\to\infty}a_n=0$ 이 반드시 성립할 필요가 없다. 실제로 제시문 [가]에서 수열의 일반항 $a_n=a_1+\dfrac{(a_2-a_1)\left\{1-\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{r}{p}}$ 은 $-1<\frac{r}{p}<1$ 인 경우에 $a_1+\dfrac{a_2-a_1}{1-\frac{r}{p}}$ 으로 수렴한다.

논제 I -2

$a_1=1$, $a_2=4$ 그리고 $(a_{n+2}-2a_{n+1})=2(a_{n+1}-2a_n)$ 에서 $a_{n+1}-2a_n=b_n$ 이라 놓으면 $b_{n+1}=2b_n$, $b_1=a_2-2a_1=2$ 이므로 $b_n=2\times 2^{n-1}=2^n$ 이고 따라서 $a_{n+1}-2a_n=2^n$ 이 성립

* [논제 I -1~논제 I -3] 서강대 예시답안 참조

한다. 이 식의 양변을 2^{n+1} 로 나누면 $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=\frac{1}{2}$ 가 성립하므로 수열 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 은 첫째항이 $\frac{1}{2}$ 이고 공차가 $\frac{1}{2}$ 인 등차수열이다. 따라서 $\frac{a_n}{2^n}=\frac{1}{2}+(n-1)\frac{1}{2}=\frac{n}{2}$ 가 성립하여 $a_n=n2^{n-1}$ 을 얻는다.

한편, $a_1=1$, $a_2=4$, $a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=0$ 인 경우 $(a_{n+2}-\alpha a_{n+1})=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$ 라 놓고 비교하면 $\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=3$ 으로부터 $(\alpha,\beta)=(1,3)$ 또는 $(3,1)$ 을 얻으므로, 제시문[나]로부터

$$a_{n+1}-a_n=(4-1)3^{n-1}=3^n$$
$$a_{n+1}-3a_n=(4-3)1^{n-1}=1$$

이 성립한다. 위 식에서 아래 식을 빼고 정리하면 $a_n=\frac{1}{2}(3^n-1)$ 을 얻는다.

논제 I -3

$a_k=k$ 분 후에 용기 A 에 들어있게 되는 리터 단위의 물의 양,
$b_k=k$ 분 후에 용기 B 에 들어있게 되는 리터 단위의 물의 양
이라 놓으면 다음이 성립한다.

$$a_{k+1}=0.9a_k+0.2b_k$$
$$b_{k+1}=0.1a_k+0.8b_k$$

위의 식에서 $b_k=5a_{k+1}-4.5a_k$ 을 얻고 이를 식에 대입하면 다음을 얻는다.

$$5a_{k+2}-4.5a_{k+1}=0.1a_k+0.8(5a_{k+1}-4.5a_k)$$

이를 정리하면 $5a_{k+2}-8.5a_{k+1}+3.5a_k=0$ 이 성립하고 ($p+q+r=0$ 인 경우)

따라서 $a_{k+2}-a_{k+1}=\frac{7}{10}(a_{k+1}-a_k)$ 가 성립하고, $-1<\frac{7}{10}<1$ 이므로 $\lim_{k\to\infty}a_k=a$ 가 존재한다.

모든 자연수 k 에 대하여 a_k+b_k 는 일정한 값이므로 $\lim_{k\to\infty}b_k=b$ 도 존재한다.

이제 방정식

$$a=0.9a+0.2b$$
$$b=0.1a+0.8b$$

를 풀면 $a=2b$ 를 얻고 따라서 A 에 담긴 물의 양과 용기 B 에 담긴 물의 양의 비율은 특정한 값 2 에 수렴한다.

논제 II -1*

1 순위를 가장 많이 얻은 후보가 당선되기로 할 때, 38 표로 1 순위를 가장 많이 얻은 후보 A 가 총장에 당선되어야 한다. 이는 국회의원 선거에서 당선자가 나오는 방식과 금메달의 숫자로

* [논제 II -1~논제 II -3] 서강대 예시답안 참조

만 올림픽 출전국가의 순위를 매기는 방식과 같다.
1 순위에게 4 점, 2순위에게 3 점, 3 순위에게 2 점, 4 순위에게 1 점을 그 점수를 합하는 방법을 택할 때, 총점 248 로 B 가 가장 높은 점수를 얻어 281 점으로 2 위를 차지한 후보 C 를 누르고 총장에 당선된다. 이는 A 는 4 점, B 는 3 점, C 는 2 점, D 는 1 점으로 간주하여 성적을 산출하는 대학교 학점 평가 방식과 같다.
후보끼리 일대일로 선호도를 비교할 때, C : A = 62 : 38 , C : B = 52 : 48 , C : D = 67 : 33 으로 후보 C 가 당선된다. 이는 출전 팀들이 일대일로 풀리그를 벌여서 우승자를 결정짓는 운동경기에 비교할 수 있다.

다른 풀이

A 주장의 근거 : 유권자들이 후보 중 한 명에게 한 표를 던져 최다 득표자가 당선되는 단순다수결 방법을 적용해 보자.
이 문제에서는 1순위를 가장 많이 얻은 후보가 당선된다고 생각할 수 있다. A는 1순위 득표수가 38, B 는 1순위 득표수가 11, C 는 1순위 득표수가 30, D 는 1순위 득표수가 21이므로 후보A가 총장으로 당선된다.
B 주장의 근거 : 유권자가 여러 명의 후보자 모두에게 순위를 두고 순위별 가중치를 부여하여 이를 합산한 점수로 선출하는 투표방식인 점수투표(보다 산출법, Borda count method)를 적용해 보자.
1, 2, 3, 4 순위에 각각 4점, 3점, 2점, 1점을 부여하면

$$\text{A의 점수} = 4\times38+2\times2+1\times60=216$$
$$\text{B의 점수} = 4\times11+3\times64+2\times23+1\times2=284$$
$$\text{C의 점수} = 4\times30+3\times22+2\times47+1\times1=281$$
$$\text{D의 점수} = 4\times21+3\times14+2\times28+1\times37=219$$

이므로 후보B 가 총장으로 당선된다.
C 주장의 근거 : 후보들을 두 후보씩 짝을 지어 비교하여 두 후보 중 지지도가 높은 후보에게 1 점, 지지도가 같으면 각각에게 0.5점씩을 주고 이 점수를 합산하여 가장 높은 점수를 얻은 후보가 당선되는 쌍대비교를 적용해 보자.

$$A:B=38:62,\ A:C=38:62,\ A:D=40:60,$$
$$B:C=48:52,\ B:D=74:23,\ C:D=67:33$$

이므로 A는 0점, B 는 2점, C 는 3점, D 는 1점이 되어 후보C 가 총장으로 당선된다.

논제 Ⅱ-2

1 위 최소득표 후보를 차례로 탈락시키고 마지막으로 남은 후보가 당선되는 방식을 고려해보자. 투표 시 처음부터 지지하는 후보를 1 순위, 1 순위 후보가 탈락할 때 지지하는 후보를 2 순위, 2 순위 후보가 탈락할 때 지지하는 후보를 3 순위 등으로 기표하면 단 한 번 투표로 최종 당선자를 산출할 수 있다. 이런 방식으로 택하는 경우 1 순위 지지자가 11 명뿐인 후보 B 가 가장 먼저 탈락하고, B 가 없는 상황에서 투표결과를 상정하면 후보 C 가 이어서 탈락하고 최종 선

발은 남은 후보 A와 D 중 다수의 표를 얻은 후보 D가 당선된다.

다른 풀이

1순위를 최하위로 득표한 후보를 탈락시키고 탈락시킨 후보가 1순위를 받은 표에서 2순위로 지지한 후보에게 탈락시킨 후보의 득표수를 합산해 주는 방법을 반복하여 최종 과반수 득표자를 뽑는 방식을 적용해 보자.

1순위 지지자가 11명뿐인 후보B가 가장 먼저 탈락하고, B가 없는 상황에서 투표결과를 상정하면 후보C가 이어서 탈락하고 최종 선발은 남은 후보 A와 D중 다수의 표를 얻은 후보D가 당선된다.

논제 Ⅱ-3

주어진 식 $f_1+f_2+f_3+f_4+f_5+f_6=20,\ f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6 \geq 1$ 와 $f_3+f_4+f_6=11,$ $f_2+f_5+f_6=14,\ f_1+f_2+f_3=12$ 로부터 $f_1+f_2+f_5=9$, $f_1+f_3+f_4=6,$ $f_4+f_5+f_6=8$ 을 얻는다. 이중 가장 간단한 식 $f_1+f_3+f_4=6$ 으로부터 $2 \leq f_3+f_4 \leq 5$ 가 성립하므로 $f_3+f_4=2,3,4,5$ 를 각각 대입해서 f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6 를 구하도록 한다.

(1) $f_3+f_4=2$ 인 경우 $f_1=4, f_3=1, f_4=1$ 이고 $f_1+f_2+f_3=12$ 로부터 $f_2=7$ 을 얻으나 $f_1+f_2+f_5=9$ 를 만족할 수 없다.

(2) $f_3+f_4=3$ 인 경우 $f_1=3, f_3=1, f_4=2$ 또는 $f_1=3, f_3=2, f_4=1$ 이 성립하나 이는 $f_1+f_2+f_3=12$ 와 $f_1+f_2+f_5=9$ 를 동시에 만족할 수 없다.

(3) $f_3+f_4=4$ 인 경우 $f_3+f_4+f_6=11$ 로부터 $f_6=7$ 을 얻으나 $f_4+f_5+f_6=8$ 을 만족할 수 없다.

(4) $f_3+f_4=5$ 인 경우 $f_1=1$ 이고 $f_3+f_4+f_6=11$ 로부터 $f_6=6$ 을 얻고 $f_4+f_5+f_6=8$ 로부터 $f_4=1, f_5=1$ 을 얻고 따라서 $f_3=4$ 가 된다. 또한 $f_1+f_2+f_3=12$ 로부터 $f_2=7$ 을 얻는다. 이렇게 얻어진 $(f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6)=(1,7,4,1,1,6)$ 은 모든 식을 만족한다.

따라서 위원회가 공표한 내용만으로 총장 당선자가 유일하게 결정되며, 당선자는 8명에게서 1위 득표를 얻은 후보A이다.

21 서강대학교(자연과학부/전자공학부)

문제1 다음 글을 읽고, 물음에 답하여라.*

[가] 방정식 $a^2+b^2=c^2$ 을 만족하는 자연수의 순서쌍 (a,b,c) 를 피타고라스 수라고 말한다. 특히 a,b,c 가 서로소일 때 (a,b,c) 를 원시 피타고라스 수라고 한다. 만약 (a,b,c) 가 원시 피타고라스 수이면 a 와 c 는 서로소이고 a 또는 b 중에 하나는 반드시 2 의 배수이어야 한다. 임의의 피타고라스 수는 원시 피타고라스 수의 자연수 배로 쓸 수 있다. 원시 피타고라스 수를 찾는 다양한 방법들이 고대 그리스 시대부터 많이 연구되었다. 피타고라스 수 $(a,\,b,\,c)$ 에 대해 $x=\dfrac{a}{c}$, $y=\dfrac{b}{c}$ 로 놓으면 x,y 는 양의 유리수이고 $x^2+y^2=1$ 이다. 역으로 x,y 가 양의 유리수이고 $x^2+y^2=1$ 을 만족하면, 적당한 자연수 $a,\,b,\,c$ 에 대하여 $x=\dfrac{a}{c}$, $y=\dfrac{b}{c}$ 이고 $a^2+b^2=c^2$ 이다. 따라서 피타고라스 수를 찾기 위해서 중심이 원점인 단위원 위의 양의 유리수로 이루어진 순서쌍 (x,y) 를 구하는 문제를 생각한다. $(p,\,q)$ 를 지나는 직선 $y=tx+1$ 을 생각하면 기울기 t 는 $-1<t<0$ 인 유리수이다. (【그림 1】 참고)

[나] 임의의 실수 t 에 대하여 연립방정식 $x^2+y^2=1$, $y=tx+1$ 의 해 (x,y) 를 구하자. 먼저 y 를 소거하면 $x^2+(tx+1)^2=1$. 즉 $(1+t^2)x^2+2tx=0$ 이다. 좌변을 인수분해하면 $x\left[(1+t^2)x+2t\right]=0$ 이므로 $x=0$ 또는 $x=-\dfrac{2t}{1+t^2}$ 이다. 따라서 구하는 해는 $x=0$, $y=1$ 또는 $x=-\dfrac{2t}{1+t^2}$, $y=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ 이다.

[다] 제시문 [가]와 [나]로부터, $x^2+y^2=1$ 을 만족하는 모든 양의 유리수 x 와 y 는

$$x(t)=\frac{-2t}{1+t^2}\ ,\ y(t)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

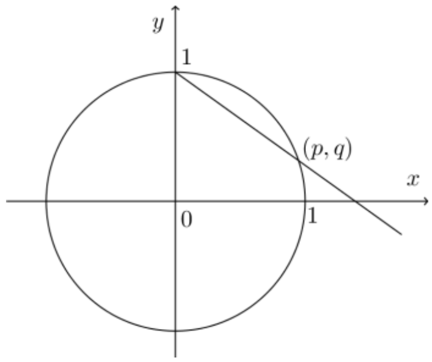
의 매개변수 방정식으로 나타난다는 것을 알 수 있다. 여기서 t 는 $-1<t<0$ 인 유리수이다.

[라] 제시문 [가]와 유사한 방법에 의해서 $a^2+b^2+c^2=d^2$ 을 만족하는 자연수의 순서쌍 $(a,\,b,\,c,\,d)$ 를 구하는 문제로부터 단위구면 $x^2+y^2+z^2=1$ 위의 양의 유리수의 순서쌍

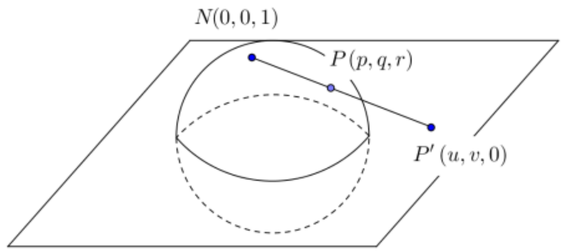
* 서강대학교 입학처

(p, q, r) 을 찾는 문제를 생각할 수 있다. 제시문 [나]의 방법을 확장하여 (p, q, r) 을 구하고자 한다. 【그림 2】처럼 구면의 북극점 $N(0, 0, 1)$ 을 지나고 점 $P(p, q, r)$ 를 지나는 직선이 구면의 적도를 지나는 xy 평면과 만나는 점을 $P'(u, v, 0)$ 라고 하면 다음 식 (1)을 만족한다.

$$p = \frac{2u}{u^2+v^2+1}\ ,\ q = \frac{2v}{u^2+v^2+1}\ ,\ r = \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$



【그림 1】



【그림 2】

논제 1-1

m, n 이 서로소인 자연수이면 mn 과 m^2+n^2 이 서로소임을 보여라.

논제 1-2

제시문 [가], [다]와 [1-1]을 이용하여, (a, b, c) 가 원시 피타고라스 수이고 a 가 2 의 배수이면 $a = 2mn$, $b = m^2 - n^2$, $c = m^2 + n^2$ 인 자연수 m, n 이 존재함을 보여라.

논제 1-3

임의의 실수 t 에 대한 매개변수방정식

$$x(t) = \frac{-2t}{1+t^2}\ ,\ y(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

은 점 $(0, -1)$ 을 제외한 단위원 상의 모든 점을 표현한다. 함수 $x(t)$, $y(t)$ 는 변수 t 와 상수의 사칙연산에 의해 표현되므로 t 에 관한 유리함수이다. 제시문 [나]를 참고하여 점 $(1, 0)$ 을 제외한 단위원 상의 모든 점 (x, y) 를 표현하는 유리함수 $x(t), y(t)$ 를 구하여라.

논제 1-4

제시문 [라]에서 (1)이 성립함을 증명하고 u, v 가 유리수임을 보여라.

문제2 **다음 글을 읽고, 물음에 답하여라.***

[가] 양의 실수 a 에 대하여 정수 n 을 지수로 가지는 a 의 거듭제곱 a^n 을 다음과 같이 정의한다.

$$a^n = \begin{cases} a \times \cdots \times a\,, & n > 0 \\ 1\,, & n = 0 \\ \left(\dfrac{1}{a}\right) \times \cdots \times \left(\dfrac{1}{a}\right), & n < 0 \end{cases}$$

그러면 임의의 양의 실수 a, b 와 정수 m, n 에 대하여 지수법칙

$$a^{m+n} = a^m a^n\ ,\ \left(a^n\right)^m = a^{nm}\ ,\ (ab)^n = a^n b^n$$

이 성립한다. 또한 $a > 1$ 일 때, $n > 0$ 이면 $a^n > 1$ 이고 $n < 0$ 이면 $a^n < 1$ 이다.

[나] 양의 실수 a 와 자연수 n 에 대하여 $x^n = a$ 를 만족하는 양의 실수 x 는 오직 하나 존재하며 이것을 a 의 양의 n 제곱근이라고 하고 $x = \sqrt[n]{a}$ 라고 나타낸다. 정수 지수에 대한 지수법칙을 이용하여 임의의 양의 실수 a, b 와 자연수 m, n, k 에 대하여

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}\ ,\ \sqrt[mk]{a^{nk}} = \sqrt[m]{a^n}\ ,\ \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$$

가 성립하는 것을 보일 수 있다. 또한 $a > 1$ 이면, 임의의 자연수 n 에 대하여 $\sqrt[n]{a} > 1$ 이다.

[다] a 를 양의 실수라고 하자. 임의의 유리수 r 에 대하여 $r = \dfrac{m}{n}$ 인 정수 m 과 자연수 n 이 항상 존재하므로 유리수 r 을 지수로 가지는 수 a^r 을

$$a^r = \sqrt[n]{a^m} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ (2)$$

으로 정의할 수 있다. 그러나 이 정의는 명확하지 않다. 왜냐하면 유리수 r 을 분수로 표현하는 방법이 한 가지가 아니기 때문이다. 보다 자세히 말하면 $r = \dfrac{m}{n}$ 을 만족하는 정수 m 과 자연수 n 의 쌍 (m, n) 이 무한히 많이 있으며 (2)의 우변이 $r = \dfrac{m}{n}$ 인 쌍 (m, n) 에 따라서 다른 값이 될 수 있기 때문이다. 사실 a^r 에 대한 위의 정의는 타당하다. 이를 보이기 위하여 정수 m, k 와 자연수 n, l 에 대하여

$$r = \frac{m}{n} = \frac{k}{l}$$

으로 쓸 수 있다고 하자. 그러면 $ml = nk$ 이므로 정수 지수에 대한 지수법칙에 의하여

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{nl} = \left(a^m\right)^l = a^{ml} = a^{nk} = \left(a^k\right)^n = \left(\sqrt[l]{a^k}\right)^{nl}$$

이고 따라서

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[l]{a^k}$$

* 서강대학교 입학처

이다. 이로부터 (2)의 우변이 r 의 분수 표현에 관계없이 일정한 값이 된다는 것을 알 수 있다. 그러므로 유리수 r 을 지수로 하는 a^r 에 대한 정의 (2)가 타당하다. 제시문 [가]와 [나]의 지수법칙과 제곱근의 성질을 이용하여 임의의 양의 실수 a, b 와 유리수 r, s 에 대한 다음의 지수법칙을 증명할 수 있다.

$$a^{r+s}=a^r a^s\ ,\ (a^r)^s=a^{rs}\ ,\ (ab)^r=a^r b^r$$

또한 $a>1$ 이고 r 이 유리수일 때, $r>0$ 이면 $a^r>1$ 이고 $r<0$ 이면 $a^r<1$ 이 되는 것도 보일 수 있다.

[라] a 를 양의 실수라고 하자. x 가 임의의 무리수이면 모든 자연수 n 에 대하여 $r_n<r_{n+1}$ 이고 $\lim_{n\to\infty} r_n=x$ 인 유리수의 수열 $\{r_n\}$ 을 항상 찾을 수 있다. 이 때, 유리수 r_n 을 지수로 가지는 수들의 수열 $\{a^{r_n}\}$ 이 어떤 실수에 수렴한다는 것이 알려져 있다. 따라서 무리수 x 를 지수로 가지는 수 a^x 을 다음과 같이 정의한다.

$$a^x=\lim_{n\to\infty} a^{r_n}$$

논제 2-1

a 를 양의 실수라고 하자. 임의의 유리수 r 에 대하여 $r=\frac{m}{n}$ 을 만족하는 서로소인 정수 m 과 자연수 n 은 오직 하나 존재한다. 따라서 제시문 [다]의 정의와 달리,

$$a^r=\sqrt[n]{a^m}\ \left(r=\frac{m}{n}\ ,\ m \text{ 과 } n \text{ 은 서로소}\right)$$

으로 정의하면 a^r 을 명확하게 정의할 수 있다. 이 정의를 이용하여, 임의의 양의 실수 a 와 유리수 r, s 에 대하여

$$a^{r+s}=a^r a^s$$

가 성립함을 보여라.

논제 2-2

a 를 $a>1$ 인 실수라고 하자. 함수 $\phi:\mathrm{N}\to\mathrm{R}$ 을 아래와 같이 정의한다.

$$\phi(n)=\frac{a^n-1}{n}\ (n\in\mathrm{N})$$

함수 ϕ 가 단조증가(즉, $m<n$ 이면 $\phi(m)<\phi(n)$)임을 수학적 귀납법으로 증명하고, 이를 이용하여 $0<r<1$ 인 임의의 유리수 r 에 대하여

$$a^r-1<r(a-1)$$

이 성립함을 보여라. 여기서 N 과 R 은 각각 자연수의 집합과 실수의 집합을 나타낸다.

논제 2-3

a 를 $a>1$ 인 실수라고 하자. [2-2]의 결과를 이용하여 r 이 유리수, $\{r_n\}$ 이 유리수의 수열이고 $\lim_{n\to\infty} r_n = r$ 이면 $\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = a^r$ 임을 보여라. (힌트: 모든 자연수 n 에 대하여 $|a_n - L| \le b_n$ 이고 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ 이면 $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ 이다.)

논제 2-4

제시문 [라]에서 제안된 무리수 x 에 대한 a^x 의 정의가 명확하지 않은 이유를 밝혀라. 그럼에도 불구하고 이 정의가 타당함을 [2-3]의 결과에 근거하여 설명하여라.

논술유형분석

문항 수	수학 2문항(소문항 8문항)	시간	120분
연관 개념	피타고라스 수, 매개변수를 이용한 함수표현, 지수법칙, 무리수의 유리수근사, 수열의 극한		

제시문분석

[문제1]-제시문[가]

피타고라스 수의 정의와 피타고라스 수를 찾기 위해 단위원과 직선의 교점을 생각하는 문제로 바꿀 수 있음을 설명하고 있다.

[문제2]-제시문[나]~[다]

제시문[가]에서 제시한 단위원과 직선의 교점의 좌표를 구하고, 성분을 변수 t 에 관한 매개변수 방정식으로 표현할 수 있음을 설명하고 있다.

[문제1]-제시문[라]

비선형방정식 $a^2+b^2+c^2=d^2$ 을 만족하는 자연수의 순서쌍 (a, b, c, d) 를 구하는 문제를 단위구면과 구면의 북극점을 지나는 직선과의 교점을 찾는 문제로 바꿀 수 있음을 설명하고 있다.

[문제2]-제시문[가]~[나]

거듭제곱의 정의와 지수법칙에 대해 설명하고 있다.

[문제2]-제시문[다]

지수가 유리수일 때 거듭제곱의 정의의 정당성과 지수법칙이 성립함을 설명하고 있다.

[문제2]-제시문[라]

무리수를 지수로 가지는 수에 수렴하는 유리수를 지수로 갖는 수열이 존재함을 설명하고 있다.

논제분석

논제 1-1

서로소인 두 자연수에 대해 두 자연수의 곱과 제곱의 합 역시 서로소임을 증명하도록 하고 있다.

논제 1-2

[논제 1-1]과 제시문 [가], [다]를 이용하여 직접 피타고라스 수의 형태를 찾는 문항이다. [가], [다]에서 제시된 매개변수방정식에서 매개변수를 제거하고, [논제1-1]에서 구한 서로소 조건을 활용하여야 표현할 수 있다.

논제 1-3

제시문 [가], [나]에서 단위원과 직선의 교점의 성분을 나타낸 매개변수방정식과 같이 점$(1,0)$을 제외한 단위원 상의 모든 점을 표현하는 좌표의 성분을 구하도록 하고 있다.

논제 1-4

제시문[라]의 단위구면과 북극점을 지나는 직선의 교점을 직접 대입하여 계산할 수 있는 가를 묻고 있다.

논제 2-1

지수가 서로소인 두 정수의 비로 표현된 거듭제곱의 지수법칙을 제시문을 이용하여 증명할 수 있는 지를 묻고 있다.

논제 2-2

단조증가인 수열 $\phi(n)$을 이용하여 주어진 부등식을 지수법칙을 활용하여 증명할 수 있는 지를 묻고 있다.

논제 2-3

유리수에 수렴하는 유리수 수열을 이용하여 지수가 유리수 수열로 정의된 수열이 수렴함을 증명하도록 하고 있다.

논제 2-4

무리수에 수렴하는 유리수 수열을 지수로 갖는 수열의 수렴성에 대해 논하고 정당함을 증명하도록 하고 있다.

배경지식쌓기

1. 피타고라스 삼중쌍(Phytagorean triple)

가. 정의 : $x^2+y^2=z^2$ 을 만족하는 세 정수 x, y, z 의 집합이다. $\gcd(x, y, z)=1$ 이면 그 삼중쌍은 원시적(primitive)이라 불린다.

나. 피타고라스 방정식 $x^2+y^2=z^2$ 의 조건 $\gcd(x, y, z)=1$, $2|x$, $x>0$, $y>0$, $z>0$ 을 만족하는 모든 해는 $x=2st$, $y=s^2-t^2$, $z=s^2+t^2$ 으로 주어진다. 여기서 정수 $s>t>0$ 는 $\gcd(s, t)=1$ 이고 $s\not\equiv t\,(\mathrm{mod}2)$ 이다.

2. 조임정리(Squeeze Theorem)

두 수열 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 이 모두 α 에 수렴한다고 하자. 어떤 자연수 N 보다 큰 모든 자연수 n 에 대하여 $x_n \le z_n \le y_n$ 을 만족하면, 수열 $\{z_n\}$ 은 α 에 수렴한다.

3. 수학적귀납법

자연수 n 에 대한 명제 $p(n)$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다는 것을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

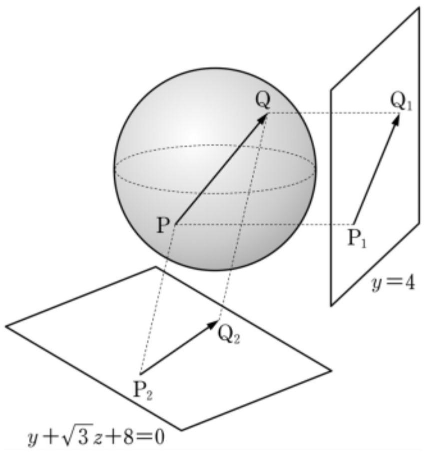
① $n=1$ 일 때, 명제 $p(n)$ 이 성립한다.

② $n=k$ 일 때, 명제 $p(n)$ 이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$ 일 때도 명제 $p(n)$ 이 성립한다.

풀어보기

문제 1 좌표공간에서 구 $x^2+y^2+z^2=4$ 위를 움직이는 두 점 P, Q 가 있다. 두 점 P, Q에서 평면 $y=4$ 에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{Q_1}$ 이라 하고, 평면 $y+\sqrt{3}z+8=0$ 에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{P_2}$, $\mathrm{Q_2}$ 라 하자.

$2|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{P_1Q_1}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{P_2Q_2}}|^2$ 의 최댓값을 구하시오.(2013년 11월 대수능)



문제 2 $(0, 0, 0)$ 에서 $(1, 1, 1)$ 방향으로 빛을 쏜다. 평면 $x+2y+3z=6$ 에 반사된 빛의 경로를 구하시오. (직선식) (2010년 성균관대 수시사고력 평가)

문제 3 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 부등식

$$3n^2+2n<a_n<3n^2+3n$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{5a_n}{n^2+2n}$ 의 값을 구하시오. (2013년 6월 평가원)

읽기자료

연분수를 이용한 무리수 근사

연분수의 기원을 정확히 지적하기는 어렵다. 그 이유는 연분수에 해당하는 예를 과거 2000 년의 수학사 곳곳에 찾아볼 수 있기 때문이다. 그 중에서도 $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{127}$, $\cdots$ 과 같이 1 을 분자로 하는 단위 분수는 이집트인들의 사랑을 받았다고 한다. 린드 파피루스에 의하면 다음과 같은 단위 분수가 있었다고 한다.

$$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15},\ \frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28},\ \cdots$$

왜 이집트인들이 분수를 이런 식으로 표현하려고 하였는지 분명하지는 않지만, 분수를 이런 단위 분수로 표현하면 어떤 분수가 큰지 금방 알 수 있는 편리함은 있다. 중세의 수학자인 레오나르도 다빈치는 $\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$을 이용하여 어떤 분수라도 단위 분수의 합으로 무한히 확장이 가능함을 알았다. 연분수의 진정한 기초가 마련된 것은 1600 년대 후반과 1700 년대 초반 사이의 일이다. 유클리드 알고리즘을 대수적으로 조작하여 두 실수(또는 복소수) p, q 의 최대공약수를 구하는 반대 과정을 통해서 유리수 $\frac{p}{q}$ 를 단순연분수로 나타낼 수 있음을 알게 된다. 이 알고리즘과 연분수 사이의 밀접한 관련성 때문에 유클리드 알고리즘의 창조가 연분수 발달의 시초였다고 한다.


호이겐스(1629-1695)

이탈리아의 봄벨리(Rafael Bombelli, 1526 ~ 1573)와 카탈디(Pietro Cataldi, 1548 ~ 1626)가 연분수의 연구에 기여하였는데 봄벨리는 반복적 형태를 띠는 연분수를 사용하여 $\sqrt{13}$ 을, 카탈디는 $\sqrt{18}$ 을 표현하였다.

한편, 영국의 왕립학술원의 초대 회장인 브룬커(Brouncker, 1620 ~ 1684)는 $\frac{\pi}{4}$ 를 다음과 같이 나타내었다.

$$\frac{\pi}{4}=1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{\cdots}}}}$$

네덜란드의 수학자이자 천문학자인 호이겐스(Christtion Huygens, 1629 ~ 1695)은 연분수의 실제적 응용을 보여준 최초의 인물이다. 그는 여러 개의 톱니바퀴 사이의 비에 대한

최적의 유리수 근삿값을 구하기 위해 연분수의 수렴 성질을 어떻게 사용하는지를 설명하는 글을 발표하였다.
오일러는 그의 저서 De Fractionous Continious(1737)에서 모든 유리수는 유한연분수로 나타낼 수 있음을 증명하였다. 또한 자연로그 e 를 연분수의 형태로 나타내고, e 와 e^2 이 무리수임을 증명하였다.
19 세기는 연분수가 수학자들 사이에 인기있는 연구 주제였는데 특히 수렴성에 대한 연구에서 그러했다. 20 세기 초반부터 연분수는 다른 분야에서 나타나기 시작했다. 연분수의 뛰어난 융통성으로 인해 혼돈이론(Chaos Theory)과 실수에 근사하는 유리수 근삿값의 계산과 부정방정식을 풀기 위한 컴퓨터 알고리즘에 활용되고 있다.

■ **오일러의 연분수 공식**

유한 복소수항 급수에 대해 오일러의 연분수 공식은 다음과 같다. 이 형태는 오일러가 입안한 초기의 형태이다.

$$a_0+a_0a_1+a_0a_1a_2+\cdots+a_0a_1a_2\cdots a_n=\cfrac{a_0}{1-\cfrac{a_1}{1+a_1-\cfrac{a_2}{1+a_2-\cfrac{\ddots}{\ddots\cfrac{a_{n-1}}{1+a_{n-1}-\cfrac{a_n}{1+a_n}}}}}}$$

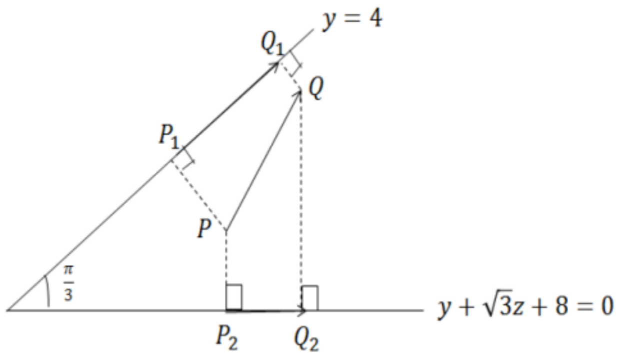
■ **π 의 연분수 공식**

$$\pi=\cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\ddots}}}}}$$

예시답안

풀어보기

문제 1



두 평면 $y=4$ 와 $y+\sqrt{3}z+8=0$ 의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{h_1}$, $\overrightarrow{h_2}$ 라 하면 두 평면이 이루는 예각의 크기 γ 는 $\cos\gamma=\dfrac{|\overrightarrow{h_1}\bullet\overrightarrow{h_2}|}{|\overrightarrow{h_1}||\overrightarrow{h_2}|}=\dfrac{1}{2}$ 에서 $\gamma=\dfrac{\pi}{3}$ 이다.

벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ 와 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{P_1Q_1}}$ 이 이루는 예각의 크기를 α, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ 와 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{P_2Q_2}}$ 가 이루는 예각의 크기를 β 라 하면 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $\alpha+\beta=\dfrac{2\pi}{3}$ 이다. 그러므로

$$\begin{aligned}2|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{P_1Q_1}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{P_2Q_2}}|^2 &=\left(|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{P_1Q_1}}|^2\right)+\left(|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{P_2Q_2}}|^2\right)\\&=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)\\&=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2-\left\{1-\frac{1}{2}(\cos2\alpha+\cos2\beta)\right\}\end{aligned}$$

주어진 식은 $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ 의 값이 최대이고, $\cos2\alpha+\cos2\beta$ 의 값이 최소일 때 최댓값을 갖는다.

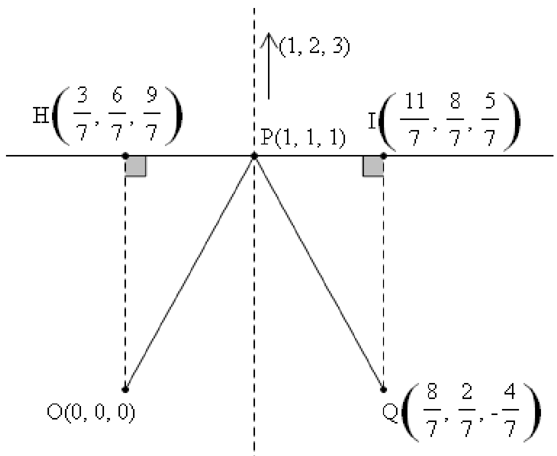
$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{3}$ 인 경우에

$$\cos2\alpha+\cos2\beta=\cos2\alpha+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-2\alpha\right)=\frac{1}{2}\cos2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2\alpha=\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$$

이므로 주어진 식은 $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=4$ 이고 $\cos2\alpha+\cos2\beta=-1$ 일 때, 최댓값 24 를 갖는다.

$\alpha+\beta=\dfrac{2\pi}{3}$ 인 경우도 마찬가지이다. 따라서 최댓값은 24 이다.

문제 2



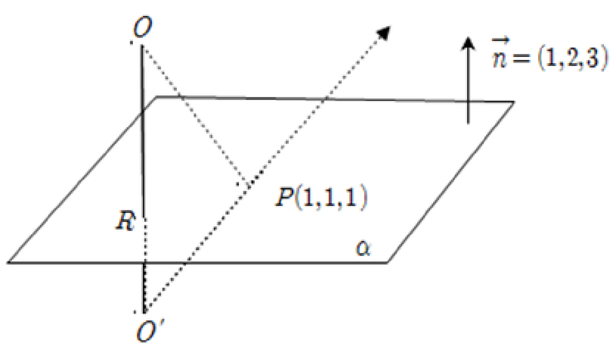
그림과 같이 점 $\mathrm{P}(1, 1, 1)$ 은 평면 위의 점이므로 빛이 반사되어 지나는 점 Q 는 점 P 를 지나고 평면에 수직인 직선에 대한 점 O 의 대칭점이다.

원점 O 에서 평면에 내린 수선의 발을 H 라 하면 점 H 는 직선 $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ 과 평면 $x+2y+3z=6$ 과의 교점이므로 $\mathrm{H}\left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{9}{7}\right)$ 이다. 점 Q 에서 평면에 내린 수선의 발을 I라 하면 $\triangle \mathrm{OHP} \equiv \triangle \mathrm{QIP}$ 이므로 $\overrightarrow{\mathrm{HP}}=\overrightarrow{\mathrm{PI}}$ 이다. 따라서 점 I 의 좌표는 $\mathrm{I}\left(\frac{11}{7}, \frac{8}{7}, \frac{5}{7}\right)$ 이다. 또, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{QI}}$ 이므로 점 Q 의 좌표는 $\mathrm{Q}\left(\frac{8}{7}, \frac{2}{7}, -\frac{4}{7}\right)$이다.

그러므로 반사된 빛의 경로의 방향벡터는 $\left(\frac{1}{7}, -\frac{5}{7}, -\frac{11}{7}\right)$, 즉 $(1, -5, -11)$ 이다. 이를 직선의 방정식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-5}=\frac{z-1}{-11} \ (x \geq 1)$$

다른 풀이



점 O 의 평면 α 에 대한 대칭점을 O'라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{OO}'}$ 는 $\vec{n}=(1, 2, 3)$ 와 평행하므로

$\overrightarrow{OO'} = (k, 2k, 3k)$ (단, k는 상수)이다. 선분 OO'의 중점 $R\left(\frac{k}{2}, k, \frac{3k}{2}\right)$가 평면 α 위의 점이므로 $x+2y+3z=6$에 대입하면 $k=\frac{6}{7}$이다. 따라서 $O'\left(\frac{6}{7}, \frac{12}{7}, \frac{18}{7}\right)$이다. 그러므로 구하려는 직선은 방향벡터가 $\overrightarrow{O'P} = \left(\frac{1}{7}, -\frac{5}{7}, -\frac{11}{7}\right)$이고 $P(1, 1, 1)$를 지나는 직선이므로

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z-1}{-11} \ (x \geq 1)$$

이다.

문제 3 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $3n^2+2n < a_n < 3n^2+3n$을 만족한다. 따라서 $\frac{5(3n^2+2n)}{n^2+2n} < \frac{5a_n}{n^2+2n} < \frac{5(3n^2+3n)}{n^2+2n}$이 성립하고

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5(3n^2+2n)}{n^2+2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{5(3n^2+3n)}{n^2+2n} = 15$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{5a_n}{n^2+2n} = 15$이다.

논제 Ⅰ-1

mn, m^2+n^2이 서로소가 아니라고 가정하자. 그러면 mn, m^2+n^2의 소수인 공약수 p가 존재한다. mn이 p의 배수이고, p는 소수이므로 m, n 중 적어도 하나는 p의 배수이다. m이 p의 배수라고 하자. m^2+n^2도 p의 배수이고, m^2도 p의 배수이므로 n^2도 p의 배수이다. 따라서 p가 소수이므로 n도 p의 배수가 되는데, 이는 m, n이 서로소라는 가정에 모순이다. 그러므로 mn과 m^2+n^2은 서로소이다.

논제 Ⅰ-2

(a,b,c)를 원시 피타고라스 수이고 a가 2의 배수라고 하자. [가], [다]에서 모든 피타고라스 수 (a,b,c)에 대해 $x=\frac{a}{c}$, $y=\frac{b}{c}$라 두면 x와 y는 어떤 유리수 $-1 < t = -\frac{n}{m} < 0$가 존재해서($m$, n은 서로소인 자연수, $n < m$)

$$x = \frac{-2t}{1+t^2}, \ y = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

이다. $t=-\frac{n}{m}$을 대입하여 정리하면

$$x(t)=\frac{2\frac{n}{m}}{1+\frac{n^2}{m^2}}=\frac{2mn}{m^2+n^2}=\frac{a}{c}\ ,\ y(t)=\frac{1-\frac{n^2}{m^2}}{1+\frac{n^2}{m^2}}=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}=\frac{b}{c}$$

이다. 다시 $(x(t))^2+(y(t))^2=1$ 에 대입하면

$$(2mn)^2+(m^2-n^2)^2=(m^2+n^2)^2$$

이다. 따라서 $(2mn, m^2-n^2, m^2+n^2)$ 은 피타고라스 수이다.

그리고 (a, b, c)는 원시 피타고라스 수로 서로 소이므로

$$\frac{a}{c}=\frac{2mn}{m^2+n^2}\ ,\ \frac{b}{c}=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$$

에서 $ak=2mn,\ bk=m^2-n^2,\ ck=m^2+n^2$을 만족하는 자연수 k가 존재한다.
따라서

$$a=2\left(\frac{1}{k}mn\right),\ b=\frac{1}{k}(m^2-n^2),\ c=\frac{1}{k}(m^2+n^2).$$

이고, a는 2의 배수이므로 k 는 mn, m^2-n^2, m^2+n^2 의 공약수이다.
그런데 논제 [1-1]에서 m, n 이 서로 소일 때, mn 과 m^2+n^2 은 서로 소이므로 $k=1$이다. 그러므로

$$(a, b, c)=(2mn, m^2-n^2, m^2+n^2)$$

이다.

논제 I -3

x축과 수직인 직선은 기울기가 있는 직선의 방정식으로 정의할 수 없으므로 $(1,0)$을 지나는 직선을 생각한다. 임의의 실수 t 에 대해 $x^2+y^2=1$, $y=t(x-1)$ 의 해 (x, y) 를 구하자. 이것은 단위원과 점 $(1, 0)$ 을 지나는 직선 (x 축에 수직한 직선 제외)의 교점으로 해석할 수 있다. y 를 소거하면 $x^2+t^2(x-1)^2=1$, 즉

$$(1+t^2)x^2-2t^2x+t^2-1=0\ \ ,\ (x-1)\{(1+t^2)x-(t^2-1)\}=0$$

이다. 따라서 (x, y) 는 $(1, 0)$ 또는 $\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}, \frac{-2t}{t^2+1}\right)$ 이다.

즉, $x(t)=\frac{t^2-1}{t^2+1}$, $y(t)=\frac{-2t}{t^2+1}$ 로 두면 된다.

논제 I -4

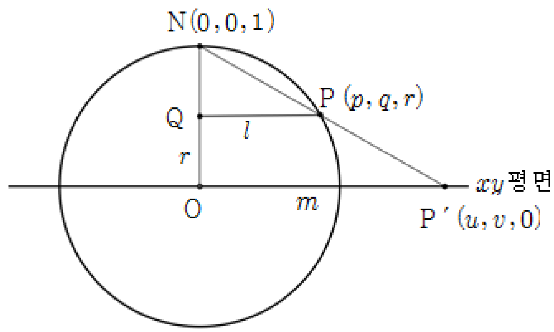
단위구면 $x^2+y^2+z^2=1$ 과 점 $(u, v, 0)$ 을 지나는 직선 $(ut, vt, -t+1)$ 의 교점을 구하자. $x(t)=ut$, $y(t)=vt$, $z(t)=-t+1$ 을 식에 대입하면 $(u^2+v^2+1)t^2-2t+1=1$, $\therefore\ t=0$ 또는 $t=\frac{2}{u^2+v^2+1}$ 이다. 따라서 단위구면 $x^2+y^2+z^2=1$ 과 점 $(u, v, 0)$ 을 지나는 직선

$(ut,\ vt,\ -t+1)$ 의 교점 $(p,\ q,\ r)$ 은

$$p=ut=\frac{2u}{u^2+v^2+1}\ ,\ q=vt=\frac{2v}{u^2+v^2+1}\ ,\ r=-t+1=\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}$$

이다.

다른 풀이



위 그림과 같이 xy평면에 수직이며 두 점 N , P 를 지나는 평면으로 잘라 $\overline{\mathrm{OQ}}=r$, $\overline{\mathrm{QP}}=l$, $\overline{\mathrm{OP'}}=m$ 이라 하면 $\overline{\mathrm{QN}}=1-r$ 이다. 그리고 피타고라스 정리에 의해

$$l^2=p^2+q^2\ ,\quad m^2=u^2+v^2$$

$\triangle\mathrm{NQP}$ 와 $\triangle\mathrm{NOP'}$는 닮은꼴이므로

$$1-r : l=1 : m \qquad \therefore\ l=(1-r)m$$

이다. 즉, $(u,v)=\left(\dfrac{p}{1-r}\ ,\ \dfrac{q}{1-r}\right)$이다. 그런데 $r^2+l^2=1$ 이므로

$$r^2+(1-r)^2m^2=1 \qquad \therefore\ (r-1)\{r(m^2+1)-(m^2-1)\}=0$$

따라서

$$r=\frac{m^2-1}{m^2+1} \qquad \therefore\ 1-r=\frac{2}{m^2+1}$$

이다. 그리고 $(p\ ,\ q\ ,\ r)=((1-r)u\ ,\ (1-r)v\ ,\ r)$ 이고 $m^2=u^2+v^2$ 이므로

$$p=\frac{2u}{u^2+v^2+1}\ ,\quad q=\frac{2v}{u^2+v^2+1}\ ,\quad r=\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}$$

이다. 여기서 $0<r<1$ 이고 $p\ ,\ q$ 는 자연수이므로 $u=\dfrac{p}{1-r}$ 와 $v=\dfrac{q}{1-r}$ 는 유리수이다.

논제 Ⅱ-1

$r=\dfrac{m}{n}$, $s=\dfrac{p}{q}$ 라 하자. 여기서 m , p 는 정수, n , q 는 자연수, $\gcd(m,\ n)=1$, $\gcd(p,\ q)=1$ 이다.

$$
\begin{aligned}
a^r a^s &= a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{p}{q}} \\
&= \sqrt[n]{a^m}\sqrt[q]{a^p} && (\because \text{정의에 의해}) \\
&= \sqrt[nq]{a^{mq}}\sqrt[nq]{a^{np}} && (\because \text{제시문 [나]의 두 번째 성질}) \\
&= \sqrt[nq]{a^{mq}a^{np}} && (\because \text{제시문 [나]의 세 번째 성질}) \\
&= \sqrt[nq]{a^{mq+np}} && (\because \text{제시문 [가]의 첫 번째 성질}) \\
&= a^{\frac{mq+np}{nq}} && (\because \text{정의에 의해}) \\
&= a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{r+s}
\end{aligned}
$$

논제 Ⅱ-2

함수 ϕ 가 단조증가임을 수학적 귀납법으로 보이자.

① $\dfrac{a^1-1}{1} < \dfrac{a^2-1}{2} \iff a^2-2a+1>0 \iff (a-1)^2>0$. $a>1$ 이므로 $\dfrac{a^1-1}{1} < \dfrac{a^2-1}{2}$ 는 참이다. $\therefore \phi(1)<\phi(2)$

② 자연수 k 에 대해 $\phi(k)<\phi(k+1)$ 일 때 $\phi(k+1)<\phi(k+2)$ 가 성립함을 보이자.

$$\phi(k)<\phi(k+1) \iff \frac{a^k-1}{k} < \frac{a^{k+1}-1}{k+1} \iff ka^{k+1}-(k+1)a^k+1>0$$

$$\iff ka^k(a-1) > (a^k-1) \cdots ㉠$$

이므로 $ka^k(a-1)>(a^k-1)$ 이면 $(k+1)a^{k+1}(a-1)>(a^{k+1}-1)$ 임을 보이면 된다. ㉠ 의 양변에 $a(a>1)$ 를 곱한다.

$$ka^{k+1}(a-1)>(a^{k+1}-a)$$

다시 양변에 $a^{k+1}(a-1)$ 을 더한다.

$$ka^{k+1}(a-1)+a^{k+1}(a-1)>(a^{k+1}-a)+a^{k+1}(a-1)$$

$$(k+1)a^{k+1}(a-1)>a(a^{k+1}-1)>a^{k+1}-1$$

이다. 따라서 $\phi(k)<\phi(k+1) \Rightarrow \phi(k+1)<\phi(k+2)$ 이다.

①, ②에서 수학적 귀납법에 의해 이 명제가 증명되었다.

$0<r<1$ 인 임의의 유리수 r 은 두 자연수 m , $n(n<m)$으로 $r=\dfrac{n}{m}$ 으로 표현가능하다.

$\dfrac{1}{m}>0$ 이므로 제시문 [다]에서 $a^{\frac{1}{m}}>1$ 이다. 위의 사실을 이용하면

$$\frac{\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n-1}{n} < \frac{\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^m-1}{m}, \quad a^{\frac{n}{m}}-1<\frac{n}{m}\left(a^{\frac{n}{m}}-1\right)$$

이 성립하고 따라서 $a^r-1<r(a-1)$ 이다.

수학적 귀납법의 다른 풀이

i) $\phi(2)-\phi(1)=\dfrac{(a-1)^2}{2}>0$ 이므로 $n=1$ 일 때 성립한다.

(ⅱ) $k \geq 2$인 자연수 k에 대해 $\phi(k) > \phi(k-1)$이라 하자. 즉,
$\dfrac{a^k-1}{k} - \dfrac{a^{k-1}-1}{k-1} > 0$라 하면 $\dfrac{(k-1)(a^k-1)-k(a^{k-1}-1)}{k(k-1)} > 0$이다. 분모는 양수이므로 분자가 양수가 되어야한다.

$$\therefore ka^k - ka^{k-1} - a^k > -1$$

이다. 이 때,

$$\phi(k+1) - \phi(k) = \frac{a^{k+1}-1}{k+1} - \frac{a^{k-1}-1}{k} = \frac{ka^{k+1} - ka^k - a^k + 1}{k(k+1)}$$

그런데

$$ka^{k+1} - ka^k = a(ka^k - ka^{k-1}) > a(a^k-1) > a^k - 1$$

이므로

$$\phi(k+1) - \phi(k) > 0 \quad \therefore \phi(k+1) > \phi(k)$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\phi(n) = \dfrac{a^n-1}{n}$ 은 모든 자연수에 대해 단조증가한다.

논제Ⅱ-3

r $(-1 < r < 1)$이 유리수 일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = r$이면 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = a^r$ 임을 보이면 모든 유리수에서 성립한다. [논제2-2]에서 $0 < r < 1$일 때 $a^r - 1 < r(a-1)$ 임을 보였다.
이제 $-1 < r < 0$ 의 경우를 살펴보자. $0 < -r < 1$ 이므로 [논제2-2]에 의해

$$a^{-r} - 1 < -r(a-1)$$

이다. 이 식의 양변에 a^r 을 곱한다. $0 < a^r < 1$ 이므로

$$1 - a^r < -ra^r(a-1) < -r(a-1)$$

이다. 즉,

$$r(a-1) < a^r - 1$$

이다. 그러므로 $-1 < r < 1$ $(r \neq 0)$에 대해 $|a^r - 1| < |r|(a-1)$ 이다.
수열 $\{r_n\}$ 이 r 로 수렴하면, 적당히 큰 n 에 대하여 $|r_n - r| < 1$ 이므로

$$\left|a^{r_n} - a^r\right| = \left|a^r\left(a^{r_n - r} - 1\right)\right| < |a^r|\,|r_n - r|(a-1)$$

이다. $\lim\limits_{n\to\infty} r_r = r$ 이면 $\lim\limits_{n\to\infty} |r_n - r| = 0$ 이므로 $\lim\limits_{n\to\infty} |a^r|\,|r_n - r|(a-1) = 0$ 이다.

그러므로 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = a^r$ 이다.

논제Ⅱ-4

무리수 x 에 대해, x 로 수렴하는 유리수의 수열은 하나만 존재하지 않으므로, 각각의 유리수 수열에 대해 일정한 값으로 수렴하는지 확실하지 않다. 하지만 [논제2-3]에서 보였듯이 임의의 유리수의 수열에 대해서 항상 1 개의 값으로 수렴하므로, 이 정의는 타당하다고 할 수 있다.

22 서강대학교 수시(컴퓨터공학계/화공생명공학계/기계공학계)

제시문 〈문제 1: 50%, 글자 제한 없음〉 다음 글을 읽고, 물음에 답하라.*

(가)
공집합이 아닌 집합 D에서 실수 전체의 집합 R로 가는 함수 $f: D \to \mathrm{R}$을 생각해보자. 만약 모든 $x \in D$에 대하여 $f(x) \le f(x_{\max})$인 $x_{\max} \in D$가 존재하면 함수 f는 $x_{\max}$에서 최댓값 $f(x_{\max})$를 갖는다고 말하고, 모든 $x \in D$에 대하여 $f(x) \ge f(x_{\min})$인 $x_{\min} \in D$가 존재하면 함수 f는 $x_{\min}$에서 최솟값 $f(x_{\min})$을 갖는다고 말한다. 다시 말하면, f의 최댓값(또는 최솟값)은 f가 가질 수 있는 가장 큰 (또는 작은) 값이다. 정의에 의해서 모든 $x \in D$에 대하여 $f(x) \le M$가 성립하더라도 $f(x_{\max}) = M$인 $x_{\max} \in D$가 존재하지 않으면 실수 M은 f의 최댓값이 될 수 없다. 예를 들어, 실수 전체의 집합 R에서 정의된 함수 $f(x) = 1 - x^2$을 생각하면 모든 $x \in \mathrm{R}$에 대하여 $f(x) \le 2$이지만 $f(x_{\max}) = 2$인 $x_{\max} \in \mathrm{R}$가 존재하지 않으므로 2는 f의 최댓값이 될 수 없다. 사실 모든 $x \in \mathrm{R}$에 대하여 $f(x) \le 1$이고 $f(0) = 1$이므로 f는 0에서 최댓값 1을 갖는다.

(나)
함수 $f: D \to \mathrm{R}$의 최댓값 또는 최솟값을 구하는 문제는 가장 고전적이면서도 중요한 수학문제 중의 하나이다. D가 실수 전체의 집합 R 또는 그 곱집합인 R^n의 부분집합이면 f의 최댓값 또는 최솟값을 구하는 간단하면서도 매우 유용한 방법은 절대부등식을 이용하는 것이다. 임의의 실수 $a_1, \cdots, a_n$에 대하여 성립하는 부등식

$$a_1^2 + \cdots + a_n^2 \ge 0$$

은 가장 간단한 절대부등식이며 등호는 $a_1 = \cdots = a_n$일 때만 성립한다. 특히 유용한 절대부등식은 음이 아닌 임의의 실수 $a_1, \cdots, a_n$에 대한 산술 · 기하평균 부등식

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

이며 등호는 $a_1 = \cdots = a_n$일 때만 성립한다.

(다)
임의의 실수 $a_1, b_1, \cdots, a_n, b_n$에 대하여 코시-슈바르츠(Cauchy-Schwarz) 부등식

$$(a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n)^2 \le (a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2)$$

이 성립하며 등식은 모든 $k = 1, \cdots, n$에 대하여 $\alpha a_k = \beta b_k$인 상수 α, β(동시에 0은 아님)가 존재할 때만 가능하다. 코시-슈바르츠 부등식을 최댓값 · 최솟값 문제에 응용할 수 있다. 예를 들어, $2x^2 + y^2 = 1$을 만족하는 임의의 실수 x, y에 대하여

* 서강대학교 입학처

$$(x+2y)^2=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\sqrt{2}x)+2y\right\}^2\le\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+2^2\right\}\{(\sqrt{2}x)^2+y^2\}=\frac{9}{2}$$

이고 등호는

$$\frac{\sqrt{2}x}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{y}{2}\text{, 즉 } 4x=y$$

일 때 성립한다. 또한 $2x^2+y^2=1$ 이고 $4x=y$ 인 실수 x 와 y 의 쌍이 아래와 같이 두 개 존재한다.

$$(x,y)=\left(\pm\frac{1}{3\sqrt{2}}\,,\ \pm\frac{4}{3\sqrt{2}}\right)$$

따라서 R^2 의 부분집합 $D=\{(x,y)\in\mathrm{R}^2|2x^2+y^2=1\}$ 에서 정의된 함수 $f(x,y)=x+2y$ 의 최솟값은 $-\frac{3}{\sqrt{2}}$ 이고 최댓값은 $\frac{3}{\sqrt{2}}$ 이다.

논제 1-1

닫힌구간 $[a,\ b]$ 에서 정의된 연속함수가 항상 최댓값과 최솟값을 갖는다는 것은 미적분학의 가장 기본적인 사실 중에 하나이다. 그러나 열린구간 $(a,\ b)$ 에서 정의된 연속함수에 대해서는 그렇지 않을 수도 있음을 제시문 [가]에 근거하여 설명하여라.

논제 1-2

m 과 n 을 임의의 자연수라고 하자. 산술·기하평균 부등식을 응용하여 $D=\{(x,y)\in\mathrm{R}^2|x^m+y^n=m+n\,,x>0,y>0\}$ 에서 정의된 함수 $f(x,y)=xy$ 의 최댓값을 구하여라.

논제 1-3

$b_1^2+\cdots+b_n^2>0$ 일 때, 코시-슈바르츠 부등식

$$(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)^2\le(a_1^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+\cdots+b_n^2)$$

이 성립함을 증명하고 등호는 모든 $k=1,\cdots,n$ 에 대하여 $a_k=\beta b_k$ 인 상수 β 가 존재할 때만 가능하다는 것을 보여라.

논제 1-4

$a^2+8b^2=2$ 인 두 양수 a,b 에 대하여 함수 $f(x,y)=\left(x+\frac{a}{y}\right)\left(y+\frac{b}{x}\right)$ $(x,y>0)$ 의 최댓값을 $m(a,b)$ 라고 할 때, $m(a,b)$ 의 최댓값을 구하여라.

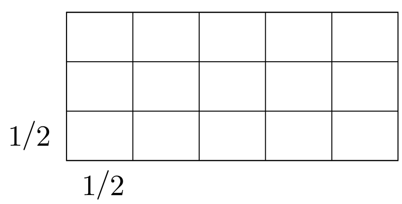
제시문 **〈문제 2: 50%, 글자 제한 없음〉 다음 글을 읽고, 물음에 답하라.**

(가)

토지의 크기 측정을 위해 기하(geometry)라는 단어는 그리스어에서 생겨났듯이 고대 그리스인들은 무리수 개념-예를 들어, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ 등을 알고 있었다. 물론 이런 무리수들을 숫자로 인식하지는 않았지만, 오늘날과 같이 개념인 넓이가 2 가 되는 정사각형의 한 변의 길이를 $\sqrt{2}$ 로 알고 있었다.

(나)

고대 그리스인들은 공간에서 부피의 단위(단위 부피)를 모든 모서리의 길이가 1 인 정육면체로 정의하고, 각 모서리의 길이가 자연수인 직육면체의 부피를 단위 부피로의 **분할**을 통해 **너비×높이×깊이**로 이해하였다. 이는 평면에서 자연수 길이를 갖는 직사각형의 넓이의 개념을 자연스럽게 확장한 것이다. 그렇다면 유리수 길이를 가지는 직육면체의 부피는 어떻게 계산될까? 먼저 평면에서 두 변의 길이가 각각 $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$ 인 직사각형을 생각하자. 차례로 변의 길이가 $\frac{1}{2}$ 인 정사각형을【그림 1】처럼 **이어붙임**을 하여 15 개 만든다. 변의 길이가 $\frac{1}{2}$ 인 정사각형을 길이 1 인 정사각형의 $\frac{1}{4}$ 을 차지하므로 그 넓이는 $\frac{1}{4}$ 이다. 이러한 개념을 이용하면 유리수 길이를 갖는 직사각형의 넓이는 **너비×높이**임을 알 수 있다.

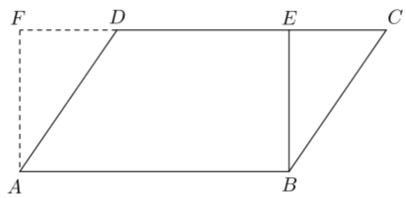


【그림 1】

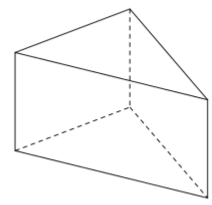
이 방법을 공간의 경우로 확장할 수 있으며, 모서리의 길이가 유리수인 직육면체의 경우도 분할 또는 이어붙임을 통해 동일한 부피 공식인 **너비×높이×깊이**를 얻는다. 일반적으로 직육면체의 모서리의 길이가 무리수라고 하더라도 유리수의 극한을 이용하여 동일한 부피 공식을 얻는다.

(다)

【그림 2】에서 평행사변형 ABCD 에서 삼각형 BCE 를 잘라서 ADF 에 붙인다. 이러한 분할과 이어붙임을 통해 평행사변형 ABCD 와 직사각형 ABEF 의 넓이가 같음을 알 수 있다. 따라서 주어진 평행사변형의 넓이는 **너비×높이**가 된다. 이를 이용하면 삼각형의 면적은 $\frac{1}{2}$× **너비×높이**가 되고 공간에서 직각삼각기둥의 부피는 **삼각형의 넓이×높이**로 계산할 수 있다. (【그림 3】참고) 이 공식은 직각이 아닌 삼각기둥의 부피에도 동일하게 성립한다.

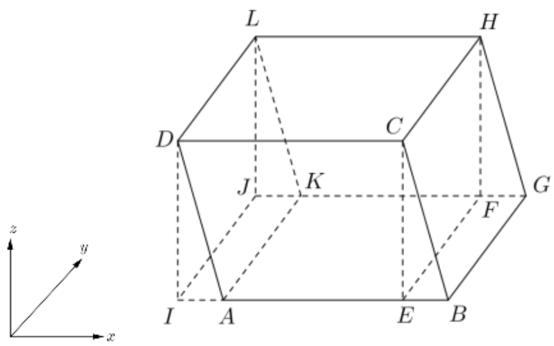


【그림 2】

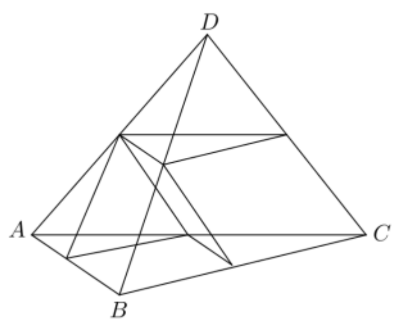


【그림 3】

공간에서【그림 4】와 같이 x 축으로 기울어진 평행육면체 ABGK－DCHL 을 생각하자. 다면체 EBGF－HC 를 잘라 IAKJ－LD 에 이어붙임을 하여 직육면체 IEFJ－DCHL 을 얻는다. 이러한 방법으로 일반적인 평행육면체인 경우도 직육면체로 변형하여 **밑면(평행사변형)의 넓이×높이**로 부피를 계산할 수 있다.



【그림 4】



【그림 745】

(라)

고대 그리스인들은 유한 번의 분할 또는 이어붙임을 하여 사면체를 직육면체로 변형하고자 하였다. 이는 불가능하다는 것이 20세기 초가 되어서야 밝혀졌다. 그렇다면 사면체의 부피를 어떻게 구할 수 있을까? 사면체 ABCD 의 여섯 개의 모서리를 각각 이등분하여【그림 5】와 같이 연결하면, 작은 사면체 두 개와 삼각기둥 두 개로 분할된다. 이와 같은 분할을 반복하여 만들어진 삼각기둥의 부피를 모두 합하면

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots\right)\times\text{밑면(삼각형 ABC)의 넓이}\times\text{높이}$$

$$=\frac{1}{3}\times\text{밑면(삼각형 ABC)의 넓이}\times\text{높이} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

이다. 사면체에서 삼각기둥을 계속해서 제거하면 남은 부분의 부피는 0 으로 수렴하므로 결국 사면체의 부피는

$$\frac{1}{3}\times\text{밑면(삼각형 ABC)의 넓이}\times\text{높이}$$

이다.

논제 2-1

제시문 [나]를 참고하여 변의 길이가 임의의 양의 유리수인 직사각형의 넓이를 구하는 방법을 설명하고 직육면체의 경우로 확장하여라.

논제 2-2

제시문 [라]의 사면체 분할에서 얻어지는 두 사면체의 부피가 같고 두 삼각기둥 역시 부피가 같음을 보여라.

논제 2-3

제시문 [라]에서 (1)이 성립함을 자세히 설명하여라.

논제 2-4

정팔면체의 한 삼각형을 밑면이라고 하고 마주보이는 반대편 삼각형까지의 거리를 높이라고 할 때, 제시문을 이용하여 부피 공식을 유도하라.

논술유형분석

문항 수	수학2문항	시간	120분
연관 개념	연속함수의 최대·최소 정리, 코시-슈바르츠 부등식, 정다면체		

제시문분석

문제 1의 제시문 [가], [나], [다]

연속함수의 최대·최소 정리와 산술기하평균 부등식, 코시-슈바르츠 부등식을 설명하고 있다.

문제 2의 제시문 [가], [나], [다]

분할과 이어붙임을 이용하여 여러 도형의 넓이와 부피를 설명하고 있다.

논제분석

논제 1-1

열린구간에서는 연속함수의 최대·최소 정리가 성립하지 않음을 파악하여야 한다.

논제 1-2

임의의 자연수에 대해 성립하므로 $n=1$, $m=1$ 을 대입할 수 있어야 한다.

논제 1-3

코시-슈바르츠 부등식을 증명하기 위해 이차방정식과 이차부등식을 이용하여야 한다.

논제 1-4

코시-슈바르츠 부등식을 두 번 사용하고 등호 성립조건을 정확히 파악하여야 한다.

논제 2-1

직사각형을 정사각형으로 분할할 수 있는 개수를 구하기 위해 양의 유리수를 통분하여야 한다.

논제 2-2

도형의 닮음을 이용하여 정사면체를, 도형의 분할을 이용하여 삼각기둥 문제를 접근하여야 한다.

논제 2-3

닮음을 이용하여 부피비를 구하고 두 배씩 늘어남을 이용하여 일반항을 찾을 수 있다.

논제 2-4

논제2-3과 제시문을 이용하여 정팔면체를 분할하여 규칙을 찾을 수 있다.

배경지식쌓기

1. 정다면체의 부피

모서리의 길이가 a 인 정다면체의 부피는 아래와 같다.

가. 정사면체 : $\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$

나. 정육면체 : a^3

다. 정팔면체 : $\dfrac{\sqrt{2}}{3}a^3$

라. 정십이면체 : $\dfrac{1}{4}(15+7\sqrt{3})a^3$

마. 정이십면체 $\dfrac{5}{12}(3+\sqrt{5})a^3$

풀어보기

문제 1 음이 아닌 실수 p, q, r 에 대하여 $\sqrt{p}+\sqrt{2q}+\sqrt{3r}=3$ 일 때, $\dfrac{1}{p+2q+3r}$ 의 최댓값과 그 때의 p, q, r 의 값을 구하여라.

문제 2 p, q 가 양수일 때. 다음 부등식이 성립함을 보이고, 또 등호가 성립할 때, p, q 의 값을 구하여라.

$$p+q+\frac{1}{\sqrt{pq}} \geq 2\sqrt{2}$$

문제 3 한 모서리의 길이가 a 인 정팔면체의 평행한 두 면사이의 거리를 구하시오.

읽기자료

일반적인 산술-기하 평균 부등식의 증명

산술-기하 평균 부등식을 수학적 귀납법을 이용한 대수적 방법과 지수함수를 이용한 해석학적 방법으로 증명하여 보자.

임의의 양수 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 에 대하여 $AM = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$, $GM = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$ 이라 할 때 $AM \geq GM$ 이고 등호는 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 일 때 성립한다.

(증명1) $x_1 x_2 \cdots x_n = a^n$ 두고 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq an$ 을 증명하자.

$y_i = \dfrac{x_i}{a}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 라 하면 위 부등식은 다음과 같다.

$$y_1 y_2 \cdots\cdots y_n = 1 \ , y_i > 0 \Rightarrow y_1 + y_2 + \cdots + y_n \geq n$$

이것을 수학적 귀납법으로 증명하자.

$n = 1$ 인 경우는 명백하다.

$n = k$ 일 때 성립한다고 가정하고 $n = k+1$ 인 경우를 증명하자.

가정인 $y_1 y_2 \cdots y_{k+1} = 1$ 과 $y_i > 0$ 에 의해서 문자의 순서를 적당히 바꾸면 $y_1 \geq 1$, $y_2 \leq 1$라 가정해도 일반성을 잃지 않는다. 그러면$(y_1 - 1)(y_2 - 1) \leq 0$, 즉 $y_1 y_2 + 1 \leq y_1 + y_2$ 이고, 따라서 $(y_1 + y_2) + y_3 + \cdots + y_{k+1} \geq 1 + y_1 y_2 + y_3 + \cdots + y_{k+1}$ 이다. 한편 $(y_1 y_2) y_3 \cdots y_{k+1} = 1$ 이므로 귀납법 가정에 의해서 $y_1 y_2 + y_3 + \cdots y_{k+1} \geq k$ 이고 따라서 위 두 부등식으로 $y_1 + y_2 + \cdots + y_{k+1} \geq k+1$ 이고 $n = k+1$ 일 때, 위 부등식은 성립한다. 따라서 모든 자연수 n 에 대하여 $AM \geq GM$ 이다.

(증명 2) $e = \lim\limits_{n \to \infty} (1 + \dfrac{1}{n})^n$ 에 대하여 $e^x \geq x + 1$ 은 일반적으로 성립한다. 이 부등식의 증명은 고등학교에 배우는 미분을 이용하여 간단히 증명된다.

$f(x) = e^x - x - 1$ 라 하면 $f'(x) = e^x - 1 = 0$ 이어서 $x = 0$ 에서 극소가 되고 $x = 0$ 일 때 최소가 된다. 그러므로 $f(x) \geq f(0)$ 가 되고 $f(x) \geq 0$ 이다. 그러므로 $e^x \geq x + 1$ 이고 등호는 $x = 0$ 일 때 성립된다.

이제 $A = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$ 이라 하고, k 에 대하여 $a_k = \dfrac{x_k}{A} - 1$ 라 하자.

그러면 위 부등식에 대하여 아래 부등식들이 성립한다.

$$e^{a_1} \geq a_1 + 1$$
$$e^{a_2} \geq a_2 + 1$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$e^{a_n} \geq a_n + 1$$

위 n개의 부등식을 변변 곱하면 $e^{a_1+a_2+\cdots+a_n} \geq (a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1)$ 이다.

한편 $a_1+a_2+\cdots+a_n = \frac{x_1}{A}+\frac{x_2}{A}+\cdots+\frac{x_n}{A}-n$ 에서

$$\frac{1}{A}(x_1+x_2+\cdots+x_n)-n = \frac{1}{A}\times nA-n = 0$$

이다.

그리고 $a_1+1=\frac{x_1}{A}$, $a_2+1=\frac{x_2}{A}$, ……, $a_n+1=\frac{x_n}{A}$ 을 위 부등식에 대입하면

$$e^0 \geq \frac{x_1}{A}\cdot\frac{x_2}{A}\cdots\frac{x_n}{A}$$

이다.

그러므로 $A^n \geq x_1x_2\cdots x_n$ 에서 $A \leq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$ 이고 등호는 $a_k=0$ 일 때 즉 $x_1 = x_2 = \cdots\cdots = x_n$ 일 때 성립이 됨을 알 수 있다.

예시답안

풀어보기

문제 1

코시-슈바르츠 부등식에서 $\frac{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}{(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2} \geq \frac{1}{x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2}$ 이다.

$a_1=a_2=a_3=1$, $x_1=\sqrt{p}$, $x_2=\sqrt{2q}$, $x_3=\sqrt{3r}$ 이라고 하면

$\frac{3}{(\sqrt{p}+\sqrt{2q}+\sqrt{3r})^2} \geq \frac{1}{p+2q+3r}$ 에서 최댓값은 $\frac{1}{3}$ 이다.

이때, $\sqrt{p}=\sqrt{2q}=\sqrt{3r}$, $\sqrt{p}+\sqrt{2q}+\sqrt{3r}=3$ 에서 $p=1$, $q=\frac{1}{2}$, $r=\frac{1}{3}$ 이다.

문제 2

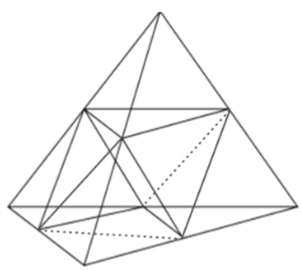
$p+q \geq 2\sqrt{pq}$ …… ① 이므로 $p+q+\dfrac{1}{\sqrt{pq}} \geq 2\sqrt{pq}+\dfrac{1}{\sqrt{pq}}$ …… ②

그리고 (산술평균)$\geq$ (기하평균)에서 $2\sqrt{pq}+\dfrac{1}{\sqrt{pq}} \geq 2\sqrt{2}$ …… ③

②, ③ 에서 $p+q+\dfrac{1}{\sqrt{pq}} \geq 2\sqrt{2}$ 이다. ① 에서 등호는 $p=q$, ③ 에서 등호는 $pq=\dfrac{1}{2}$ 일 때 성립한다. $\therefore$ $p=q=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때 등호가 성립한다.

문제 3

한 모서리의 길이가 $2a$ 인 정사면체를 그림과 같이 각 모서리의 중점을 이어서 분할하면 정사면체 4 개와 정팔면체 1 개가 만들어 진다.



모서리가 a 인 정팔면체의 평행한 두 면 사이의 거리는 모서리가 a 인 정사면체의 높이와 같으므로 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$ 이다.

논제 I -1

f 의 최댓값(또는 최솟값)은 f 가 가질 수 있는 가장 큰 (또는 작은) 값이다. 정의에 의해서 모든 $x \in D$ 에 대하여 $f(x) \leq M$ 가 성립하더라도 $f(x_{\max}) = M$ 인 $x_{\max} \in D$ 가 존재하지 않으면 실수 M 은 f 의 최댓값이 될 수 없다. 예를 들어, 열린 구간 $(0, 1)$ 에서 정의된 함수 $f(x)=1-x^2$ 을 생각하면 모든 $x \in (0, 1)$ 에 대하여 $f(x) \leq 1$ 이지만 $f(x_{\max})=1$ 인 $x_{\max}=0$ 이 열린 구간 $(0, 1)$ 에서 존재하지 않으므로 1 은 f 의 최댓값이 될 수 없다. 또한 모든 $x \in (0, 1)$ 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이지만 $f(x_{\min})=0$ 인 $x_{\min}=1$이 열린 구간 $(0, 1)$ 에서 존재하지 않으므로 0 은 f 의 최솟값이 될 수 없다. 사실 모든 $x \in (0, 1)$ 에 대하여 $0 < f(x) < 1$ 이므로 f 는 열린 구간 $(0, 1)$ 에서 최댓값과 최솟값을 가지지 않는다.

논제 Ⅰ-2

$m=n=1$ 일 때, $x+y=2$ 이고 $x,\ y>0$ 이므로 산술 · 기하평균 부등식에 의해

$xy \le \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2=1$ 이고 등호는 $x=y=1$ 일 때, 성립한다. 따라서 $f(x,y)=xy$ 의 최댓값은 1 이다.

논제 Ⅰ-3

$b_1^2+\ \cdots\ +b_n^2>0$ 이므로 $b_k\neq 0$ 인 자연수 $k\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ n-1,\ n\}$ 가 존재하고 모든 실수 x 에 대하여 이차부등식

$$(b_1x-a_1)^2+(b_2x-a_2)^2+\cdots+(b_{n-1}x-a_{n-1})^2+(b_nx-a_n)^2\ \ge 0$$

이 성립하고 정리하면

$$(b_1^2+\cdots+b_n^2)x^2-2(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)x+(a_1^2+\cdots+a_n^2)\ge 0$$

이다. 이차방정식 $(b_1^2+\cdots+b_n^2)x^2-2(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)x+(a_1^2+\cdots+a_n^2)=0$ 의 판별식

$$D/4=(a_1b_1+\ \cdots\ +a_nb_n)^2-(a_1^2+\ \cdots\ +a_n^2)(b_1^2+\ \cdots\ +b_n^2)\le 0$$

이므로 $(a_1b_1+\ \cdots\ +a_nb_n)^2\le(a_1^2+\ \cdots\ +a_n^2)(b_1^2+\ \cdots\ +b_n^2)$ 이다. 등호는

$$(b_1x-a_1)^2+(b_2x-a_2)^2+\cdots+(b_{n-1}x-a_{n-1})^2+(b_nx-a_n)^2=0$$

일 때, 성립하므로 모든 $k=1,\ \cdots,n$ 에 대하여 $a_k=\beta b_k$ 인 상수 β 가 존재할 때만 가능하다.

논제 Ⅰ-4

$f(x,y)=\left(x+\dfrac{a}{y}\right)\left(y+\dfrac{b}{x}\right)=a+b+xy+\dfrac{ab}{xy}\ge a+b+2\sqrt{ab}$ $(\because xy>0)$ 이고 등호는

$xy=\sqrt{ab}$ 일 때 성립한다. 그러므로 $m(a,\ b)=a+b+2\sqrt{ab}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ 이다.

$$(a^2+8b^2)((\sqrt{2})^2+1^2)\ge(\sqrt{2}\,a+2\sqrt{2}\,b)^2$$

$(a+2b)^2\le 3$ (등호는 $a=4b$ 일 때 성립한다.)

$$((\sqrt{a})^2+(\sqrt{2b})^2)\left(1^2+\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2\right)\ge(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$$

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\le\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$ (등호는 $a=4b$ 일 때 성립한다.)

따라서 $a=4b$. 즉, $a=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$, $b=\dfrac{1}{6}\sqrt{3}$ 일 때, $m(a,b)$ 의 최댓값은 $\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$ 이다.

다른 풀이

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=k$ 라 하자. 제 1사분면에서 $x^2+8y^2=2$ 의 그래프는 위로 볼록하고 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=k$ 의 그래프는 아래로 볼록하다. 따라서 두 그래프 $x^2+8y^2=2$ 와 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=k$ 일 접할 때, k 는 최댓값을 갖는다. 접점을 (a,b) 라 하면

접점에서 기울기가 같으므로

$$-\frac{1}{8}\times\frac{a}{b}=-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\ ,\ a\sqrt{a}=8b\sqrt{b}\ ,\ a=4b\ (\because a,b>0)\ \cdots\ ①$$

이고 점 (a,b) 을 지나므로 ① 식을 $a^2+8b^2=2$ 에 대입하면 $16b^2+8b^2=2$, $b=\frac{\sqrt{3}}{6}$

이고 $a=\frac{2}{3}\sqrt{3}$ 이다. 그러므로 $m(a,\ b)=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ 의 최댓값은

$$a+b+2\sqrt{ab}=\frac{2}{3}\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{6}+2\sqrt{\frac{2}{3}\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{6}}=\frac{5}{6}\sqrt{3}+\frac{2}{3}\sqrt{3}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$$

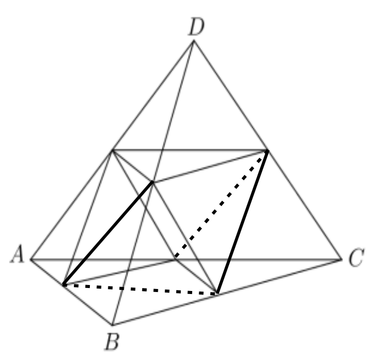
이다.

논제Ⅱ-1

양의 유리수 p,q 를 통분하여 두 변의 길이가 각각 $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$ 인 직사각형을 생각하자. 차례로 변의 길이가 $\frac{1}{a}$ 인 정사각형을 제시문의 【그림 1】처럼 **이어붙임**을 하여 bc 개 만든다. 변의 길이가 $\frac{1}{a}$ 인 정사각형을 길이 1 인 정사각형의 $\frac{1}{a^2}$ 을 차지하므로 그 넓이는 $\frac{bc}{a^2}$ 이다. 양의 유리수 p,q,r 를 통분하여 두 변의 길이가 각각 $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{d}{a}$ 인 직육면체를 생각하자. 차례로 변의 길이가 $\frac{1}{a}$ 인 정육면체를 가로, 세로, 높이로 **이어붙임**을 하여 bcd 개 만든다. 변의 길이가 $\frac{1}{a}$ 인 정육면체의 부피는 길이가 1 인 정육면체의 부피의 $\frac{1}{a^3}$ 을 차지하므로 그 부피는 $\frac{bcd}{a^3}$ 이다.

논제Ⅱ-2

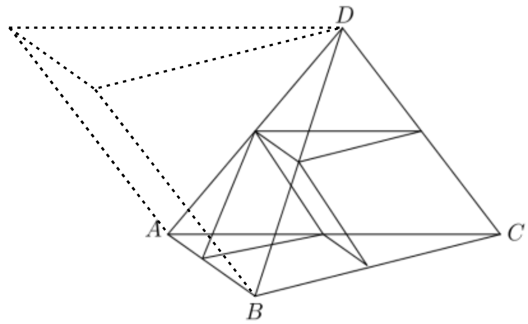
사면체 ABCD 의 분할에서 얻어지는 두 사면체는 서로 합동이고 각각 사면체 ABCD 와의 닮음비 1 : 2 이므로 두 정사면체의 부피는 원래 정사면체 부피의 $\frac{1}{8}$ 이다. 또한 두 삼각기둥을 [그림]과 같이 분할하자.



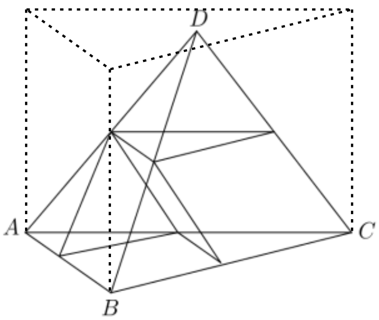
각각의 삼각기둥은 사면체 ABCD 와 닮음비가 1 : 2 인 정사면체 한 개와 사각뿔 한 개로 분할된다. 정사면체의 부피는 서로 합동이고 사각뿔 또한 서로 합동이므로 두 삼각기둥의 부피는 같다.

논제 Ⅱ-3

[그림1]은 면 ABC 를 선분 CD 와 평행하게 이동시켜 만든 삼각기둥이고 [그림2]는 면 ABC 를 평면 ABC 에 수직으로 이동시켜 만든 삼각기둥으로 [그림1]과 [그림2]의 삼각기둥의 부피는 같다.



[그림1]



[그림2]

1단계에서 [그림1]의 사면체 ABCD 의 오른쪽 아랫부분의 작은 삼각기둥은 [그림1]의 큰 삼각기둥과 닮음비가 1 : 2 이고 [그림1]과 [그림2]의 삼각기둥의 부피가 같으므로 작은 삼각기둥 한 개의 부피는 $\left(\frac{1}{2^3}\times\text{밑면(삼각형 ABC)의 넓이}\times\text{높이}\right)$ 이다. 그러므로 [그림1]의 작은 두 삼각기둥의 부피는

$$\left(\frac{1}{2^3}\times 2\times\text{밑면(삼각형 ABC)의 넓이}\times\text{높이}\right)$$

이다.
2단계에서 만들어 지는 작은 삼각기둥의 부피들의 합은 위와 같은 방법으로 하면

$$\left(\frac{1}{2^6}\times 2^2\times\text{밑면(삼각형 ABC)의 넓이}\times\text{높이}\right)$$

이다. n 단계에서 만들어 지는 작은 삼각기둥의 부피들의 합은

$$\left(\frac{1}{2^{3n}}\times 2^n\times\text{밑면(삼각형 ABC)의 넓이}\times\text{높이}\right)$$

이다.
이와 같은 과정을 무한히 반복하여 만들어 지는 모든 삼각기둥의 부피들의 합은

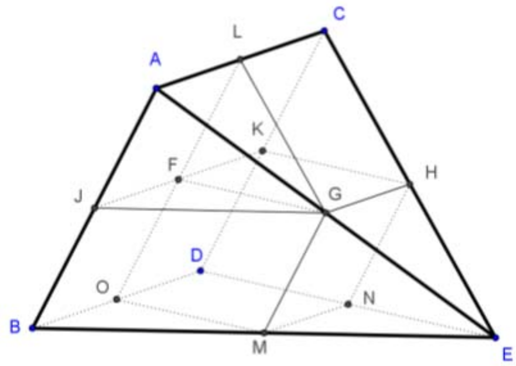
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}\times\text{밑면(삼각형 ABC)의 넓이}\times\text{높이}\right)$$

이고 사면체에서 삼각기둥을 계속해서 제거하면 남은 부분의 부피는 0 으로 수렴하므로 사면체의 부피는

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}\times\text{밑면(삼각형 ABC)의 넓이}\times\text{높이}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^{n}}\times\text{밑면(삼각형 ABC)의 넓이}\times\text{높이}$$
$$=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots\right)\times\text{밑면(삼각형 ABC)의 넓이}\times\text{높이}$$
$$=\frac{1}{3}\times\text{밑면(삼각형 ABC)의 넓이}\times\text{높이}$$

이다.

논제Ⅱ-4



그림의 정사각뿔 E－ABDC 는 정팔면체의 절반이다.
모서리 AB 에서 정삼각형 DBE 와 평행하게 자르고, 모서리 AE 의 중점에서 정삼각형 CDE 와 정사각형 ABDC 와 평행하게 자르자. 그러면 그림과 같이 삼각기둥 LGF－HKC, FJG－OBM , 사각기둥 FGHJK－OMND , 그리고 정사각뿔과 닮음인 정사각뿔 2 개가 생긴다.
정팔면체의 평행한 두 면 사이의 길이를 높이 h , 한 정삼각형의 넓이를 S 라 하자.
삼각기둥 LGF－HKC 의 부피는 $\frac{1}{4}S\times\frac{1}{2}h=\frac{1}{2^3}Sh$ 이고 삼각기둥 LGF－HKC 와 FJG－OBM 은 합동이므로, 삼각기둥 FJG－OBM 의 부피는

$$\frac{1}{4}S\times\frac{1}{2}h=\frac{1}{2^3}Sh$$

이다. 또한 사각기둥 FGHJK－OMND 의 부피는 $\frac{1}{2}S\times\frac{1}{2}h=\frac{1}{2^2}Sh$ 이므로 삼각기둥 2 개와 사각기둥 1 개의 부피는

$$\frac{1}{2^3}Sh+\frac{1}{2^3}Sh+\frac{1}{2^2}Sh=\frac{1}{2}Sh$$

이다. [논제2-3]과 같은 방법으로 이 시행을 계속해가면 정사각뿔과 닮음비가 $\frac{1}{2}$인 정사각뿔이 2 개씩 생기므로 정팔면체의 부피를 V라 하면

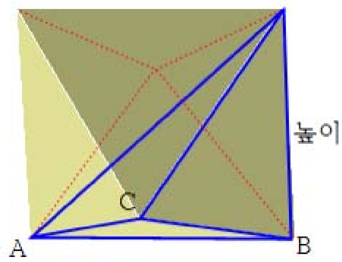
$$\frac{1}{2}V=\frac{1}{2}Sh(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}\cdots)=\frac{1}{2}Sh\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right)=\frac{2}{3}Sh$$

이다. 따라서 정팔면체의 부피 V는

$$V=\frac{4}{3}Sh=\frac{4}{3}\times 넓이\times 높이$$

이다.

다른 풀이



위의 그림과 같이 정팔면체를 자르면 사면체 4개가 생긴다. 제시문에서 사면체의 부피는

$$\frac{1}{3}\times 밑면(삼각형\ ABC의\ 넓이)\times 높이$$

이므로 구하는 정팔면체의 부피는

$$\frac{4}{3}\times 밑면(삼각형\ ABC의\ 넓이)\times 높이$$

이다.

23

서울시립대학교 수시

※ 풀이과정을 반드시 기술할 것, 기술의 형식과 내용은 평가의 주요한 요소임.

문제1*

매개변수 t로 나타내어진 두 함수 $x(t)$, $y(t)$가 다음 관계식을 만족시킬 때 아래 물음에 답하여라.

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\cos x}{y},\ \frac{dy}{dt} = -2x\cos x - \sin x \quad (\text{단, } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},\ y>0)$$

(a) $\dfrac{d(\ln y)}{dx}$를 x에 대한 식으로 나타내어라. (20점)

(b) $x=0$일 때 $y=3$이다. y를 x에 대한 식으로 나타내어라. (80점)

문제2

좌표평면에서 x축 위의 점 $\mathrm{P}(t,\,0)$과 y축 위의 점 $\mathrm{Q}(0,\,1)$에 대하여, 두 점 R_i $(i=1,2)$가 다음 두 조건을 모두 만족시킨다.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{QR}_i} \cdot \overrightarrow{\mathrm{QP}} = 0$

(2) 점 R_i와 x축 사이의 거리가 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{QR}_i}$의 크기보다 1만큼 작다.

(a) 두 벡터의 내적 $\overrightarrow{\mathrm{PR}_1} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PR}_2}$ 의 값을 t에 대한 식으로 나타내어라. (30점)

(b) 두 점 R_1, R_2 중 x좌표의 값이 작은 점을 R라 하고, R를 y축에 대하여 대칭이동시킨 점을 S라고 하자. 세 점 O(0,0), R, S를 지나는 원의 반지름의 길이를 t에 대한 식으로 나타낸 식을 $r(t)$라 하자. $r(t)$를 구하고 극한값 $\lim\limits_{t\to\infty} r(t)$를 구하여라. (70점)

* 서울시립대 입학처

문제3

각 자리의 숫자로 1, 2, 3, 4, 5 만이 사용된 2014자리 자연수 전체집합을 A라고 하자.

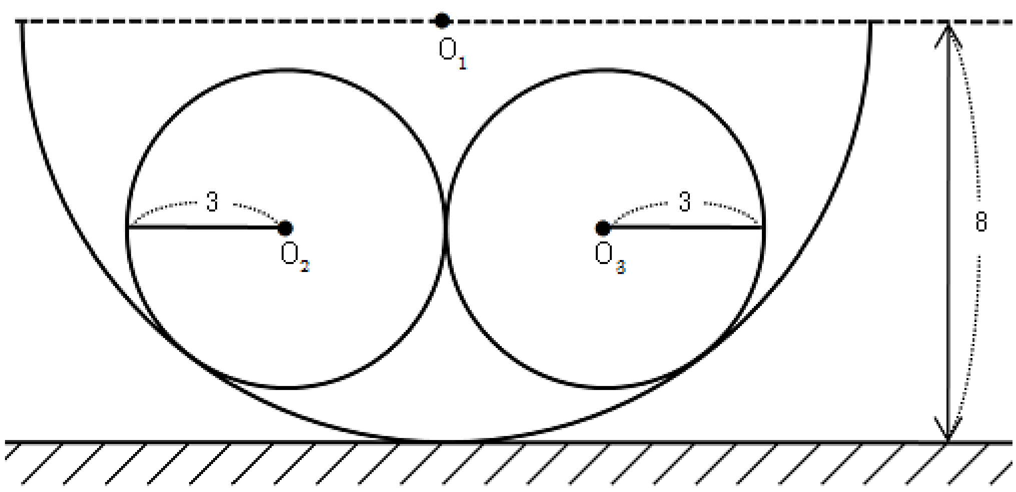
(a) 집합 A에 속하는 자연수 중에서 자리의 숫자에 쓰인 1의 개수가 홀수인 것의 개수를 m이라 할 때, $2m$의 일의 자리의 숫자를 구하여라. (50점)

(b) 집합 A에 속하는 자연수 중에서 자리의 숫자에 쓰인 1과 2의 개수가 각각 홀수인 것의 개수를 n이라 할 때, $4n$의 일의 자리의 숫자를 구하여라. (50점)

문제4

(a) 원 $x^2+(y-r)^2=r^2$과 직선 $y=h$ $(0<h<2r)$ 로 둘러싸인 도형 중 아랫부분 도형을 y축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피를 구하여라. (30점)

(b) 반지름의 길이가 8cm인 반구 모양의 용기에 반지름의 길이가 3cm인 쇠공 2개가 접하면서 놓여있다. O_1을 용기 반구의 중심, O_2와 O_3를 두 쇠공의 중심이라 하자. 세 중심을 포함하는 평면으로 잘랐을 때 생기는 용기 단면의 모양은 다음과 같다.



이 용기에 초당 $21\pi\text{cm}^3$의 일정한 비율로 물을 넣기 시작하여 채워진 물이 $105\pi\text{cm}^3$가 되는 순간의 수면 높이와 그 때 수면 높이의 속력을 구하여라. (70점) (단, 용기의 윗면과 $\overline{O_2O_3}$는 바닥면과 평행하며, 물을 채울 때 쇠공은 움직이지 않는다.)

논술유형분석

문항 수	수학 4문항	시간	180분
연관 개념	미분법, 적분법, 함수의 극한, 이차곡선, 벡터, 순열과 조합		

문제분석

고등학교 수준의 문제로서 이공계학생에게 필요한 계산능력 및 이해정도와 이를 활용하여 결론을 논리적 비약 없이 잘 서술할 수 있는 논리적 사고력, 분석 및 추론 능력, 문제해결능력을 평가하고자 하고 있다.*

문제1

(a) 매개변수로 나타내어진 두 함수에 대해 $\ln y$의 도함수를 구하도록 하고 있다.
(b) (a)에서 구해진 도함수를 부정적분하여 원시함수를 구하도록 하고 있다.

문제2

(a) 조건(1)에서 두 벡터가 수직임을 이용하여 $Q(0,1)$를 지나는 직선의 방정식을 구하고, 조건(2)에서 주어진 거리에 대한 내용이 두 점 R_i가 초점이 $Q(0,1)$이고, $y=-1$이 준선인 포물선 위의 점을 나타낸다는 것을 이용하여 연립하면 두 점 R_i의 좌표를 찾을 수 있다.
(b) (a)에서 구해진 포물선의 식을 이용하여 R, S의 좌표를 구할 수 있으며, 원점을 지나고 중심이 y축에 존재하는 원의 방정식이 $x^2+y^2+By=0$임을 활용하여 연립하면 $r(t)$를 구할 수 있다.

문제3

(a) 2014자리의 수에서 1의 개수가 k (k는 홀수)개 라면 나머지 2, 3, 4, 5의 개수는 $2014-k$개 이고, 이는 2014개의 자리에 1이 들어갈 k개의 자리를 선정하고 나머지 수를 남은 자리에 배열하는 경우의 수이므로 조합을 사용하여 나타낼 수 있다. 그리고 m은 위에서 구한 모든 경우의 수의 합이므로 이항정리를 활용하여 계산할 수 있다.
(b) 두 수의 개수가 각각 홀수인 것의 개수와 짝수인 것의 개수는 같다는 사실을 이용하여 경우의 수를 구하고, 이를 이항정리를 이용하여 계산하면 n의 값을 구할 수 있다.

문제4

(a) 회전체의 부피문제로 교과서에서 흔히 다루는 유형이라 큰 어려움은 없는 문항이다.
(b) (a)의 결과를 활용하여 주어진 용기에 채워지는 물의 양을 나타내는 식을 구할 수 있으며, 미분을 이용하여 수면의 높이와 그 때 수면 높이의 속력을 계산할 수 있다.

* 서울시립대 입학처

배경지식쌓기

1. 여러 가지 함수의 미분법

(1) 함수의 몫의 미분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ $(g(x) \neq 0)$가 미분가능할 때

$y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 이면 $y' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

$y = \dfrac{1}{g(x)}$ 이면 $y' = -\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

(2) $y = x^n$(n은 정수)의 도함수

n이 정수일 때, $y = x^n$이면

$$y' = nx^{n-1}$$

(3) 합성함수의 미분법

미분가능한 두 함수 $y = f(z)$, $z = g(x)$에 대하여 합성함수 $y = f(g(x))$의 도함수는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \text{ 또는 } y' = f'(g(x))g'(x)$$

(4) 매개변수로 나타내어진 함수의 미분법

두 함수 $x = f(t)$와 $y = g(t)$가 t에 대하여 미분가능하고 $f'(t) \neq 0$이면

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

(5) 음함수의 미분법

x의 함수 y가 음함수 $f(x, y) = 0$의 꼴로 주어졌을 때, y를 x의 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분하여 $\dfrac{dy}{dx}$를 구한다.

(6) $y = x^r$(r는 유리수)의 도함수

r가 유리수일 때, $y = x^r$이면

$$y' = rx^{r-1}$$

(7) 역함수의 미분법

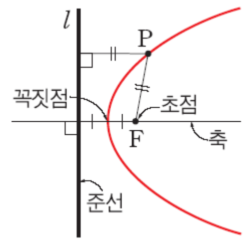
미분가능한 함수 $y = f(x)$의 역함수가 존재하고 미분가능할 때,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

2. 이차곡선(포물선)

(1) 포물선의 뜻

평면 위의 한 정점 F와 점 F를 지나지 않는 한 정직선 l이 주어질 때, 점 F와 직선 l에 이르는 거리가 같은 점 P들의 집합을 포물선이라고 한다.
이때 정점 F를 포물선의 초점, 정직선 l을 포물선의 준선, 포물선의 초점 F를 지나고 준선 l에 수직인 직선을 포물선의 축, 포물선과 축의 교점을 포물선의 꼭짓점이라고 한다.



(2) 포물선의 방정식

초점이 F$(p,\ 0)$이고, 준선이 $x=-p$인 포물선의 방정식은

$$y^2=4px \ (\text{단, } p\neq 0)$$

초점이 F$(0,\ p)$이고, 준선이 $y=-p$인 포물선의 방정식은

$$x^2=4py \ (\text{단, } p\neq 0)$$

3. 이항정리

(1) 이항정리

이항정리 : n이 자연수일 때, 다항식 $(a+b)^n$을 전개한 것

$$(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b^1+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nb^n=\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r$$

이항계수 : $(a+b)^n$의 전개식에서 각 항의 계수, 즉 ${}_n\mathrm{C}_0$, ${}_n\mathrm{C}_1$, $\cdots$, ${}_n\mathrm{C}_r$, $\cdots$, ${}_n\mathrm{C}_n$

(2) 이항정리의 활용

$(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n$에서

$x=1$일 때, ${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=2^n$

$x=-1$일 때, ${}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2-\cdots+(-1)^n{}_n\mathrm{C}_n=0$

4. 회전체의 부피

(1) 구간 $[a,\ b]$에서 곡선 $y=f(x)$를 x축을 회전축으로 하여 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피 V는

$$V=\pi\int_a^b\{f(x)\}^2dx$$

(2) 구간 $[c,\ d]$에서 곡선 $x=g(y)$를 y축을 회전축으로 하여 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피 V는

$$V=\pi\int_c^d\{g(y)\}^2dy$$

풀어보기

문제 1 좌표평면에서 포물선 $y^2=16x$ 위의 점 A에 대하여 점 B는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 A가 원점이면 점 B도 원점이다.
(나) 점 A가 원점이 아니면 점 B는 점 A, 원점 그리고 점 A에서의 접선이 y축과 만나는 점을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심이다.

점 A가 포물선 $y^2=16x$ 위를 움직일 때 점 B가 나타내는 곡선을 C라 하자. 점 $(3,\ 0)$을 지나는 직선이 곡선 C와 두 점 P, Q에서 만나고 $\overline{PQ}=20$일 때, 두 점 P, Q의 x좌표의 값의 합을 구하시오. (2013년 6월 평가원)

문제 2 곡선 $y=x^2$을 y축 둘레로 회전시켜 얻어지는 입체에 매초 $2\,cm^3$의 비율로 물을 넣을 때, 4 초 후의 수면의 상승속도는? (단, 좌표축의 단위 길이는 cm임) (2004년 경찰대)

① $\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\ (cm/\mathrm{sec})$ ② $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\ (cm/\mathrm{sec})$ ③ $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\ (cm/\mathrm{sec})$

④ $\sqrt{\pi}\ (cm/\mathrm{sec})$ ⑤ $2\sqrt{\pi}\ (cm/\mathrm{sec})$

문제 3 다음은 n이 2 이상의 자연수일 때 $\sum_{k=1}^{n} k({}_nC_k)^2$ 의 값을 구하는 과정이다.

[증 명]

두 다항식의 곱

$(a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1})(b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n)$에서

x^{n-1}의 계수는 $a_0b_{n-1}+a_1b_{n-2}+\cdots+a_{n-1}b_0 \cdots\cdots(*)$이다.

등식 $(1+x)^{2n-1}=(1+x)^{n-1}(1+x)^n$의 좌변에서 x^{n-1}의 계수는 $\boxed{(가)}$이고, $(*)$을 이용하여 우변에서 x^{n-1}의 계수를 구하면 $\sum_{k=1}^{n}({}_{n-1}C_{k-1}\times\boxed{(나)})$이다.

따라서 $\boxed{(가)}=\sum_{k=1}^{n}({}_{n-1}C_{k-1}\times\boxed{(나)})$ 이다.

한편 $1 \leqq k \leqq n$일 때, $k\times{}_nC_k=n\times{}_{n-1}C_{k-1}$이므로

$$\sum_{k=1}^{n} k({}_nC_k)^2=\sum_{k=1}^{n}(n\times{}_{n-1}C_{k-1}\times\boxed{(나)})$$

$$=n\times\sum_{k=1}^{n}({}_{n-1}C_{k-1}\times\boxed{(나)})$$

$$=\boxed{(다)}$$ 이다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? (2009년 6월 평가원)

	(가)	(나)	(다)
①	${}_{2n}C_n$	${}_nC_{n-k+1}$	$\frac{n}{2}\times{}_{2n}C_{n+1}$
②	${}_{2n-1}C_{n-1}$	${}_nC_{n-k+1}$	$\frac{n}{2}\times{}_{2n}C_n$
③	${}_{2n-1}C_{n-1}$	${}_nC_{n-k}$	$\frac{n}{2}\times{}_{2n}C_n$
④	${}_{2n}C_n$	${}_nC_{n-k+1}$	$n\times{}_{2n}C_{n+1}$
⑤	${}_{2n-1}C_{n-1}$	${}_nC_{n-k}$	$n\times{}_{2n}C_n$

예시답안

풀어보기

문제 1 정답: 14

$A(x_1,\ y_1)$이라 두면 접선 $y_1y=8(x+x_1)$, $x=0$이면 $y=\dfrac{8x_1}{y_1}$, y축과 교점 $D\left(0,\ \dfrac{8x_1}{y_1}\right)$

${y_1}^2=16x_1$이므로 $\dfrac{y_1}{2}=\dfrac{8x_1}{y_1}$, $\therefore\ D\left(0,\ \dfrac{y_1}{2}\right)$

따라서, $\triangle OAD$의 무게중심

$$B\left(\frac{0+0+x_1}{3},\ \frac{0+\frac{y_1}{2}+y_1}{3}\right)=\left(\frac{x_1}{3},\ \frac{y_1}{2}\right)$$

$\dfrac{x_1}{3}=x$, $\dfrac{y_1}{2}=y$라 두면 $x_1=3x$, $y_1=2y$, ${y_1}^2=16x_1$이므로 $4y^2=16\times 3x$

따라서, $y^2=12x$

$\overline{PQ}=\overline{PF}+\overline{QF}=(3+x_1)+(3+x_2)=20$, $x_1+x_2+6=20$, $\therefore\ x_1+x_2=14$

문제 2 정답: ①

바닥에서 수면까지의 깊이를 h 라 하면

회전체의 부피 V는

$$V=\int_0^h \pi x^2\,dy=\int_0^h \pi y\,dy$$

$$=\frac{1}{2}\pi h^2\ \cdots\ (1)$$

식 (1)을 시간 t 에 관하여 미분하면

$$\frac{dV}{dt}=2=\pi h\frac{dh}{dt}\ \cdots\ (2)$$

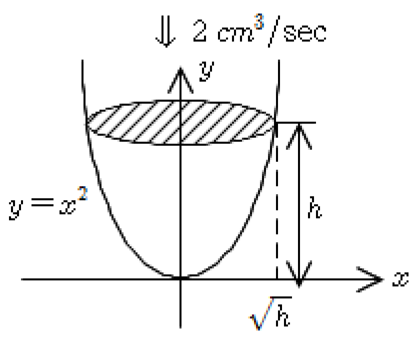
4 초 후에 용기에 있는 물의 양은 $8\,cm^3$ 이므로

깊이 h 는 식 (1)로부터

$$V_{t=4}=2\times 4=\frac{1}{2}\pi h^2 \qquad \therefore\ h=\frac{4}{\sqrt{\pi}}$$

따라서, 수면의 상승속도는

$$\therefore\ \frac{dh}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$



문제 3 정답: ③

$(1+x)^{2n-1}$에서 x^{n-1}의 계수는 $\boxed{{}_{2n-1}C_{n-1}}$ 이고 $(1+x)^{n-1}(1+x)^{n}$을 이용하여 x^{n-1}의 계수를 구하면 $\sum_{k=1}^{n}({}_{n-1}C_{k-1}\times\boxed{{}_{n}C_{n-k}})$ 이다.

따라서 ${}_{2n-1}C_{n-1}=\sum_{k=1}^{n}\left({}_{n-1}C_{k-1}\times{}_{n}C_{n-k}\right)$이다.

한편, $1\le k\le n$일 때, $k\times{}_{n}C_{k}=n\times{}_{n-1}C_{n-k}$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{n}k\left({}_{n}C_{k}\right)^{2}=\sum_{k=1}^{n}\left(n\times{}_{n-1}C_{k-1}\times{}_{n}C_{n-k}\right)=n\times\sum_{k=1}^{n}\left({}_{n-1}C_{k-1}\times{}_{n}C_{n-k}\right)=n\times{}_{2n-1}C_{n-1}$$

$$=\frac{n}{2}\times{}_{2n}C_{n}$$

cf) ${}_{2n-1}C_{n-1}=\dfrac{(2n-1)!}{(n-1)!n!}=\dfrac{(2n-1)!}{(n-1)!n!}\times\dfrac{2n}{n}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{(2n)!}{n!n!}=\dfrac{1}{2}\times{}_{2n}C_{n}$

※ 추가 설명

${}_{2n-1}C_{n-1}=\dfrac{1}{2}\times{}_{2n}C_{n}$은 다음과 같이 설명할 수 있다.

집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2n\}$에서 n개의 수를 뽑는 경우의 수는 ${}_{2n}C_{n}$이다.

이것을 다음과 같이 나누어 구할 수 있다.

① 1을 반드시 포함하는 경우의 수는 1을 미리 뽑았으므로 나머지 $(2n-1)$개의 수에서 $(n-1)$개의 수를 더 뽑으면 되기 때문에 ${}_{2n-1}C_{n-1}$

② 2를 포함해서 n개의 수를 뽑는 경우의 수는 ${}_{2n-1}C_{n-1}$

③ $2n$을 포함해서 n개의 수를 뽑는 경우의 수는 ${}_{2n-1}C_{n-1}$

그런데 각각의 수는 모두 n가지 경우에 중복되게 계산되었으므로 위 경우의 수의 합은

${}_{2n-1}C_{n-1}\times 2n\times\dfrac{1}{n}$

이것이 ${}_{2n}C_{n}$과 같아야 하므로

$${}_{2n-1}C_{n-1}\times 2={}_{2n}C_{n}$$

$\therefore\ {}_{2n-1}C_{n-1}=\dfrac{1}{2}\times{}_{2n}C_{n}$

문제 1

(a) $$\frac{d(\ln y)}{dx}=\frac{d(\ln y)}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{d(\ln y)}{dy}\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{y}\frac{-2x\cos x-\sin x}{-\frac{\cos x}{y}}=2x+\tan x$$

(b) (a)에서 $\dfrac{d(\ln y)}{dx}=2x+\tan x$이고 $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$일 때 $|\cos x|=\cos x$ 이므로

$$\ln y = \int (2x + \tan x)dx = x^2 - \ln(\cos x) + C \qquad (C\text{는 적분 상수})$$

또한, $x = 0$일 때 $y = 3$이므로 $C = \ln 3$이다. 그러므로

$$\ln y = x^2 - \ln(\cos x) + \ln 3, \quad y = e^{x^2 - \ln(\cos x) + \ln 3} = \frac{3e^{x^2}}{\cos x}$$

문제 2

(a) 점 R_i와 x축 사이의 거리가 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{QR}_i}$의 크기보다 1만큼 작으므로 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{QR}_i}$의 크기는 점 R_i와 직선 $y = -1$사이의 거리는 같다. 그러므로 점 R_i는 점 $\mathrm{Q}(0, 1)$을 초점으로 하고 직선 $y = -1$을 준선으로 가지는 포물선 $x^2 = 4y$ 위의 점이다. 또한 $\overrightarrow{\mathrm{QR}_i} \cdot \overrightarrow{\mathrm{QP}} = 0$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{QR}_i} \perp \overrightarrow{\mathrm{QP}}$이다. 따라서 직선 QR_i의 방정식은 $y = tx + 1$이다. 그러므로 점 R_1, R_2의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 하면 x_1, x_2는 $x^2 = 4(tx+1)$의 두 근이고 점 R_1, R_2의 좌표는 $\mathrm{R}_1\left(x_1, \dfrac{x_1^2}{4}\right)$, $\mathrm{R}_2\left(x_2, \dfrac{x_2^2}{4}\right)$이다. 따라서, 이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여 $x_1 + x_2 = 4t$, $x_1 x_2 = -4$이다. 이것을 이용하여 $\overrightarrow{\mathrm{PR}_1} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PR}_2}$ 의 값을 t에 대한 식으로 나타내보면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PR}_1} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PR}_2} &= \left(x_1 - t, \frac{x_1^2}{4}\right) \cdot \left(x_2 - t, \frac{x_2^2}{4}\right) = x_1 x_2 - (x_1 + x_2)t + t^2 + \left(\frac{x_1 x_2}{4}\right)^2 \\ &= -4 - 4t^2 + t^2 + 1 = -3(t^2+1)\end{aligned}$$

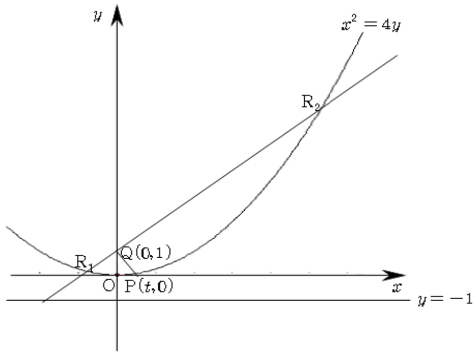
다른 풀이1

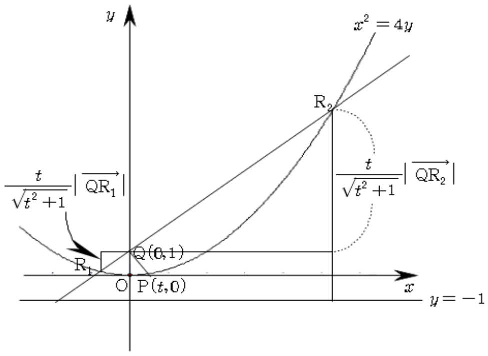
$x^2 = 4y$와 $y = tx + 1$의 교점을 구해보면 $\left(2t - 2\sqrt{t^2+1},\ 2t^2 + 1 - 2t\sqrt{t^2+1}\right)$, $\left(2t + 2\sqrt{t^2+1},\ 2t^2 + 1 + 2t\sqrt{t^2+1}\right)$이다. 따라서

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PR}_1} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PR}_2} &= \left(t - 2\sqrt{t^2+1},\ 2t^2 + 1 - 2t\sqrt{t^2+1}\right) \cdot \left(t + 2\sqrt{t^2+1},\ 2t^2 + 1 + 2t\sqrt{t^2+1}\right) \\ &= -3(t^2+1)\end{aligned}$$

다른 풀이2

점 R_i와 x축 사이의 거리가 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{QR}_i}$의 크기보다 1만큼 작으므로 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{QR}_i}$의 크기는 점 R_i와 직선 $y = -1$사이의 거리는 같다. 그러므로 점 R_i는 점 $\mathrm{Q}(0, 1)$을 초점으로 하고 직선 $y = -1$을 준선으로 가지는 포물선 $x^2 = 4y$ 위의 점이다. 또한 $\overrightarrow{\mathrm{QR}_i} \cdot \overrightarrow{\mathrm{QP}} = 0$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{QR}_i} \perp \overrightarrow{\mathrm{QP}}$이다. 따라서 직선 QR_i의 방정식은 $y = tx + 1$이다. 이러한 것들을 그래프에 나타내면 아래 그림과 같다.





두 점 R_1, R_2 중 y좌표의 값이 작은 점을 R_1라 하고 y좌표의 값이 큰 점을 R_2라 하자. 그러면 벡터 $\overrightarrow{QR_i}$의 크기는 점 R_i와 직선 $y=-1$사이의 거리와 같으므로

$$\left|\overrightarrow{QR_1}\right| = 2-\frac{\mathrm{t}}{\sqrt{\mathrm{t}^2+1}}\left|\overrightarrow{QR_1}\right|,\ \left|\overrightarrow{QR_2}\right| = \frac{\mathrm{t}}{\sqrt{\mathrm{t}^2+1}}\left|\overrightarrow{QR_2}\right|+2$$

따라서

$$\left|\overrightarrow{QR_1}\right| = 2\left(\mathrm{t}^2+1-\mathrm{t}\sqrt{\mathrm{t}^2+1}\right),\ \left|\overrightarrow{QR_2}\right| = 2\left(\mathrm{t}^2+1+\mathrm{t}\sqrt{\mathrm{t}^2+1}\right)$$

이것과 $\overrightarrow{QR_i}\cdot\overrightarrow{QP}=0$임을 이용하여 두 벡터의 내적 $\overrightarrow{PR_1}\cdot\overrightarrow{PR_2}$ 의 값을 t에 대한 식으로 나타내보면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PR_1}\cdot\overrightarrow{PR_2} &= \left(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR_1}\right)\cdot\left(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR_2}\right) = \left|\overrightarrow{PQ}\right|^2-\left|\overrightarrow{QR_1}\right|\left|\overrightarrow{QR_2}\right| \\ &= t^2+1-4\left\{(t^2+1)^2-t^2(t^2+1)\right\} \\ &= -3(t^2+1)\end{aligned}$$

(b) 위 (a)의 (다른 풀이1)에서 점 R의 좌표는 $R\left(2t-2\sqrt{t^2+1},\ 2t^2+1-2t\sqrt{t^2+1}\right)$임을 알 수 있다. 또한, R를 y축에 대하여 대칭이동시킨 점이 S이므로 세 점 $O(0,0)$, R, S를 지나는 원의 중심은 y축 위에 있다. 따라서 구하고자 하는 원의 중심은 선분 OR의 수직이등분선과 y축의 교점이다. 선분 OR의 수직이등분선의 방정식은

$$y-\frac{2t^2+1-2t\sqrt{t^2+1}}{2} = -\frac{2t-2\sqrt{t^2+1}}{2t^2+1-2t\sqrt{t^2+1}}\left(x-t+\sqrt{t^2+1}\right)$$

그러므로

$$\begin{aligned}r(t) &= \frac{2t^2+1-2t\sqrt{t^2+1}}{2}+\frac{2t-2\sqrt{t^2+1}}{2t^2+1-2t\sqrt{t^2+1}}\left(t-\sqrt{t^2+1}\right) \\ &= \frac{\left(t-\sqrt{t^2+1}\right)^2}{2}+\frac{2\left(t-\sqrt{t^2+1}\right)^2}{\left(t-\sqrt{t^2+1}\right)^2} \\ &= \frac{\left(t-\sqrt{t^2+1}\right)^2}{2}+2\end{aligned}$$

따라서

$$\lim_{t\to\infty} r(t) = \lim_{t\to\infty}\left\{\frac{\left(t-\sqrt{t^2+1}\right)^2}{2}+2\right\}$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left\{\frac{1}{2\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)^2}+2\right\}$$
$$= 2$$

다른 풀이

(a)의 풀이에서 점 R은 $x^2=4y$와 $y=tx+1$의 교점이고 방정식 $x^2=4(tx+1)$을 풀면 $x=2t\pm2\sqrt{t^2+1}$이므로 점 R의 x좌표는 $2t-2\sqrt{t^2+1}$이다. $t-\sqrt{t^2+1}=a$라고 두면 점 R의 좌표는 $\mathrm{R}(2a, a^2)$. 점 R를 y축에 대하여 대칭이동시킨 점이 S이므로 세 점 $\mathrm{O}(0, 0)$, $\mathrm{R}(2a, a^2)$, $\mathrm{S}(-2a, a^2)$을 지나는 원의 중심은 y축 위에 있고 이 원은 원점을 지난다. 그러므로 이 원의 방정식은 $x^2+y^2+By=0$ (B는 상수)이고, $\mathrm{R}(2a, a^2)$이 원 위의 점이므로

$$4a^2+a^4+Ba^2=0,\ B=-4-a^2$$

원 $x^2+y^2+By=0$의 반지름 $r(t)$는

$$r(t)=-\frac{B}{2}=2+\frac{a^2}{2}=2+\frac{(t-\sqrt{t^2+1})^2}{2}$$

따라서

$$\lim_{t\to\infty} r(t)=\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{\left(t-\sqrt{t^2+1}\right)^2}{2}+2\right\}=\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{1}{2\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)^2}+2\right\}=2$$

문제 3

(a) 집합 A에 속하는 자연수 중에서 자리의 숫자에 쓰인 1의 개수가 홀수인 것의 개수는 1의 개수가 1개, 3개, 5개, $\cdots$, 2013개인 경우들로 분류해서 구할 수 있다. 1의 개수가 k개인 경우의 수는 2014개의 자리 중에서 1이 들어갈 k개의 자리를 선정하여 1을 배치하고 나머지 $2014-k$개의 자리에 2, 3, 4, 5 중에 하나씩을 뽑아 배열하면 된다. 따라서 그 경우의 수는 ${}_{2014}C_k 4^{2014-k}$이고 집합 A에 속하는 자연수 중에서 자리의 숫자에 쓰인 1의 개수가 홀수인 것의 개수 m은

$$m={}_{2014}C_1 4^{2013}+{}_{2014}C_3 4^{2011}+{}_{2014}C_5 4^{2009}+\cdots+{}_{2014}C_{2013} 4$$

한편, 이항정리에 의하여

$$5^{2014}=(1+4)^{2014}={}_{2014}C_0 4^{2014}+{}_{2014}C_1 4^{2013}+{}_{2014}C_2 4^{2012}+\cdots+{}_{2014}C_{2014} 4^0$$
$$3^{2014}=(-1+4)^{2014}={}_{2014}C_0 4^{2014}-{}_{2014}C_1 4^{2013}+{}_{2014}C_2 4^{2012}-{}_{2014}C_3 4^{2011}+\cdots+{}_{2014}C_{2014} 4^0$$

따라서 $2m=5^{2014}-3^{2014}$. 여기서 $5^2\equiv5 \pmod{10}$이므로

$$5^{2014}\equiv5^2\cdot5^{2012}\equiv5\cdot5^{2012}\equiv5^{2013}\equiv5^{2012}\equiv\cdots\equiv5 \pmod{10}$$

이다. 또한 $3^4\equiv1 \pmod{10}$이므로

$$3^{2014}\equiv(3^4)^{503}\cdot3^2\equiv9 \pmod{10}$$

그러므로 $5^{2014}-3^{2014}\equiv5-9\equiv6 \pmod{10}$. 따라서 $2m$의 일의 자리의 숫자는 6이다.

다른 풀이

집합 A에 속하는 자연수 중에서 1의 자릿수부터 10^{n-1}자릿수까지에 쓰인 1의 개수가 홀수인 것의 개수를 a_n, 1의 개수가 짝수인 것의 개수를 b_n이라고 하면

$a_{n+1} = 4a_n + b_n$, $b_{n+1} = a_n + 4b_n$, $a_1 = 1$, $b_1 = 4$, $a_n + b_n = 5^n$

$a_{n+1} = 4a_n + b_n$

1 2 3 $\cdots$ $n-1$ n

b_n	$\times 1$ (1인 경우의 수)
a_n	$\times 4$(1아닌 경우의 수)

$b_{n+1} = a_n + 4b_n$

1 2 3 $\cdots$ $n-1$ n

a_n	$\times 1$ (1인 경우의 수)
b_n	$\times 4$ (1아닌 경우의 수)

그러므로

$$a_{n+1} - b_{n+1} = 3(a_n - b_n),\ a_1 - b_1 = -3$$

따라서

$$a_n - b_n = -3^n,\ a_n - (5^n - a_n) = -3^n,\ 2a_n = 5^n - 3^n$$

그러므로

$$2m = 2a_{2014} = 5^{2014} - 3^{2014}$$

여기서 $5^2 \equiv 5 \pmod{10}$이므로

$$5^{2014} \equiv 5^2 \cdot 5^{2012} \equiv 5 \cdot 5^{2012} \equiv 5^{2013} \equiv 5^{2012} \equiv \cdots \equiv 5 \pmod{10}$$

이다. 또한 $3^4 \equiv 1 \pmod{10}$이므로 $3^{2014} \equiv (3^4)^{503} \cdot 3^2 \equiv 9 \pmod{10}$.

그러므로 $5^{2014} - 3^{2014} \equiv 5 - 9 \equiv 6 \pmod{10}$. 따라서 $2m$의 일의 자리의 숫자는 6이다.

(b) 집합 A에 속하는 자연수 중에서 자리의 숫자에 쓰인 1과 2의 개수가 각각 홀수인 경우에서 1또는 2가 쓰인 마지막 자릿 수를 1이면 2로, 2이면 1로 바꾸면, 그 경우는 1과 2의 개수가 각각 짝수인 경우(1과 2의 개수가 모두 0인 경우는 제외)가 된다. 그러므로 집합 A에 속하는 자연수 중에서 자리의 숫자에 쓰인 1과 2의 개수가 각각 홀수인 것의 개수는 1과 2의 개수가 각각 짝수인 것(1과 2의 개수가 모두 0인 경우는 제외)의 개수와 같다. 또한 집합 A에 속하는 자연수 중에서 자리의 숫자에 쓰인 1과 2의 개수가 각각 홀수인 것의 개수와 1과 2의 개수가 각각 짝수인 것의 개수의 합은 자리의 숫자에 쓰인 1의 개수와 2의 개수의 합이 짝수인 것의 개수와 같다. 따라서

$2n + {}_{2014}C_0 2^0 \cdot 3^{2014} = {}_{2014}C_0 2^0 \cdot 3^{2014} + {}_{2014}C_2 2^2 \cdot 4^{2012} + {}_{2014}C_4 2^4 \cdot 3^{2010} + \cdots + {}_{2014}C_{2014} 2^{2014} \cdot 3^0$

한편, 이항정리에 의하여

$(2+3)^{2014} = {}_{2014}C_0 2^0 \cdot 3^{2014} + {}_{2014}C_1 2^1 \cdot 3^{2013} + {}_{2014}C_2 2^2 \cdot 3^{2012} + \cdots + {}_{2014}C_{2014} 2^{2014} \cdot 3^0$

$(-2+3)^{2014} = {}_{2014}C_0 2^0 \cdot 3^{2014} - {}_{2014}C_1 2^1 \cdot 3^{2013} + {}_{2014}C_2 2^2 \cdot 3^{2012} - \cdots + {}_{2014}C_{2014} 2^{2014} \cdot 3^0$

따라서

$$4n + 2\,{}_{2014}C_0 2^0 \cdot 3^{2014} = (2+3)^{2014} + (-2+3)^{2014},\ 4n = 5^{2014} + 1^{2014} - 2 \cdot 3^{2014}$$

그러므로

$$4n \equiv 5^{2014} + 1^{2014} - 2 \cdot 3^{2014} \equiv 5 + 1 - 2 \cdot 9 \equiv 8 \pmod{10}$$

따라서 $4n$의 일의 자리의 숫자는 8이다.

다른 풀이

1과 2의 개수가 각각 홀수이므로 1의 개수와 2의 개수의 합은 짝수이다. 1과 2의 개수의 합을 $2k(k=1, 2, 3, \cdots, 1007)$개라고 하자. 그러면 집합 A에 속하는 자연수 중에서 자리의 숫자에 쓰인 1과 2의 개수가 각각 홀수가 되려면 1또는 2가 들어갈 자리 $2k$ $(k=1, 2, 3, \cdots, 1007)$개를 선택하고 그 자리 중에서 $i(i=1, 3, 5, \cdots, 1007)$개를 선택하여 1을 배치하고 나머지 $2k-i$개의 자리에는 2를 배치한 후, 남아 있는 $2014-2k$의 자리에는 3, 4, 5 중에 하나를 선택하여 배치하면 된다. 그 경우의 수 n은

$$\begin{aligned} n &= \sum_{k=1}^{1007} {}_{2014}C_{2k}\left\{ {}_{2k}C_1 + {}_{2k}C_3 + \cdots + {}_{2k}C_{2k-1} \right\} \cdot 3^{2014-2k} \\ &= \sum_{k=1}^{1007} {}_{2014}C_{2k} 2^{2k-1} \cdot 3^{2014-2k} \\ &= {}_{2014}C_2 1^2 \cdot 4^{2012} + {}_{2014}C_4 2^3 \cdot 3^{2010} + \cdots + {}_{2014}C_{2014} 2^{2013} \cdot 3^0 \end{aligned}$$

그러므로

$2n = {}_{2014}C_2 2^2 \cdot 4^{2012} + {}_{2014}C_4 2^4 \cdot 3^{2010} + \cdots + {}_{2014}C_{2014} 2^{2014} \cdot 3^0$

$2n + {}_{2014}C_0 2^0 \cdot 3^{2014} = {}_{2014}C_0 2^0 \cdot 3^{2014} + {}_{2014}C_2 2^2 \cdot 4^{2012} + {}_{2014}C_4 2^4 \cdot 3^{2010} + \cdots + {}_{2014}C_{2014} 2^{2014} \cdot 3^0$

한편, 이항정리에 의하여

$$(2+3)^{2014} = {}_{2014}C_0 2^0 \cdot 3^{2014} + {}_{2014}C_1 2^1 \cdot 3^{2013} + {}_{2014}C_2 2^2 \cdot 3^{2012} + \cdots + {}_{2014}C_{2014} 2^{2014} \cdot 3^0$$

$$(-2+3)^{2014} = {}_{2014}C_0 2^0 \cdot 3^{2014} - {}_{2014}C_1 2^1 \cdot 3^{2013} + {}_{2014}C_2 2^2 \cdot 3^{2012} - \cdots + {}_{2014}C_{2014} 2^{2014} \cdot 3^0$$

따라서

$$4n + 2\,{}_{2014}C_0 2^0 \cdot 3^{2014} = (2+3)^{2014} + (-2+3)^{2014},\ 4n = 5^{2014} + 1^{2014} - 2 \cdot 3^{2014}$$

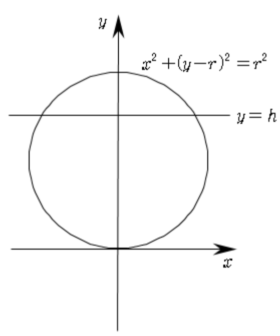
그러므로

$$4n \equiv 5^{2014} + 1^{2014} - 2 \cdot 3^{2014} \equiv 5 + 1 - 2 \cdot 9 \equiv 8 \pmod{10}$$

따라서 $4n$의 일의 자리의 숫자는 8이다.

문제 4

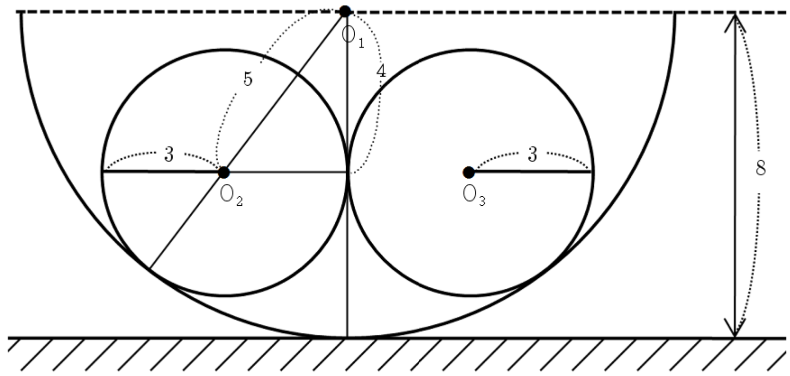
(a) 구하고자 하는 회전체의 부피 V는



$$V = \pi \int_0^h \{r^2 - (y-r)^2\} dy = \pi r^2 h - \pi \int_0^h (y-r)^2 dy$$

$$= \pi r^2 h - \pi \left\{ \frac{1}{3}(h-r)^3 + \frac{1}{3} r^3 \right\} = \pi r h^2 - \frac{\pi}{3} h^3$$

(b)



주어진 용기에 초당 $21\pi\text{cm}^3$의 일정한 비율로 물을 넣기 시작한 후 t초 후의 수면 높이를 h, 물의 양을 V라고 하자. 그러면 $1<h<7$ 일 때, 물의 양 V를 (a)의 결과를 이용하여 구하면

$$V=\left(8\pi h^2-\frac{\pi}{3}h^3\right)-2\left\{3\pi(h-1)^2-\frac{\pi}{3}(h-1)^3\right\}$$
$$=8\pi h^2-\frac{\pi}{3}h^3-6\pi(h-1)^2+\frac{2\pi}{3}(h-1)^3$$

채워진 물이 $105\pi\text{cm}^3$가 되는 순간의 수면 높이 h를 구해보면

$$8\pi h^2-\frac{\pi}{3}h^3-6\pi(h-1)^2+\frac{2\pi}{3}(h-1)^3=105\pi,$$
$$24h^2-h^3-18(h-1)^2+2(h-1)^3=315,$$
$$h^3+42h-335=0,\ (h-5)(h^2+5h+67)=0,\ \therefore\ \ h=5$$

그 때 수면 높이의 속력 $\dfrac{dh}{dt}$를 구해보면

$$\frac{dV}{dt}=\{16\pi h-\pi h^2-12\pi(h-1)+2\pi(h-1)^2\}\frac{dh}{dt},$$
$$21\pi=(80\pi-25\pi-48\pi+32\pi)\frac{dh}{dt},$$
$$\therefore\ \ \frac{dh}{dt}=\frac{7}{13}$$

24 성균관대학교 모의

수학 1 **다음 〈제시문1〉~〈제시문4〉를 읽고 [논제1- i]~[논제1-iv]를 문항별로 풀이와 함께 답하시오.***

<제시문1>

함수 $f(x)$ 가 실수 a 에 대하여 다음 조건을 만족하면 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이라고 한다.

(1) $x=a$ 에서 정의되어 있고

(2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 가 존재하며

(3) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ 이다.

<제시문2>

함수 $y=f(x)$ 에서 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 가 존재하면 함수 $y=f(x)$ 는 $x=a$ 에서 미분가능하다고 하고, 이 극한값을 함수 $y=f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 미분계수라 하며, 기호로 $f'(a)$ 와 같이 나타낸다.

<제시문3>

함수 $y=f(x)$ 가 정의역 X 에서 미분가능하면 정의역에 속하는 모든 x 에 대하여 미분계수 $f'(x)$ 를 대응시키는 새로운 함수 $f : x \to f'(x)$ 즉, $f'(x)=\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 가 존재한다. 이때, 함수 $f'(x)$ 를 $f(x)$ 의 도함수라 한다.

<제시문4>

$f(x)=x|x|$ 라고 하자.

논제 1- i

<제시문4>에서 주어진 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분 가능함을 논술하시오.

---

* 성균관대학교 입학처

논제 1- ii

제시문들을 이용하여 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 를 구하시오.

논제 1- iii

제시문들을 이용하여 함수 $f'(x)$ 의 $x=0$ 에서의 연속성을 조사하시오.

논제 1- iv

제시문들을 이용하여 함수 $f'(x)$ 의 $x=0$ 에서의 미분가능성을 조사하시오.

수학 2 다음 〈제시문1〉~〈제시문3〉를 읽고 [논제2- i]~[논제2- ii]를 문항별로 풀이와 함께 답하시오.*

<제시문1>

두 초점 $F(c,0), F'(-c,0)$ 으로부터 거리의 합이 $2a$ 인 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ (단, } a>b>0\text{ , } b^2=a^2-c^2 \text{ 이다.)}$$

<제시문2>

두 초점 $F(c,0), F'(-c,0)$ 으로부터 거리의 합이 $2b$ 인 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ (단, } b>a>0\text{ , } a^2=b^2-c^2 \text{ 이다.)}$$

<제시문3>

제시문1, 2에서 주어진 타원의 넓이 (타원으로 둘러싸인 부분의 넓이)는 $ab\pi$ 이다.

논제 2- i

두 타원 $16x^2+9y^2=25$ 와 $9x^2+16y^2=25$ 이 만나는 점들로 이루어진 사각형의 넓이를 구하시오.

논제 2- ii

[논제 2- i]에서 얻어진 사각형에 외접하는 모든 타원은 넓이가 2π 보다 크다. 이를 논증하시오.

* 성균관대학교 입학처

논술유형분석

문항 수	수학 2문항, 과학6문항 중 택2	시간	120분
연관 개념	미분가능성과 연속, 타원의 방정식, 산술·기하평균과 부등식		

제시문분석

수학1

연속의 정의와 미분계수, 도함수의 정의를 설명하고 있다.

수학2

타원의 방정식과 타원의 넓이를 소개하고 있다.

논제분석

논제 1

함수의 미분가능성의 개념을 이해하고 함수의 연속성을 알고 있는지를 묻는 문항이다.

논제 2

타원과 외접의 개념을 이해하고 부등식을 문제해결에 잘 적용할 수 있는지를 묻는 문항이다.

배경지식쌓기

1. 미분가능

함수 $y=f(x)$ 에서 x 의 값이 a 에서 $a+\Delta x$ 까지 변할 때, 이 함수의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

이다. 여기서 $\Delta x \to 0$ 일 때, 평균변화율의 극한값

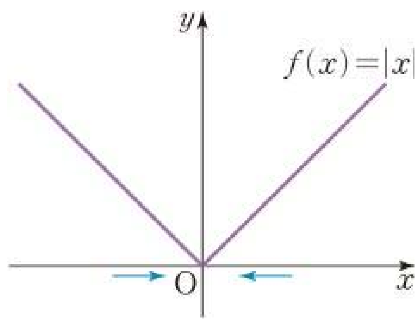
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

가 존재하면 함수 $y=f(x)$ 는 $x=a$ 에서 **미분가능**하다고 한다. 또한, 이 극한값을 함수 $y=f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 **순간변화율** 또는 **미분계수**라 하고, 기호로 $f'(a)$ 와 같이 나타낸다.
또, 함수 $f(x)$ 가 어떤 구간에 속하는 x 의 모든 값에서 미분가능하면 함수 $f(x)$ 는 그 구간에서 미분가능하다고 한다.
미분가능성은 함수의 극한과 관계가 있으므로 좌극한과 우극한이 같아야 그 극한값이 존재한다.
아래의 예는 연속이지만 미분불가능한 함수의 예이다.
함수 $f(x)=|x|$ 는 $x=0$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않다. 왜냐하면
$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}|x|=0=f(0)$ 이므로 함수 $f(x)=|x|$ 는 $x=0$ 에서 연속이다. 한편

$$\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

$$\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$$

곧, $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$ 은 존재하지 않는다.



풀어보기

문제 1 다음과 같이 주어진 함수 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 을 생각해 보자 (단, $\mathbb{R}$ 은 실수 전체의 집합이다)

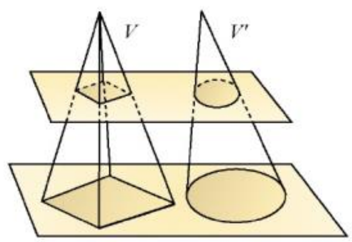
$$f(x)=\begin{cases} 0 & (x \le 0) \\ e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \end{cases}$$

점 $x=0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 미분가능성을 미분계수의 정의를 이용하여 조사하고, 그 근거를 서술하시오. (단, $\lim_{x\to\infty} xe^{-x}=0$ 을 이용하여라.)

문제 2 함수 $f(x)=kx^2e^{-x}\ (k>0)$ 과 실수 t 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서 x 축까지의 거리와 y 축까지의 거리 중 크지 않은 값을 $g(t)$ 라 하자. 함수 $g(t)$ 가 한 점에서만 미분가능하지 않도록 하는 k 의 최댓값은? (2013년 대수능)

문제3 아르키메데스보다 훨씬 후대의 사람인 카발리에리(Cavalieri, F.B 1598~1647)는 이탈리아인으로서 미분적분학의 전 단계인 '불가분량의 방법(method of indivisibles)'을 다루었다. 다음은 카발리에리의 원리를 현대적으로 해석해 놓은 것이다.

"두 개의 공간 도형이 한 쌍의 평행면 사이에 끼어 있고 그 평행면들과 평행인 임의의 면으로 그 두 공간 도형을 잘랐을 때 생기는 두 단면의 넓이가 항상 일정한 비를 가지면, 두 공간 도형의 부피도 또한 그 비를 갖는다."



이 카발리에리의 원리는 두 평면도형 S_1, S_2 와 그 넓이에 대해서도 다음과 같이 성립한다: 정해진 한 직선에 평행인 임의의 직선으로 두 도형 S_1, S_2 를 자를 때, S_1, S_2 의 잘린 두 선분의 길이의 비가 항상 $s : t$ 이면 S_1, S_2 의 넓이의 비도 $s : t$ 이다.

이것을 이용하여 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 의 넓이가 πab 가 됨을 설명하여 보아라.

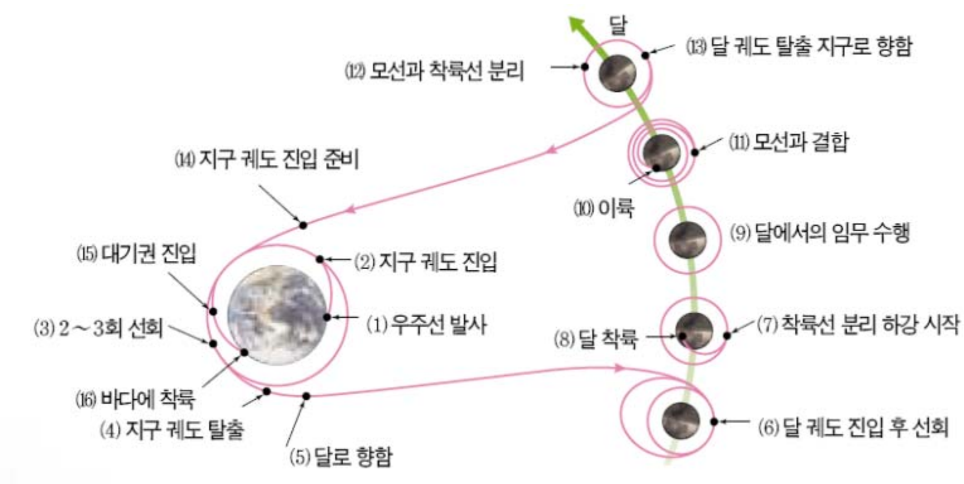
읽기자료

인류 최초의 달 착륙*

미적분의 발달은 역학, 공학 등의 분야에 많은 발전을 가져왔다. 인류는 더욱 발달된 학문과 기술을 바탕으로 자동차, 비행기 등의 운송 수단을 만들 수 있게 되었으며, 그동안 꿈꿔 왔던 우주 여행도 가능하게 만들었다.

1969년 7월 16일, 미국의 플로리다 주에 위치한 케네디 우주 센터 발사대에서는 아폴로 11호가 발사되었다.

인류 최초의 달 착륙을 목표로 진행된 아폴로 계획이 이루어지는 순간이었다. 아폴로 11호는 7월 20일 무사히 달에 착륙하여 인류가 꿈꿔 왔던 순간을 실현시켰다.



지구에서 달까지의 여행을 무사히 마칠 수 있으려면 고도의 기술뿐만 아니라, 지구와 달의 움직임에 대한 정확한 지식이 필요하다.

이러한 지식과 기술의 개발은 미적분의 발달에 힘입은 바가 크다고 할 수 있다. 오늘날 미적분은 사회의 거의 모든 분야에서 중요한 수단으로 자리 잡고 있으며, 그 유용성은 계속 커질 것이다.

* www.hq.nasa.gov/office/pao/History/alsj/a11/a11.html

예시답안

풀어보기

문제 1

상수함수와 지수함수는 실수전체집합에서 미분가능하므로 $x \neq 0$ 에서 함수 f 는 미분가능하다. 따라서 $x=0$ 에서 미분가능임을 보이면 된다. 즉, $x=0$ 에서 좌미분계수와 우미분계수가 같음을 보이면 된다.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$

이므로 $x=0$ 에서 좌미분계수와 우미분계수가 같음을 보이자.

좌미분계수 : $\displaystyle\lim_{x\to -0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to -0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to -0}\frac{0}{x}=0$

우미분계수 : $\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to +0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to +0}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$

에서 $\dfrac{1}{x}=t$ 로 치환하면, $t\to\infty$ 이다.($\because x>0$) 그러므로 조건에 의해서

$$\lim_{x\to +0}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{t\to\infty}te^{-t}=0$$

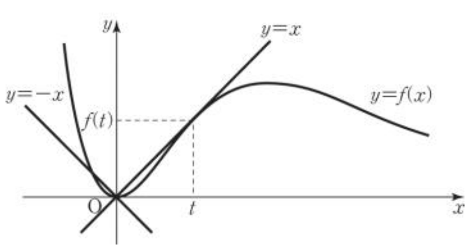
좌미분계수와 우미분계수가 같으므로 $x=0$ 에서 미분가능하고 $f'(0)=0$ 이다.

문제 2

$f(x)=kx^2e^{-x}$, $f'(x)=kx(2-x)e^{-x}$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\dfrac{4k}{e^2}$	$\searrow$

또한 $f(x)\geq 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(t,\ f(t))$ 에 대하여 함수 $g(t)$ 는 x 축까지의 거리와 y 축까지의 거리 중 크지 않은 값이므로

$$g(t)=\begin{cases}|t| & (|t|\le f(t))\\ kt^2e^{-t} & (|t|>f(t))\end{cases}$$

이다. 즉, 함수 $g(t)$ 는 $|x|=kx^2e^{-x}$ 인 점 즉, $x=kx^2e^{-x}$, $-x=kx^2e^{-x}$ 인 두 점에서 불연속이다. 그런데 한 점에서만 미분가능하지 않아야 하므로 $x>0$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 가 만나지 않거나 접해야 한다. 그런데 k 의 값이 커짐에 따라 극댓값 $\dfrac{4k}{e^2}$ 가 커지므로 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 가 접할 때 k 의 값이 최대가 된다. 이때의 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$ 라 하면

$$t=kt^2e^{-t},\ 1=kte^{-t}\ \cdots\cdots ㉠$$

접점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 기울기가 1이므로

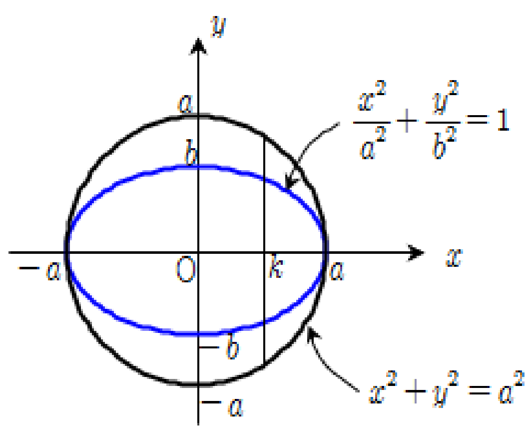
$$f'(t)=kt(2-t)e^{-t}=1\ \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $t=1$, $k=e$

따라서 구하는 k 의 최댓값은 e 이다.

문제 3

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$에서 $y=\pm\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ 이고 원 $x^2+y^2=a^2$에서 $y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$ 이다. 이때, 직선 $x=k\,(-a\le k\le a)$ 에 의해 타원과 원의 잘린 선분의 길이의 비는 $\dfrac{b}{a}:1=b:a$ 이다. 따라서 카발리에리의 원리에 의해 타원의 넓이와 원의 넓이의 비 역시 $b:a$ 가 된다. 이때, 원의 넓이가 πa^2 이므로 타원의 넓이를 S 라 하면 $S:\pi a^2=b:a$ 에서 $S=\pi ab$ 이다.



논제 Ⅰ-1

$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h|h|}{h}=\lim_{h\to 0}|h|=0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분 가능하다.

논제 Ⅰ-2

$f(x)=x|x|$ 이고 [논제1- i]에서 $f'(0)=0$ 이므로 함수 f 의 도함수는

$$f'(x)=\begin{cases}2x & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ -2x & (x<0)\end{cases}$$

가 된다.

다른 풀이

i) [논제1- i]에서 $f'(0)=0$

ii) $x>0$ 일 때(h를 $-x<h<x$로 제한하자. 그렇게 하더라도 아래 극한값을 구하는데는 문제가 없다.)

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)|x+h|-x|x|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

iii) $x<0$ 일 때(h를 $x<h<-x$로 제한하자. 그렇게 하더라도 아래 극한값을 구하는데는 문제가 없다.)

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)|x+h|-x|x|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-(x+h)^2+x^2}{h}$$
$$=-\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}=-\lim_{h\to 0}(2x+h)=-2x$$

이다. i), ii), iii)에 의해서 $f'(x)=\begin{cases}2x & (x\geq 0)\\ -2x & (x<0)\end{cases}$ 이다.

논제 Ⅰ-3

$f'(0)=0$ 이고 $\lim_{x\to +0}f'(x)=\lim_{x\to +0}2x=0$, $\lim_{x\to -0}f'(x)=\lim_{x\to -0}(-2x)=0$이므로 함수 $f'(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

논제 Ⅰ-4

$\lim_{h\to +0}\frac{f'(0+h)-f'(0)}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{2h}{h}=2$이고 $\lim_{h\to -0}\frac{f'(0+h)-f'(0)}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{-2h}{h}=-2$

이므로 $\lim_{h \to 0} \frac{f'(0+h)-f'(0)}{h}$ 는 존재하지 않고 따라서 $f'(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

논제 Ⅱ-1

$16x^2+9y^2=25$ 와 $9x^2+16y^2=25$ 에서 $x^2-y^2=0$ 이므로 $y=x$ 또는 $y=-x$ 이다.
$y=x$ 를 식 $16x^2+9y^2=25$ 에 대입하면 $(x,\ y)=(1,\ 1),\ (-1,\ -1)$ 이고 $y=-x$ 를 식 $16x^2+9y^2=25$ 에 대입하면 $(x,\ y)=(1,\ -1),\ (-1,\ 1)$ 이다. 따라서 두 타원은 네 점 $(1,1),\ (1,-1),\ (-1,1),\ (-1,-1)$ 에서 만나고 사각형의 넓이는 4 이다.

다른 풀이*

두 타원의 방정식은 x^2 과 y^2 을 서로 바꾼 식이므로 (a,b) 가 교점이라면 $a^2=b^2$ 을 만족한다. 따라서 교점들은 $(\pm a,\ \pm a)$ 의 형태이다.
따라서 $16x^2+9y^2=25$ 에서 y^2 대신에 x^2 을 대입하면 $16x^2+9x^2=25$ 를 얻고 이 식을 정리하면 $x=\pm 1$ 을 얻는다. 그러므로 $y=\pm 1$ 이고 두 타원은 네 점 $(1,1),\ (1,-1),\ (-1,1),\ (-1,-1)$ 에서 만나고 사각형의 넓이는 4 이다.

논제 Ⅱ-2

사각형의 네 꼭짓점이 각각 x, y 축 그리고 원점에 대칭이므로 사각형의 네 꼭짓점을 모두 지나는 타원의 중심은 원점이다. 따라서 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0\ ,\ b>0\ ,\ a \neq b)$$

임을 알 수 있다. 이 타원은 위 문제에서 얻어진 사각형에 외접하므로 $(\pm 1,\ \pm 1)$ 을 지난다. 따라서 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$ 이고 $a^2+b^2=a^2b^2$ 이다. $a^2\ ,\ b^2>0$ 이고 $a^2 \neq b^2$ 이므로 산술 기하평균에서

$$\frac{a^2+b^2}{2} > ab$$

를 얻는다. 그런데 $a^2+b^2=a^2b^2$ 이므로 이를 위 식에 대입하면 $ab>2$ 이다.
<제시문3>에 의해 타원의 넓이 πab 는 $\pi ab > 2\pi$ 이므로 사각형에 외접하는 모든 타원의 넓이는 2π 보다 크다.

* 성균관대 예시답안 참조

25 성균관대학교 수시

제시문 I 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.*

[가]

자연수 n 에 대하여 $n!$ 은 n 이하인 모든 자연수의 곱으로 정의한다. 즉,

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$$

이며 $0! = 1$ 로 정의한다.

[나]

자연수 n 과 $0 \le k \le n$ 에 대하여, 이항계수 ${}_n\mathrm{C}_k$ 는 n 개의 사물 중 k 개의 사물을 선택하는 방법의 수로 정의하며, 다음의 식으로 주어진다.

$${}_n\mathrm{C}_k = \frac{n!}{(n-k)! \times k!}$$

[다]

자연수 n 에 대하여, 이항정리는 다음과 같다.

$$(x+y)^n = {}_n\mathrm{C}_0 x^n y^0 + {}_n\mathrm{C}_1 x^{n-1} y^1 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n x^0 y^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^{n-k} y^k$$

[라]

자연수 n 에 대하여, a_n 을 방정식 $x+y+z=n$ 의 음이 아닌 정수해의 순서쌍 (x, y, z) 의 개수로 정의한다.

논제 I-1

자연수 n 이 1 또는 2 인 경우, 방정식 $x+y+z=n$ 의 음이 아닌 정수해의 순서쌍 (x, y, z) 를 모두 나열하고, 제시문 [라]에 정의된 a_n 의 초기항 a_1 과 a_2 의 값을 각각 구하시오.

논제 I-2

2 이상인 자연수 n 에 대해 방정식 $x+y+z=n$ 을 만족하고 z 의 값이 1 이상인, 음이 아닌 정수해의 순서쌍 (x, y, z) 의 개수가 a_{n-1} 과 같음을 보이고, 이를 이용하여 $a_n = a_{n-1} + n + 1$ 이 성립함을 논하시오.

논제 I-3

제시문 [다]을 이용하여 부등식 $2^n \ge n+1$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 성립하는 이유를 논하시오.

---

* 성균관대학교 입학처

논제 Ⅰ-4

제시문 [라]에서 정의된 a_n 은 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $a_n \le 2^{n+1}$ 을 만족한다. 그 이유를 문제 [논제 Ⅰ-1], [논제 Ⅰ-3]의 결과와 수학적 귀납법을 이용하여 논하시오.

제시문 Ⅱ **다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.**

[가]
두 함수 $p(x)$, $q(x)$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $p(x) \ge q(x)$ 일 때, 두 곡선 $y=p(x)$ 와 $y=q(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$ 로 둘러싸인 영역의 넓이는 $\int_a^b \{p(x)-q(x)\}dx$ 이다.

[나]
곡선 $y=x^2$ 을 C라 한다. $a>2$ 를 만족하는 실수 a 에 대하여, 점 P_a 의 좌표를 (a, a^2) 라고 정의한다.

[다]
좌표평면 위의 두 점 O 와 A 는 각각 좌표 $\mathrm{O}=(0,0)$ 과 $\mathrm{A}=(1,0)$ 을 가진다.

논제 Ⅱ-1

선분 $\overline{\mathrm{AP}_a}$ 와 곡선 C가 점 P_a 를 포함하여 두 점에서 만남을 보이시오. 이 중 P_a 가 아닌 다른 한 점을 Q_a 라고 할 때, 점 Q_a 의 좌표를 a 에 대한 식으로 나타내시오.

논제 Ⅱ-2

선분 $\overline{\mathrm{OP}_a}$ 와 곡선 C로 둘러싸인 영역의 넓이를 $S_1(a)$ 라고 하자. a 에 대한 다항식 $S_1(a)$ 을 제시문 [가]를 이용하여 구하시오.

논제 Ⅱ-3

선분 $\overline{\mathrm{Q}_a\mathrm{P}_a}$ 와 곡선 C로 둘러싸인 영역의 넓이를 $S_2(a)$ 라고 하자. $S_2(a)=\left(\frac{a}{a-1}\right)^3 \times g(a)$ 를 만족하는 a 에 관한 다항식 $g(a)$ 를 제시문 [가]를 이용하여 구하시오.

논제 Ⅱ-4

[논제 Ⅱ-2]와 [논제 Ⅱ-3]에서 정의된 $S_1(a)$ 와 $S_2(a)$ 에 대하여, $\lim_{a\to\infty}\frac{S_2(a)}{S_1(a)}$ 의 값을 추론하시오.

논술유형분석

문항 수	수학 2문항, 과학2문항(물리Ⅰ,Ⅱ / 화학Ⅰ,Ⅱ / 생명과학Ⅰ,Ⅱ 6개 과목 중 2개 과목 선택)	시간	120분
연관 개념	적분법, 일차변환, 함수의 극한, 미분법		

제시문분석

제시문 Ⅰ

팩토리얼, 조합, 이항정리, 음이 아닌 정수해의 순서쌍의 개수를 정의하고 있다.

제시문 Ⅱ

두 곡선 사이의 넓이를 정적분으로 계산하는 방법, 좌표평면에서 곡선 $y=x^2$ 위의 점과 x 축 위의 두 점에 대해 정의하고 있다.

논제분석

전체적으로 교육과정 내의 내용을 질문하고 있어 학교 수업에 충실한 학생들도 충분히 해결할 수 있는 문항들로 출제되었다.

논제 Ⅰ-1

방정식에서 $n=1$, $n=2$ 일 때 음이 아닌 정수해의 순서쌍을 구체적으로 나열할 것을 요구하고 있다.

논제 Ⅰ-2

음이 아닌 정수해의 순서쌍의 개수를 수열로 표시하고 점화식으로 표현할 수 있음을 보여야 한다. 중복조합의 계산을 이용한다.

논제 Ⅰ-3, 논제 Ⅰ-4

모든 자연수 n 에 대해 부등식이 성립함을 증명한다. 수학적 귀납법을 사용하면 쉽게 증명할 수 있다.

논제 Ⅱ-1

직선과 곡선이 서로 다른 두 점에서 만남을 보이고 교점의 좌표를 구하는 문항이다. 두 식을 등호로 연결하여 이차방정식의 해를 구하면 된다.

논제 Ⅱ-2, 논제 Ⅱ-3

선분과 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하는 문항으로 정적분을 이용하면 쉽게 구할 수 있다. 넓이는 a 에 관한 함수로 표현된다.

논제 Ⅱ-4

[논제Ⅱ-2]와 [논제Ⅱ-3]에서 구한 넓이를 이용하여 함수의 극한값을 계산한다.

배경지식쌓기

1. 중복조합

가. 중복조합의 수

서로 다른 n 개에서 중복을 허락하여 r 개를 택하는 중복조합의 수는

$$ {}_{n}\mathrm{H}_{r} = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_{r} $$

나. 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수의 순서쌍의 개수

자연수 m, n 에 대하여 방정식

$$ x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n $$

을 만족시키는 음이 아닌 정수 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 의 순서쌍 $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 의 개수는 서로 다른 m 개의 문자 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 중에서 중복을 허락하여 n 개를 뽑는 중복조합의 수와 같다. 즉, ${}_{m}\mathrm{H}_{n} = {}_{m+n-1}\mathrm{C}_{n}$ 이다.

2. 정적분

$$ \int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3 $$

풀어보기

문제 1 같은 종류의 사탕 5 개를 3 명의 아이에게 1 개 이상씩 나누어 주고, 같은 종류의 초콜릿 5 개를 1 개의 사탕을 받은 아이에게만 1 개 이상씩 나누어 주려고 한다. 사탕과 초콜릿을 남김없이 나누어 주는 경우의 수는? (2009년 대수능)

① 27 ② 24 ③ 21 ④ 18 ⑤ 15

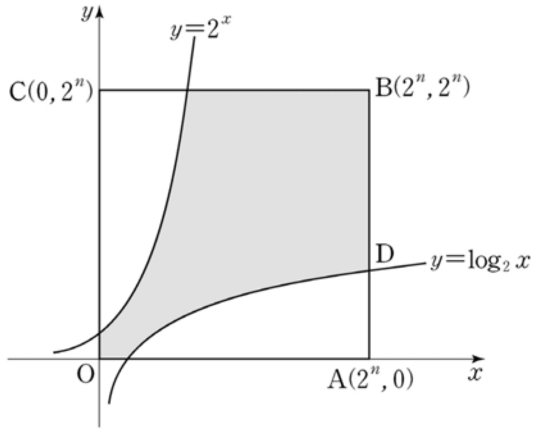
문제 2 어느 상담 교사는 월요일, 화요일, 수요일 3 일 동안 학생 9 명과 상담하기 위하여 상담 계획표를 작성하려고 한다.

[상담계획표]

요일	월요일	화요일	수요일
학생 수(명)	a	b	c

상담 교사는 각 학생과 한 번만 상담하고, 요일별로 적어도 한 명의 학생과 상담한다. 상담 계획표에 학생 수만을 기록할 때, 작성할 수 있는 상담 계획표의 가짓수를 구하시오. (단, a , b , c 는 자연수이다.) (2010년 6월 평가원)

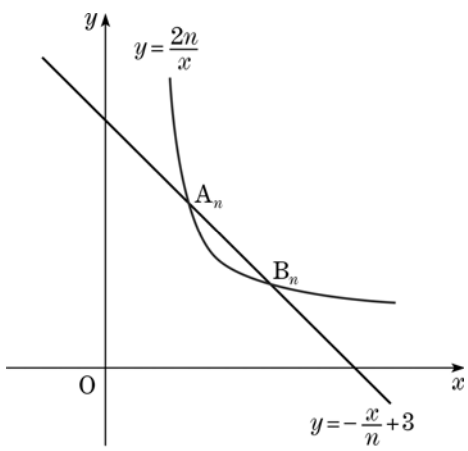
문제 3 좌표평면에서 꼭짓점의 좌표가 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(2^n,\ 0)$, $\mathrm{B}(2^n,\ 2^n)$, $\mathrm{C}(0,\ 2^n)$인 정사각형 OABC 와 두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$에 대하여 물음에 답하시오.
(단, n은 자연수이다.)



정사각형 OABC 와 그 내부는 두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$에 의하여 세 부분으로 나뉜다. $n=3$일 때 이 세 부분 중 색칠된 부분의 넓이는? (2013년 9월 평가원)

① $14+\dfrac{12}{\ln 2}$ ② $16+\dfrac{14}{\ln 2}$ ③ $18+\dfrac{16}{\ln 2}$ ④ $20+\dfrac{18}{\ln 2}$ ⑤ $22+\dfrac{20}{\ln 2}$

문제 4 자연수 n에 대하여 곡선 $y=\dfrac{2n}{x}$과 직선 $y=-\dfrac{x}{n}+3$의 두 교점을 A_n, B_n이라 할 때, 물음에 답하시오.



곡선 $y=\dfrac{2n}{x}$과 직선 $y=-\dfrac{x}{n}+3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $S_{n+1}-S_n$의 값은? (2013년 10월 전국연합)

① $\dfrac{3}{2}-2\ln 2$ ② $1-\ln 2$ ③ $\dfrac{3}{2}-\ln 2$ ④ $1+\ln 2$ ⑤ $\dfrac{3}{2}+2\ln 2$

읽기자료

조 합 론

1. 조합론*

조합론은 순수 수학의 한 분야로 대수학, 확률론, 기하학 등 수학의 여러 분야와 관련되어 있다. 조합론은 어떤 집합의 원소들을 유형별로 배열하는 것과 관련되어 있으며 이러한 배열의 존재성을 생각하고 배열의 개수를 헤아린다. 또한 잘 알려진 배열의 구조의 성질을 연구하고 그 응용을 연구한다. 일반적으로 조합론은 이산구조와 그 관계를 연구하는 것이다.

조합론은 인류문명의 시작과 더불어 발달되어 왔다고 볼 수 있다. 수와 도형을 다루면서 자연스럽게 경우의 수, 이항계수, 마방진, 그래프, 다면체의 성질 등 조합론적인 문제들을 생각했을 것이다. 간단하고 서로 개별적이어서 해석학, 대수학, 기하학, 위상수학 등 굵직한 수학분야들에 섞여 있었다.

조합론은 18세기 수학자 오일러에 이르러 수학의 한 분야로 인식되기 시작했고 오랫동안 침묵하다가 최근에 그 활동이 다시 활발해졌다. 컴퓨터의 급속한 발달과 함께 고속의 계산이 가능해졌는데 조합수학이 그 이론적 배경이 되어 더 빠르고 효율적인 계산을 가능케 한다. 즉, 컴퓨터 프로그램에 종종 조합론적 알고리즘이 중요한 부분을 차지한다. 이렇게 다른 분야에 이용되는 응용수학으로서 뿐만 아니라 순수수학 그 자체로서도 자리를 잡아가고 있다.

2. 비둘기집의 원리

'n개의 비둘기집에 $n+1$마리 이상의 비둘기가 들어갔다면, 두 마리 이상의 비둘기가 들어간 비둘기집이 적어도 하나 존재한다.'

[증명] 모든 비둘기집에 1마리 이하의 비둘기가 들어갔다면 비둘기의 수는 비둘기집의 개수인 n보다 작거나 같아야 한다. 이는 비둘기가 $n+1$마리 이상이라는 사실에 모순이다. 따라서 적어도 하나의 비둘기집에는 두 마리 이상이 들어가게 된다. ■

이 원리를 처음 사용한 사람은 독일의 수학자 디리클레(Dirichlet, 1805~1859)이고 그래서 디리클레의 상자원리 혹은 서랍원리라고도 부른다. 이 원리는 매우 간단하고 당연해 보이지만 정수론, 기하, 논리, 조합론 등 광범위한 문제에 적용된다. 또 램지 수(Ramsey Number)라는 조합론의 어려운 문제도 이 비둘기집의 원리의 응용에서 시작한다.

이를 일반화하면 n개의 비둘기집에 $n(r-1)+1$개의 비둘기가 들어가면 적어도 하나의 비둘기집에는 r마리 이상의 비둘기가 들어있다.

비둘기집의 원리를 확장한 것이 램지 이론이다. 램지 이론은 영국의 수학자 램지(Frank Plumptom Ramsey, 1903-1930)가 1930년에 발표한 8페이지짜리의 논문으로부터 시작

하여 헝가리 수학자 폴 에어디쉬(Paul Erdos, 1913-1996)가 깊이 연구하여 수학의 새로운 분야로 만든 이론이다. 이 이론은 다음의 문제로부터 유래되었다. 램지 이론은 다음의 정리에서 출발한다.

'6 명을 초대하여 파티를 열었다. 이때, 이 중에는 서로 알고 있는 세 사람 또는 서로 모르는 세 사람이 항상 존재한다.'

이 문제를 일반화하여 서로 아는 x 명 또는 서로 모르는 x 명이 항상 존재하기 위한 최소의 인원 수를 n 이라 하면 $R(x)=n$ 으로 나타낸다. (서로 아는 x 명 또는 서로 모르는 y 명일 경우 $R(x,y)=n$ 으로 나타낸다.)

이를 램지 수(Ramsey Number) 라 한다. 위의 문제로부터 $R(3)=6$ 임을 알 수 있다. 하지만 램지 수를 구하는 것은 쉬운 일이 아니다. $R(4)=18$ 이라는 것은 알아냈지만 $R(5)$, $R(6)$ 은 겨우 그 값이 존재하는 범위만을 알고 있다. 이 값들을 구하려는 과정에서 다양한 결과들이 도출되었고, 이는 엄청난 범위로 확장되어 새로운 이론이 만들어지게 되고 이를 램지 이론(Ramsey Theory)이라 한다.

예시답안

풀어보기

문제 1

같은 종류의 사탕 5 개를 3 명의 아이에게 1 개 이상씩 나누어 주는 경우의 수는

$$x+y+z=2 \text{ (단, } x, y, z \text{ 는 음이 아닌 정수)}$$

의 해의 개수와 같다.

이 해의 개수는 서로 다른 3 개의 문자 x , y , z 에서 중복을 허락하여 2 개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$_3\mathrm{H}_2 = {}_{3+2-1}\mathrm{C}_2 = {}_4\mathrm{C}_2 = \frac{4\times3}{2\times1} = 6$$

이 경우의 수를 순서쌍 (x, y, z) 로 나타내면

$$(1, 1, 3),\ (1, 3, 1),\ (3, 1, 1),\ (1, 2, 2),\ (2, 1, 2),\ (2, 2, 1)$$

각 경우에서 1 개의 사탕을 받은 아이에게만 초콜릿 5 개를 1 개 이상씩 나누어 주는 경우의 수는

(i) $(1, 1, 3)$, $(1, 3, 1)$, $(3, 1, 1)$ 의 경우에 각각 $a+b=3$ (단, a , b 는 음이 아닌 정수) 의 해의 개수와 같고, 이는 서로 다른 2 개의 문자 a , b 에서 중복을 허락하여 3 개를 택하는 중복

* 유희찬 외 12명, 적분과 통계 교사용지도서, 2010

조합의 수와 같으므로

$$ {}_2\mathrm{H}_3 = {}_{2+3-1}\mathrm{C}_3 = {}_4\mathrm{C}_3 = 4 $$

(ⅱ) $(1, 2, 2)$, $(2, 1, 2)$, $(2, 2, 1)$의 경우는 각각 1 가지씩이다.
따라서 구하는 경우의 수는 $4+4+4+1+1+1=15$이다.

문제 2

3 일 동안 상담하는 학생 수는 모두 9 명이므로 $a+b+c=9$이다. 이때, 각 요일별로 적어도 한 명의 학생과 상담해야하므로 $a=a'+1$, $b=b'+1$, $c=c'+1$이라 하면

$$ a'+b'+c'=6 \text{ (단, } a', b', c' \text{ 은 음이 아닌 정수)} $$

따라서 작성할 수 있는 상담 계획표의 가짓수는 서로 다른 3 개에서 중복을 허락하여 6 개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$ {}_3\mathrm{H}_6 = {}_{3+6-1}\mathrm{C}_6 = {}_8\mathrm{C}_6 = 28 \text{ (가지)} $$

문제 3

색칠된 부분의 넓이는

$$ S = 2\left(\frac{1}{2}\times 8\times 8 - \int_1^8 \log_2 x\,dx\right) = 64 - 2\left\{[x\log_2 x]_1^8 - \int_1^8 \frac{1}{\ln 2}dx\right\} = 16 + \frac{14}{\ln 2} $$

문제 4

곡선 $y=\dfrac{2n}{x}$ 과 직선 $y=-\dfrac{x}{n}+3$ 의 교점이 $\mathrm{A}_n(n, 2)$, $\mathrm{B}_n(2n, 1)$

이고, $n \le x \le 2n$ 에서 $\dfrac{2n}{x} \le -\dfrac{x}{n}+3$ 이므로

$$ S_n = \int_n^{2n}\left\{\left(-\frac{x}{n}+3\right)-\frac{2n}{x}\right\}dx = \left[-\frac{1}{2n}x^2+3x-2n\ln|x|\right]_n^{2n} $$

$$ = (-2n+6n-2n\ln 2n) - \left(-\frac{1}{2}n+3n-2n\ln n\right) = n\left(\frac{3}{2}-2\ln 2\right) $$

$$ \therefore\ S_{n+1}-S_n = \frac{3}{2}-2\ln 2 $$

논제 I -1

$n=1$ 인 경우 $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$
$n=2$ 인 경우 $(2,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,2)$, $(1,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,1)$
그러므로 $a_1=3$, $a_2=6$ 이다.

논제 Ⅰ-2

$z=z'+1$ (z' 은 음이 아닌 정수)라 두면 방정식 $x+y+z=n$ 은 $x+y+z'=n-1$ (x , y ,z' 은 음이 아닌 정수)로 바꿀수 있다. 이는 제시문 [라]에 의해 a_{n-1} 과 같다.

$a_n={}_3\mathrm{H}_n={}_{2+n}\mathrm{C}_n$ 이므로 $a_n=\dfrac{(n+2)!}{n!\,2!}$, $a_{n-1}=\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!\,2!}$ 이다.

$$\begin{aligned} a_{n-1}+n+1 &= \frac{(n+1)!}{(n-1)!\,2!}+n+1=\frac{(n+2)!n}{n!\,2!(n+2)}+\frac{n!\,2!(n+2)(n+1)}{n!\,2!(n+2)} \\ &= \frac{(n+2)!\,(n+2)}{n!\,2!\,(n+2)}=\frac{(n+2)!}{n!\,2!}=a_n \end{aligned}$$

이다. 그러므로 $a_n=a_{n-1}+n+1$ 이 성립한다.

다른 풀이

a_{n-1} 이 z 의 값이 1 이상 일 때의 음이 아닌 정수해의 순서쌍의 개수이므로 $z=0$ 인 경우의 음이 아닌 정수해의 순서쌍의 개수를 더해주면 a_n 이 된다. 즉, $x+y=n$ 인 음이 아닌 정수해의 순서쌍 (x,y) 의 개수는 ${}_2\mathrm{H}_n={}_{2+n-1}\mathrm{C}_n=n+1$ 이다.
따라서 $a_n=a_{n-1}+n+1$ 이 성립한다.

논제 Ⅰ-3

제시문 [다]에 의해 $(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n$ 이다. $x=1$ 을 대입하면
$2^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n$ 이고, 우변의 항은 $n+1$ 개다.
$n=1$ 일 때, $2^1=1+1$ 이므로 등호가 성립한다.
n 이 2 이상의 자연수일 때 ${}_n\mathrm{C}_i$ $(1\le i\le n-1)$의 값은 항상 1 보다 큰 값을 가지므로

$$2^n>n+1$$

을 만족한다. 그러므로 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $2^n\ge n+1$ 이 성립한다.

논제 Ⅰ-4

$n=1$ 일 때 (좌변) $a_1=3$, (우변) $2^{1+1}=4$ 이므로 성립한다.
$n=k$ 일 때 $a_k\le 2^{k+1}$ 이 성립한다고 하자.

$$a_{k+1}=a_k+k+2\le 2^{k+1}+k+2\le 2^{k+1}+2^{k+1}=2^{k+2}$$

이므로 a_n 은 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $a_n\le 2^{n+1}$ 을 만족한다.

논제 Ⅱ-1

직선 AP_a 의 식은 $y=\dfrac{a^2}{a-1}(x-1)$ 이고, 곡선 C는 $y=x^2$ 이므로 두 도형의 교점의 x 좌표는

$x^2=\dfrac{a^2}{a-1}x-\dfrac{a^2}{a-1}$ 의 해와 같다.

$$x^2-\frac{a^2}{a-1}x+\frac{a^2}{a-1}=(x-a)\left(x-\frac{a}{a-1}\right)=0$$

$a>2$ 일 때 $a>\dfrac{a}{a-1}$ 이므로 두 점에서 만나며, $Q_a=\dfrac{a}{a-1}$ 이다.

논제 Ⅱ-2

직선 OP_a 의 식은 $y=ax$ 이므로

$$S_1(a)=\int_0^a(ax-x^2)dx=\frac{a^3}{6}$$

이다.

논제 Ⅱ-3

직선 $\mathrm{P}_a\mathrm{Q}_a$ 의 식이 $y=\dfrac{a^2}{a-1}x-\dfrac{a^2}{a-1}$ 이므로

$$S_2(a)=\int_{\frac{a}{a-1}}^{a}\left(\frac{a^2}{a-1}x-\frac{a^2}{a-1}-x^2\right)dx=\frac{1}{6}\left(a-\frac{a}{a-1}\right)^3=\left(\frac{a}{a-1}\right)^3\frac{(a-2)^3}{6}$$

이다. 따라서 $g(a)=\dfrac{1}{6}(a-2)^3$ 이다.

논제 Ⅱ-4

[논제Ⅱ-2]와 [논제Ⅱ-3]에서 $S_1(a)=\dfrac{a^3}{6}$, $S_2(a)=\left(\dfrac{a}{a-1}\right)^3\dfrac{(a-2)^3}{6}$ 이므로

$$\lim_{a\to\infty}\frac{S_2(a)}{S_1(a)}=\lim_{a\to\infty}\frac{\left(\frac{a}{a-1}\right)^3\frac{(a-2)^3}{6}}{\frac{a^3}{6}}=1$$

이다.

26 숙명여자대학교 수시 2차

제시문 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

[가]

S씨는 10 여 년 전 몸에 이상을 느껴 병원을 찾아갔다. 당시 의사는 증상을 듣고 암이 의심된다며 새로 개발된 암 진단검사를 제안하였다. 이 검사의 경우 암에 걸렸을 때 양성반응이 나올 가능성은 90% 이고 정상일 때(암에 걸리지 않았을 때) 양성반응이 나올 가능성은 10% 라고 한다. 검사 결과, 양성으로 판정되었고 이에 S씨는 충격을 받았지만, 의사는 “S씨 연령의 여성이 암에 걸릴 가능성은 1% 이고 검사 정확도가 90% 이므로 설령 검사에서 양성으로 나왔더라도 진짜 암에 걸렸을 확률은 8% 정도밖에 안 되니 너무 걱정하지 말고 추가 정밀검사를 해봅시다.”라고 했다. 여러 검사를 한 결과 다행히 암이 아닌 것으로 판정됐다.

S씨의 사례에서 중요한 것은 ‘양성반응이 나왔을 때 암일 확률’이며, 이 확률은 ‘$\mathrm{P}(\text{암}\,|\,\text{양성})$’으로 표시한다. 양성반응이 나올 확률을 $P(\text{양성})$, 암일 확률을 $P(\text{암})$이라 할 때,

$$\mathrm{P}(\text{암}\,|\,\text{양성}) = \frac{\mathrm{P}(\text{암} \cap \text{양성})}{\mathrm{P}(\text{양성})}$$

이 된다. 여기에서 $\mathrm{P}(\text{암} \cap \text{양성})$은 암이면서 양성반응이 나올 확률이다. 위의 식을 이용하면,

$$\mathrm{P}(\text{양성})\mathrm{P}(\text{암}|\text{양성}) = \mathrm{P}(\text{암} \cap \text{양성}) = \mathrm{P}(\text{양성} \cap \text{암}) = \mathrm{P}(\text{암})\mathrm{P}(\text{양성}|\text{암})$$

인 것을 알 수 있으며, 이는 아래의 식으로 변형될 수 있다.

$$\mathrm{P}(\text{암}|\text{양성}) = \frac{\mathrm{P}(\text{암})\mathrm{P}(\text{양성}|\text{암})}{\mathrm{P}(\text{양성})}$$

여기서 $\mathrm{P}(\text{양성}|\text{암})$은 ‘암일 때 양성반응이 나올 확률’로 검사의 정확도인 90% 이다. 결국 S씨가 검사결과에 충격을 받은 건 $\mathrm{P}(\text{양성}|\text{암})$과 $\mathrm{P}(\text{암}|\text{양성})$을 동일시했기 때문이다. 한편 $\mathrm{P}(\text{암})$은 암일 확률이므로 0.01 이다. 암이면서 양성반응이 나올 수 있고, 정상이면서 양성반응이 나올 수 있으므로, 양성반응이 나올 확률은 10.8% , 즉 0.108이 된다. 따라서

$$\mathrm{P}(\text{암}|\text{양성}) = \frac{0.01 \times 0.9}{0.108} \simeq 0.083$$

이다. 즉 검사에서 양성반응이 나왔을 때 암일 확률은 약 8.3% 가 된다.

[나]

우리는 다양한 문제 상황에서 여러 결정을 하면서 삶을 영위한다. 이때 이러한 결정은 합리적일수록 바람직한 결과에 도달할 가능성이 크다. 그렇다면 합리적인 결정의 기준이란 무엇인가? 그 기준은 결정을 내려야 할 때의 일반적인 맥락이 어떠하냐에 따라 다르다. 첫째, 조건에 따른 각

행위의 결과에 대해 확률에 관한 정보를 알고 있는 맥락이 가능한데, 이러한 맥락에서의 결정을 '위험 하의 결정'이라고 부른다. 이 맥락에서는 우리의 지식은 불완전하거나 부분적이다. 둘째, 각 행위가 어떤 결과를 가져올지 정확히 알 수 있는 맥락이 가능한데, 이러한 결정을 '확실성 하의 결정'이라고 부른다. 이 맥락에서는 우리의 지식은 객관적인 확실성을 가진다. 셋째, 각 행위의 가능한 결과에 대해 확률에 관한 정보가 없는 맥락에서의 결정을 '불확실성 하의 결정'이라고 부른다.

합리적인 결정을 하기 위해서는 그 결정이 이루어지는 맥락이나 상황이 어떤 것인지를 먼저 판단해야 한다. 어떤 행위를 했을 때 그 결과는 행위자에게 바람직할 수도 있고 그렇지 않을 수도 있다. 이러한 바람직함의 정도를 효용이라고 부른다. 또한 행위의 기대 효용(기댓값)은 각각의 가능한 결과가 가지는 확률에 그것의 효용을 곱하여 더한 값이다. 일반적으로 위험 하의 결정에서는 "기대 효용을 최대화하는 행위를 선택하라."는 규칙을 따를 때 합리적이다. 반면에 확실성 하에서의 결정에서는 관련 행위 결과의 확률이 1 이기 때문에, "가장 효용이 높은 행위를 선택하라."는 규칙을 따를 때 합리적이다. 불확실성 하에서의 결정에서는 상황에 따라 합리적 결정의 방법은 다양할 수 있다.

[다]

인류는 지구와 유사한 환경을 가진 'V 행성'으로 이주하는 대형 프로젝트를 구상하고 있다. 최초로 선발된 이주희망자 20 명은 다음 <조건>을 인지하고 이 프로젝트에 지원하였다. 이 프로젝트의 최종 목적은 이주희망자들을 가능한 한 많이 V 행성에 정착시키는 것이다.

<조 건>

1. 이주희망자들은 일단 V 행성으로 이주하면 지구로 돌아올 수 없다.
   이주를 위한 우주왕복선은 한 대이고, 1 회 운항에 최대 20 명의 이주희망자(우주비행사 제외)와 $50\,m^2$ 크기의 거주공간 구축에 필요한 자재를 동시에 실어 나를 수 있다(단, 자재만 운송할 수도 있다).
2. 우주왕복선은 V 행성까지 왕복 1 년의 시간이 걸리며, 최대 4회까지 운항 가능하다.
3. 이주희망자들은 동일한 생존 능력을 지니고 있다.
4. V 행성에서는 생존을 위해 1 인당 최소 $10\,m^2$ 의 거주공간이 필요하다.
5. 각각의 운항 시 이주희망자들의 정착 성공확률은 90% 이다.

* 위에 제시한 조건 이외의 것은 고려하지 않는다.

논제 2-1.a

최근 S씨는 비슷한 증상이 있어 이번에도 예전 병원의 그 의사를 찾아갔다. 의사의 말에 의하면, S씨 연령의 여성이 암에 걸릴 확률은 2% 이고, 지난 10 년 사이 진단기술의 발달로, 암에 걸렸을 때 양성반응이 나올 확률은 98% 이다. 이 검사에서 양성반응이 나왔을 때 암일 확률이 40% 이상이라고 한다면 정상일 때 양성반응이 나올 확률의 최댓값이 얼마인지를 논리적으로 유도하시오.

논제 2-1.b

현재 S씨와 동일한 연령의 여성이 암에 걸릴 확률은 2% 이다. S씨보다 나이가 한 살 증가할 때마다 암에 걸릴 확률이 0.2% 씩 증가한다고 가정하자. 만약 진단검사에서 암일 때 양성반응이 나올 확률이 99% , 정상일 때 양성반응이 나올 확률은 0.99% 라고 한다면, 검사결과가 양성반응이 나왔을 때 암일 확률이 80/99 보다 크게 되는 최소 연령은 현재 S씨 연령보다 얼마나 많은지(단위: 년)를 논리적으로 유도하시오(단, 최종 답은 정수로 쓰시오).

논제 2-2

[나]에서 설명하고 있는 세 가지 의사결정 방법을 바탕으로 [가]를 참고하여 [다]에서 이주희망자 20 명이 모두 성공적으로 정착할 수 있는 가능성이 가장 큰 이주 계획을 합리적으로 결정하는 방법을 논술하시오. (700±70자)

논술유형분석

문항 수	3문항	시간	120분
연관 개념	조건부확률, 베이즈의 정리, 최적화이론		

제시문분석

제시문[가]

암의 발생가능성과 그에 따른 진단결과의 확률을 예시로 활용하여 조건부 확률의 문제를 다루고 있다.

제시문[나]

다양한 문제 상황에서 이루어지는 의사결정의 세 가지 방법으로서 '위험 하의 결정', '확실성 하의 결정', '불확실성 하의 결정'을 제시하고, 각각의 의사결정 상황 하에서의 합리적인 결정의 기준을 제시하고 있다.

제시문[다]

주어진 '조건'에 따라 합리적인 의사결정을 해야 하는 외계 행성으로의 이주라는 가상적 상황을 다루고 있다.

논제분석

논제 2-1.a

주어진 다른 확률들을 바탕으로 하여, '정상일 때 양성반응이 나올 확률'을 계산하도록 하는 문항이다.

논제 2-1.b

연령이 많아짐에 따라 일정하게 증가하는 암에 걸릴 확률을 전제하고, 검사결과가 '양성반응이 나왔을 때 암일 확률'이 주어진 값이 되는데 걸리는 최소 기간(단위: 년)을 계산하도록 하는 문항이다.

논제 2-2

의사결정의 방법 중 하나를 택하여 답안을 제시하고 합리적 방법의 결정에 대하여 논술할 것을 요구하고 있다.

배경지식쌓기

1. 사건 B가 주어진 경우 A_1과 A_2가 조건부 독립이면

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \mid B) = \mathrm{P}(A_1|B)\mathrm{P}(A_2|B) \text{ **이다.**}$$

증명) B가 주어진 경우 A_1과 A_2가 독립이라고 하면 $\mathrm{P}(A_1|A_2 \cap B) = \mathrm{P}(A_1|B)$ 이다. 따라서

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2|B) = \frac{\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap B)}{\mathrm{P}(A_2 \cap B)} \cdot \frac{\mathrm{P}(A_2 \cap B)}{P(B)}$$

$$= \mathrm{P}(A_1|A_2 \cap B)\mathrm{P}(A_2|B) = \mathrm{P}(A_1|B)\mathrm{P}(A_2|B)$$

2. 확률의 분할법칙

사건 B_1, B_2, B_3가 서로 배반인 전사건 S의 분할일 때 임의의 사건 A에 대하여 $A \cap B_1$, $A \cap B_2$, $A \cap B_3$는 A의 분할이 된다. 즉,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A) &= \mathrm{P}[(A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)\cup(A\cap B_3)] \\ &= \mathrm{P}(A\cap B_1)+\mathrm{P}(A\cap B_2)+\mathrm{P}(A\cup\cap B_3) \\ &= \mathrm{P}(B_1)\mathrm{P}(A|B_1)+\mathrm{P}(B_2)\mathrm{P}(A|B_2)+\mathrm{P}(B_3)\mathrm{P}(A|B_3)\end{aligned}$$

3. 베이즈의 정리-1

어떤 사건 B가 서로 배반하는 k개의 원인 $A_1, A_2, \cdots, A_k$의 어느 하나에 의하여 일어난다고 한다. 실제로 B가 일어났을 때 이것의 원인이 A_i일 확률은

$$\mathrm{P}(A_i|B) = \frac{\mathrm{P}(A_i)\mathrm{P}(B|A_i)}{\mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(B|A_1)+\mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(B|A_2)+\ \cdots\ +\mathrm{P}(A_k)\mathrm{P}(B|A_k)}$$

4. 베이즈의 정리-2 (결과를 두고 원인에 대한 확률 구하기)

사건 B_1, B_2, B_3가 표본 공간 S의 분할일 때,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B_i\,|\,A) &= \frac{\mathrm{P}(B_i\cap A)}{\mathrm{P}(A)} \\ &= \frac{\mathrm{P}(B_i)\mathrm{P}(A\,|\,B_i)}{\mathrm{P}(B_1)\mathrm{P}(A\,|\,B_1)+\mathrm{P}(B_2)\mathrm{P}(A\,|\,B_2)+\mathrm{P}(B_3)\mathrm{P}(A\,|\,B_3)}\end{aligned}$$

풀어보기*

문제 1 사람들을 사고를 당하기 쉬운 사람과 그렇지 않은 사람의 두 부류로 나눌 수 있다고 믿는 보험회사가 있다. 이들이 가진 통계에 의하면 사고를 당하기 쉬운 사람은 일 년 동안 사고를 당할 확률이 0.4인 반면, 그렇지 않은 사람의 경우 그 확률이 0.2로 줄어든다는 것이다. 인구의 30%가 사고를 당하기 쉬운 부류라고 한다면, 신규 보험가입자가 보험 가입 후 일 년 이내에 사고를 당할 확률은 얼마나 될까?

문제 2 범죄 수사의 어느 단계에서 담당 수사관은 어떤 혐의자의 유죄에 대해 60% 확신하고 있다고 하자. 이제 범인의(왼손잡이, 대머리, 갈색 머리 등과 같은) 어떤 신체적 특징에 관한 증거가 추가로 드러났다고 하자. 만일 인구의 20%가 이와 같은 특징을 갖는다면, 혐의자가 그러한 그룹에 속할 경우 이 수사관은 혐의자의 유죄에 대해 얼마나 확신하게 되겠는가?

---

* 이공계용 확률과 통계. Sheldon M.Ross저 이광수 역 홍릉과학출판사

읽기자료

의사 결정 과정

1. 결정게임과 비결정게임

결정게임은 상대방의 전략에 관계 없이 자신의 최선의 전략이 결정되는 게임이다. 결정게임에서 최선의 전략을 찾기 위해서는 주체의 입장을 행으로, 상대를 열로 놓고 수익을 나타내는 행렬을 만든 후 주체는 각 행의 성분들의 최솟값 중 가장 큰 값을 선택하고 상대는 각 열의 성분들의 최댓값 중 가장 작은 값을 선택한다.

비결정게임은 상대방의 전략에 따라 자신의 전략이 달라지는 게임으로 기대 금액을 구하게 된다. 전략을 선택하는 비율을 이용하여 각 전략에 대한 확률을 구하고 각 전략의 확률을 고려하여 각자의 기대금액을 구한다.

2. 여러 가지 선거 방법

① 1 위를 가장 많이 차지한 후보가 당선된다.

② 1 위를 차지한 득표수가 전체 투표수의 과반수를 넘는 후보가 당선된다.

③ 1 위를 가장 적게 차지한 후보를 제외한 후 남은 후보의 표수를 다시 계산하고, 또 여기서 1 위를 가장 적게 차지한 후보를 제외한 후 남은 후보의 표수를 계산한다.

④ 각각의 투표용지에서 1 위를 차지한 후보에게는 4 점, 2 위에게는 3 점, 3 위에게는 2 점, 4위에게는 1 점을 주고 모든 투표용지의 점수를 합했을 때 가장 높은 점수를 받은 후보가 당선된다.

⑤ 두 후보 간에 선호도를 비교하여 우세한 후보에게는 1 점, 열세한 후보에게는 0 점, 비겼을 때에는 두 후보에게 0.5 점을 주고, 각 후보가 얻은 점수의 합을 구하여 그 합이 가장 높은 후보가 당선된다.

3. 케이크 나누기 - 공평한 분배

분배에 참여한 n 명의 사람이 모두 적어도 전체의 $\frac{1}{n}$ 이상을 차지했다고 생각하는 분배를 공평한 분배라고 한다. 세 사람 A, B, C가 다음과 같은 순서로 케이크를 나누어 가지면 공평하게 분배할 수 있다.

① 먼저 A가 케이크를 세 조각으로 나눈다.

② B, C는 각각 세 조각 중 $\frac{1}{3}$ 이상이라고 생각하는 조각을 모두 적는다.

③ B, C가 적은 조각을 보고 서로 다른 조각이 있으면 B, C가 적은 서로 다른 조각을 B, C에게 하나씩 나누어 주고 남은 조각을 A에게 준다. 같은 조각 하나만을 적은 경우에는 나머지 두 조각 중 한 조각을 A가 선택하고, 남은 한 조각과 B, C가 적은 조각을 합쳐서 한 덩이로 만들어 두 사람의 케이크 나누기 방법으로 B, C에게 나누어 준다.

예시답안

풀어보기

문제 1 먼저 보험가입자가 사고를 당하기 쉬운지 여부에 따른 조건을 설정함으로써 구하고자 하는 확률을 계산할 수 있다. 보험가입자가 보험 가입 후 일 년 이내에 사고를 당하는 사상을 A_1 으로 표시하고 보험가입자가 사고를 당하기 쉬운 부류인 사상을 A 로 표시하기로 하자. 이때 구하고자 하는 확률 $P(A_1)$ 은 다음과 같이 주어진다.

$$\mathrm{P}(A_1)=\mathrm{P}(A_1|A)\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A_1|A^c)\mathrm{P}(A^c)=(0.4)(0.3)+(0.2)(0.7)=0.26$$

문제 2 이 혐의자가 유죄인 사상을 G 로 표시하고 이 혐의자가 범인의 특징을 갖는 사상을 C 로 표시하면, 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\mathrm{P}(G|C)=\frac{\mathrm{P}(G\cap C)}{\mathrm{P}(C)}$$

또한 다음과 같은 계산 결과를 얻을 수 있다.

$$\mathrm{P}(G\cap C)=\mathrm{P}(G)\mathrm{P}(C|G)=0.6\times 1=0.6$$

이 혐의자가 범인의 특징을 가질 확률을 계산하기 위해 유죄 여부를 조건으로 이용하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\mathrm{P}(C)=\mathrm{P}(C|G)\mathrm{P}(G)+\mathrm{P}(C|G^c)\mathrm{P}(G^c)=1\times 0.6+0.2\times 0.4=0.68$$

여기에서 이 혐의자가 실제로는 결백함에도 불구하고 범인의 특징을 가질 확률을 0.2 와 같다고 가정하였는데, 이는 그러한 특징을 갖는 인구 비율에 해당한다. 따라서 다음의 계산을 통해 이제 그 수사관은 혐의자의 유죄에 대해 88% 정도 확신하게 될 것임을 알 수 있다.

$$\mathrm{P}(G|C)=\frac{60}{68}=0.882$$

논제 2.1a

제시문 [가]에 의해

$$\mathrm{P}(\text{암})=\frac{2}{100},\ \mathrm{P}(\text{양성}|\text{암})=\frac{98}{100},\ \mathrm{P}(\text{암}|\text{양성})\geq\frac{40}{100},\ \mathrm{P}(\text{암})+\mathrm{P}(\text{정상})=1$$

이다. 구하고자하는 것은 P (양성|정상)이다. 여기서

(1) $\mathrm{P}(\text{양성}|\text{암})=\dfrac{\mathrm{P}(\text{양성}\cap\text{암})}{\mathrm{P}(\text{암})}=\dfrac{98}{100}$ $\therefore \mathrm{P}(\text{양성}\cap\text{암})=\dfrac{196}{10000}$

(2) $P(\text{암}|\text{양성}) = \dfrac{P(\text{암} \cap \text{양성})}{P(\text{양성})} \geq \dfrac{40}{100}$ $\quad \therefore P(\text{양성}) \leq \dfrac{\frac{196}{10000}}{\frac{40}{100}} = \dfrac{49}{1000}$

(3) $P(\text{양성}) = P(\text{양성} \cap \text{암}) + P(\text{양성} \cap \text{정상})$

이고, 이를 이용하면

$$P(\text{양성}|\text{정상}) = \frac{P(\text{양성} \cap \text{정상})}{P(\text{정상})} = \frac{P(\text{양성} \cap \text{정상})}{1-P(\text{암})} = \frac{P(\text{양성}) - P(\text{양성} \cap \text{암})}{1-P(\text{암})}$$

$$\leq \frac{\frac{49}{1000} - \frac{196}{10000}}{\frac{98}{100}} = \frac{3}{100}$$

그러므로 정상일 때 양성반응이 나올 확률의 최댓값은 3% 이다.

논제 2.1b

S씨보다 연령이 k 살 많은 여성이 암에 걸릴 확률을 $P(\text{암}) = \dfrac{2}{100} + \dfrac{2k}{1000} = \dfrac{20+2k}{1000}$ 이라 하고,

S씨보다 연령이 k 살 많은 여성이 정상일 확률은

$$P(\text{정상}) = 1 - P(\text{암}) = 1 - \frac{20-k}{1000}$$

이라 하자.

또한, $P(\text{양성}|\text{암}) = \dfrac{P(\text{양성} \cap \text{암})}{P(\text{암})} = \dfrac{99}{100}$, $P(\text{양성}|\text{정상}) = \dfrac{P(\text{양성} \cap \text{정상})}{P(\text{정상})} = \dfrac{99}{10000}$

$$\therefore P(\text{양성} \cap \text{암}) = \frac{99}{100} \times \frac{20+2k}{1000}, \quad P(\text{양성} \cap \text{정상}) = \frac{99}{10000} \times \left(1 - \frac{20+2k}{1000}\right)$$

$$\therefore P(\text{양성}) = P(\text{양성} \cap \text{암}) + P(\text{양성} \cap \text{정상}) = \frac{99(20+2k)}{10^5} + \frac{99(980-2\mathrm{k})}{10^7}$$

구하고자 하는 것은 $P(\text{암}|\text{양성})$ 이다. 이를 구하면 다음과 같다.

$$P(\text{암}|\text{양성}) = \frac{P(\text{암} \cap \text{양성})}{P(\text{양성})} \geq \frac{80}{99}, \quad \frac{\frac{99(20+2k)}{10^5}}{\frac{99(20+2k)}{10^5} + \frac{99(980-2k)}{10^7}} \geq \frac{80}{99}$$

$$\frac{2000+200k}{2000+200k+980-2k} \geq \frac{80}{99} \qquad \therefore k \geq \frac{1010}{99} \fallingdotseq 10.2$$

그러므로 S씨 연령보다 11 살이 많으면 문제의 조건을 만족하게 된다.

논제 2.2

제시문(나)에 비추어 제시문(다)의 문제 상황을 살펴보자. 제시문(다)에서는 인류가 타 행성으로 이주하는 상황을 가정하였다. 이때, <조건>을 살펴보면 우주왕복선의 수송횟수를 제한하고 1

회 운행 시 최대 수송 가능인원과 물자량을 제한하고 있다. 또한 운항 시 이주희망자들의 정착 성공확률을 제시하였다. 본 논제에서는 제시문(다)에서 제시한 <조건>에 따라 이주하였을 때 이주희망자 전원이 성공적으로 정착할 방안을 묻고 있으며, 이 논제는 제시문(나)에 따르면 조건에 따른 각 행위의 결과에 대해 확률에 관한 정보를 알고 있는 맥락을 따르고 있으므로 '위험 하의 결정'이라 할 수 있다. 또한, '위험 하의 결정'에 따른 행위의 기대 효용(기댓값)을 최대화 하는 것이 본 논제의 목표이다. 이때 기대 효용(기댓값)은 각 개인의 정착 성공확률 × 20 명 이므로 각 개인의 정착 성공확률을 높이는 것이 기대 효용(기댓값)을 최대화 하는 행위가 될 수 있다.

개인의 정착 성공확률을 $\mathrm{P}(D)$ 라고 하자. 제시문(다)의 <조건>에 따라 각각의 운항 시 이주 희망자들의 정착 성공확률은 90% 이다. 그리고 우주왕복선은 매 운항 시에 20 명의 이주 희망자들을 나를 수 있지만, 거주 공간 구축에 필요한 자재는 $50m^2$ 만 실어 나를 수 있으며 정착을 위해서는 1 인당 최소 $10m^2$ 의 거주공간이 필요하다. 즉, 매 운항 시에 20명의 이주 희망자들을 나른다고 하여도 정착을 시도할 수 있는 인원은 5 명으로 제한되어 있음을 알 수 있으며, 거주공간 구축에 필요한 자재를 모두 실어가기 위해서는 우주왕복선은 4 회 모두 운항해야 한다. 이에 따른 이주 희망자들의 운송계획은 다음과 같다. 1 차 운행 시 이주희망자 5 명과 자재$50m^2$ 을 실어 간다. 이때, 1 차 운행시 정착 성공 인원을 m_1, 2 차 운행시 정착 성공 인원을 m_2 , 3 차 운행시 정착 성공 인원을 m_3 이라고 하면 2 차 운행 시에는 $10-m_1$명의 희망자와 자재 $50m^2$ 을 실어 간다. 3 차 운행 시에는 $15-(m_1+m_2)$ 명의 희망자와 자재 $50m^2$ 을 실어가고, 4 차 운행 시에는 $20-(m_1+m_2+m_3)$ 명의 희망자와 자재 $50m^2$ 을 실어간다. 20 명의 희망자들이 모두 정착하기 위한 환경은 조성되었다. 20 명의 희망자들이 모두 정착하기 위한 환경은 조성되었다. 이때 각 개인의 정착 성공확률을 구해보면 1 회 시도에 성공할 확률은 90% , 2 회 시도에 성공할 확률은

$$\mathrm{P}(2\text{차성공}|1\text{차실패})=\frac{\mathrm{P}(1\text{차실패}|2\text{차성공})\mathrm{P}(2\text{차성공})}{\mathrm{P}(1\text{차실패})}$$

다음 식을 통해 2 차 성공을 하기 위해서는 1 차 실패를 해야 하기 때문에 $\mathrm{P}(1\text{차실패}|2\text{차성공})=1$, $\mathrm{P}(2\text{차성공}|1\text{차실패})=0.9$, $\mathrm{P}(1\text{차실패})=0.1$ 이 되어야 하므로 $\mathrm{P}(2\text{차성공})=0.09$ 가 된다.

이와 같은 방법으로 $\mathrm{P}(3\text{차성공})=0.009$, $\mathrm{P}(4\text{차성공})=0.0009$ 이 된다. 처음부터 계속 시도한 사람의 정착성공 확률은

$$\mathrm{P}(\text{성공})=\mathrm{P}(1\text{차성공}\cup2\text{차성공}\cup3\text{차성공}\cup4\text{차성공})$$

$$=\mathrm{P}(1\text{차성공})+\mathrm{P}(2\text{차성공})+\mathrm{P}(3\text{차성공})+\mathrm{P}(4\text{차성공})=0.9999$$

가 된다.

처음 이동한 5 명에 대한 기댓값은 5×0.9999 이고, 두 번째에 처음 이동한 5 명에 대한 기댓값은 5×0.999, 세 번째에 처음 이동한 5 명에 대한 기댓값은 5×0.99, 마지막은 5×0.9 이 되어 이 값들을 모두 더한 것이 기대 효용이 된다.

27 숭실대학교 모의

제시문 1 문제 1-A 다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오.(20점)*

확률변수 X는 다음의 두 가지 형태로 분류될 수 있다. 확률변수 X가 가지는 값이 유한개 또는 자연수와 같이 셀 수 있을 때의 이산확률변수와 확률변수 X가 어떤 구간에 속하는 모든 실숫값을 가질 때의 연속확률변수가 있다. 이산확률변수 X의 확률분포는 확률질량함수에 의해 나타내고, 연속확률변수 X의 확률분포는 확률밀도함수에 의해 나타낸다.

다음은 어떤 겨울 어느 도시에 대한 기상청의 기상예보이다.
(a) 해당 기간은 2013 년 12 월 1 일부터 2014 년 3 월 10 일까지 총 100 일이다.
(b) 이 기간에 눈이 오는 날은 총 30 일로 예상된다.
(c) 눈이 오는 날의 1 월 적설량을 확률변수 X라 할 때, X의 분포를 나타내는 확률밀도함수 $f(x)$ 는 다음과 같다.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x<0, x>\frac{4}{3} \\ x^{\frac{1}{5}} & , 0 \le x \le 1 \\ -3x+4 & , 1<x\le \frac{4}{3} \end{cases} \quad (x \text{ 의 단위 : 10 인치})$$

논제 1-A

(1) 당신은 작업용 스노우 부츠를 생산하는 회사의 기획부에 근무한다. 부츠의 높이를 1일 적설량의 최댓값($4/3\times 10$ 인치)에 맞추는 것은 경제적이라 할 수 없다. 따라서 회사의 방침은 "부츠의 높이가 1 일 적설량보다 높을 확률이 90% 인 부츠"를 생산하는 것이다. 이 방침에 따라, 부츠의 높이를 계산하시오.

(2) 이 도시에서는 제설작업을 위하여 적설량 10 인치 당 2 톤의 염화칼슘이 필요하다. 이 도시에서 이번 겨울 제설 작업에 필요한 염화칼슘의 기댓값을 구하시오.

* 숭실대학교 입학처

제시문 2 **문제 1-B 다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오.(30점)**

크게 펼쳐진 천 위의 한 지점에는 염색제를, 다른 한 지점에는 표백제를 동시에 떨어뜨리고 그에 따른 염색의 진행상태를 관찰한 결과, 다음과 같은 사실을 알게 되었다.

(a) 천 위에서 염색제와 표백제는 둘 다 $1\,cm/s$ 의 일정한 속력으로 모든 방향으로 퍼진다.
(b) 염색제가 천의 한 지점 P 에 도달한 후
- 5 초 이내에 표백제가 P 에 도달하면 염색제가 제거된다.
- 5 초를 경과한 후에 표백제가 P 에 도달하면 염색제가 고착되어 염색이 유지된다.

(c) 천 위의 한 지점 P 에 표백제가 염색제보다 먼저 도달하면 그 지점은 염색되지 않는다.

펼쳐진 천이 센티미터(cm) 단위의 좌표평면 전체라고 생각하고 염색제와 표백제는 평면 전체로 확산된다고 가정할 때 다음 물음에 답하시오.

논제 1-B

(1) 지점 $\mathrm{A}(-4, 0)$ 에는 염색제를, 지점 $\mathrm{B}(4, 0)$ 에는 표백제를 동시에 떨어뜨리는 실험을 할 때, 지점 $\mathrm{P}(-4, 6)$ 이 염색이 될지 또는 되지 않을지 논하시오.

(2) 문제 (1)의 실험에서 염색이 될 지점들의 영역을 구하고, 그 영역을 개략적으로 그리시오.

(3) 지점 $\mathrm{A}(-4, 0)$ 과 지점 $\mathrm{C}(12, 0)$ 에는 염색제를, 지점 $\mathrm{B}(4, 0)$ 에는 표백제를 동시에 떨어뜨리는 실험을 한다. 이때 염색이 될 지점들의 영역을 문제 (2)의 결과에서부터 유추하여 구하고, 그 영역을 개략적으로 그리시오.

제시문 3 **문제 2-A 다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오.(20점)**

최근 화성에 착륙한 미국 NASA의 우주탐사로봇 Curiosity는 ChemCam이라는 분광계를 이용하여 화성 암석의 표면 성분을 분석하고 있다. 이 분광계는 암석 표면에 강력한 레이저 광선을 쏘아 구성 암석의 원소가 내보내는 빛의 스펙트럼을 분석하는 장치이다. 이 장치는 최대 7 미터 떨어진 암석을 분석할 수 있도록 설계되었다. 이러한 예에서 알 수 있는 것처럼 레이저의 과학적 이용에는 레이저의 출력세기 외에도 레이저 광선의 퍼짐현상, 초점심도 등을 조절하는 것이 필요하다.

논제 2-A

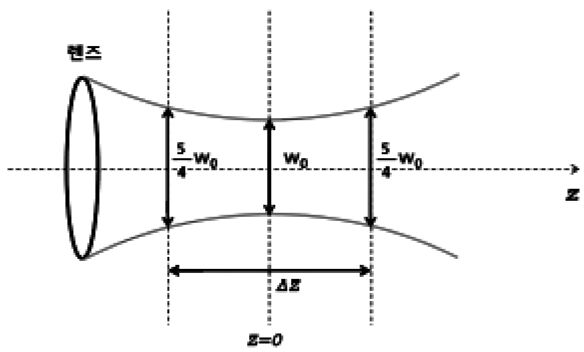
(1) 레이저 광선의 퍼짐은 레이저 광선 단면의 반지름 w 를 써서 기술할 수 있다. 레이저 광선이 진행하는 방향으로 좌표축 z 를 잡고 레이저 광선이 발사되는 위치를 $z=0$ 이라 하자.

w는 z가 증가함에 따라 다음 관계식에 의해 점점 증가하게 된다.

$$w(z) = w_0 \left[1 + \left(\frac{\lambda d}{\pi w_0^2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

이 식에서 w_0는 $z=0$에서의 광선 단면의 반지름, λ는 레이저 광선의 파장이다. 분광계로부터 d만큼 떨어진 암석 표면에 입사되는 광선 단면적이 최소가 되도록 w_0를 조절하고자 한다. 이 때 암석표면에 입사되는 광선의 단면적을 구하시오.

(2) 분광기에 렌즈를 삽입하면 레이저 광선을 더 멀리 보낼 수 있다. 렌즈를 이용하여 단면 반지름을 w_0의 크기로 모아주는 경우에도 위의 관계식이 적용된다. 이 때, 광선이 w_0의 크기로 모아진 지점의 위치를 $z=0$으로 잡는다(아래 그림 참조). 광선의 단면 반지름이 w_0의 5/4인 위치간의 거리를 초점심도 Δz로 정의하자. 초점심도 Δz를 구하시오.

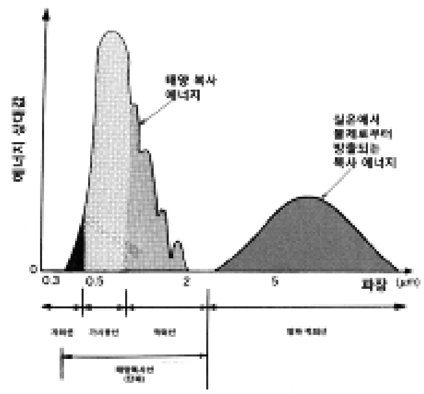


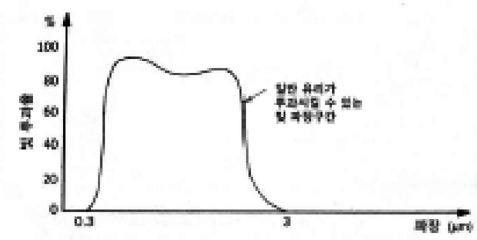
제시문 4 **문제 2-B 다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오.(30점)**

지구에 대기가 존재하지 않으면 태양에서 받는 빛에너지를 그대로 다시 방출할 것이다. 이러한 이론에 따라 계산해 보면 지구 표면의 온도는 약 $-20^\circ C$까지 떨어지게 된다. 현재 지구의 평균기온은 약 $15^\circ C$이기 때문에 $30^\circ C$가 넘는 차이가 나는데, 이 차이가 바로 온실효과 때문에 생긴다. 핵융합 반응에 의해 고온을 유지하고 있는 태양은 태양복사에너지를 지구로 방출한다. 하지만 지구는 모든 태양복사에너지를 흡수하지 않고, 일부를 대기권에서 우주를 향하여 반사시키고, 나머지는 대기권이 지표면에서 반사 된 지구복사에너지를 흡수 후 주위에 재방출하여 복사평형을 유지한다. 위를 향한 재복사는 우주로 달아나지만, 아래를 향하는 재복사는 다시 지표면을 데운다. 이때 대기 중에 있는 여러 가지 온실기체는 지구가 방출하는 긴 파장의 빛을 흡수하여 그 에너지를 대기 중에 묶어 두게 된다. 이렇게 대기 중에 들어온 에너지는 기체 분자의 운동량을 증가시켜 대기의 온도가 상승한다. 즉, 현재의 온난화 현상이 있기 이전에도 온실효과는 지구의 대기와 함께 항상 있어 왔던 현상인 것이다. 여기에는 H_2O (수증기), CO_2, CH_4와 같은 온실기체가 관여하고 있으며 특히 CO_2가 가장 큰 작용을 한다. 지구온난화가 일어나는 것은 대기 중에 붙잡혀 있는 에너지의 양 자체가 증가한데 그 이유가 있다.

논제 2-B

(1) 햇볕이 내리쬐는 동안 외벽이 유리인 건물의 내부 온도가 외부에 비해서 높아지는 이유를 위 제시문과 아래의 두 그래프들을 참고하여 설명하시오.





(2) 지구 온난화 방지 및 화석에너지 소비 감소를 위하여 정남향으로 배치된 서울지역 어떤 건축물 옥상에 태양광 전지판을 설치하고자 한다. 태양광 전지판의 발전효율이 가장 높을 때는 정남향으로 설치될 때이고, 서울 지역에서 태양은 지면으로부터의 각도가 평균 $55^{\circ}C$ 에 위치한다. 이 건물의 옥상에 아래의 조건을 만족하도록 설치할 수 있는 태양광 전지판의 최대 개수를 구하시오.

$$[\sin 35^{\circ}=0.57,\ \cos 35^{\circ}=0.82,\ \tan 35^{\circ}=0.70]$$

[조건]
- 건축물 옥상은 가로, 세로 각각 $30m$ 인 정사각형 모양이다.
- 태양광 전지판 한 장의 크기는 가로, 세로 각각 $1.0m$ 이다.
- 태양광 전지판의 설치각도는 지면으로부터 $35^{\circ}C$ 로 한다.
- 서울지역에서 태양이 정남향에 지면으로부터 각도가 $55^{\circ}C$ 인 위치에 있을 때를 기준으로,
  - 태양광 전지판의 그림자가 다른 전지판을 가리지 않도록 설치한다.
  - 태양광 전지판의 그림자가 옥상면을 벗어나지 않도록 설치한다.
- 태양광 전지판의 설치 최대 개수 계산 시 태양광 전지판의 두께는 무시한다.
- 태양광 전지판의 설치 또는 수리에 필요한 사람의 이동 공간 확보는 고려하지 않는다.

(3) 만약 태양이 정남향에 지면으로부터의 각도가 $85^{\circ}C$ 인 위치에 있을 때 (2)번에서 설치한 전지판에 입사하는 태양광 에너지의 양은 (2)번의 경우, 즉 그 태양의 각도가 $55^{\circ}C$ 인 경우에 비해 어떤 값일지 계산하시오. 단, 태양의 지면으로부터의 각도를 제외한 모든 조건은 동일하다. 그리고 단위 시간당 전지판에 입사하는 태양광 에너지의 양은 태양 광선이 전지판에 비추어질 때 태양 광선에 수직이 되는 가상의 평면에 생기는 그림자의 면적에 비례한다.

논술유형분석

문항 수	수학 4문항	시간	120분
연관 개념	연속확률변수, 확률변수의 기댓값, 이차곡선-쌍곡선, 함수의 최댓값·최솟값, 삼각함수		

제시문분석

제시문[1]

함수에 대한 수학적 기본 개념을 이해하고, 이를 적분 및 연속확률분포 모형에서의 확률과 기댓값 계산에 연결하는 창의적 학습능력, 그리고 기하학적인 현상을 분석하는 논리적 사고능력을 평가하는데 목적이 있다.

제시문[2]

빛과 에너지에 관한 현상을 담고 있는 제시문을 통하여 과학적 현상을 이해하고 분석하는 능력을 평가하는 문제이다. 특히 주어진 과학적 현상에 대한 수리적 모형을 세우고, 논리적인 추론을 통하여 문제를 해결하는 통합적 사고 능력을 평가하는데 그 목적이 있다.

논제분석

논제 1-A

연속확률변수의 뜻을 알고 기댓값을 구할 수 있는지를 묻는 문항이다.

논제 1-B

쌍곡선의 그래프 개형과 부등식의 영역이 무엇을 의미하는지를 묻고 있다.

논제 2-A

주어진 조건을 만족하는 함수의 최솟값을 구할 수 있는지를 묻는 문항이다. 또한 주어진 조건을 만족하는 초점심도를 구하는 문항이다.

논제 2-B

입사각의 의미를 이해하고 삼각함수를 활용할 수 있는지를 묻는 문항이다.

배경지식쌓기

1. 연속확률변수의 평균, 분산, 표준편차

연속확률변수 X가 취할 수 있는 값의 범위가 $\alpha \le X \le \beta$ 이고 확률밀도함수 $f(x)$ 일 때, X의 평균 $\mathrm{E}(X)$, 분산 $\mathrm{V}(X)$, 표준편차 $\sigma(X)$ 는 다음과 같다.

(1) 평균 : $\mathrm{E}(X) = m = \int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx$

(2) 분산 : $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}((X-m)^2) = \int_{\alpha}^{\beta}(x-m)^2 f(x)dx$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} x^2 f(x)dx - m^2 = \mathrm{E}(X^2) - \{\mathrm{E}(X)\}^2$$

(3) 표준편차 : $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)} = \sqrt{\int_{\alpha}^{\beta}(x-m)^2 f(x)dx}$

2. 연속확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차

연속확률변수 $aX+b$ (a, b는 임의의 상수)의 평균 $\mathrm{E}(aX+b)$, 분산 $\mathrm{V}(aX+b)$, 표준편차 $\sigma(aX+b)$ 는 다음과 같다.

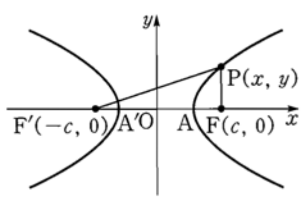
(1) $\mathrm{E}(aX+b) = a\mathrm{E}(X) + b$

(2) $\mathrm{V}(aX+b) = a^2\mathrm{V}(X)$

(3) $\sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$

3. 쌍곡선의 방정식

(1) 다음 그림과 같이 두 초점 $\mathrm{F}(c,0)$, $\mathrm{F}'(-c,0)$ 에서 거리의 차가 $2a(c > a > 0)$ 인 점 P 의 좌표를 (x, y) 라 하면 쌍곡선의 정의에 따라 $|\overline{\mathrm{PF}} - \overline{\mathrm{PF}'}| = 2a$ (일정)



$$\overline{\mathrm{PF}} - \overline{\mathrm{PF}'} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = \sqrt{(x+c)^2+y^2} \pm 2a$$

양변을 제곱하여 정리하면 $-a^2 - cx = \pm a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

다시 양변을 제곱하여 정리하면 $(c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)$

$c > a > 0$ 이므로 $c^2 = a^2 - b^2\,(b>0)$ 으로 놓으면 $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

양변을 a^2b^2 으로 나누면 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (단, $a^2 + b^2 = c^2$)

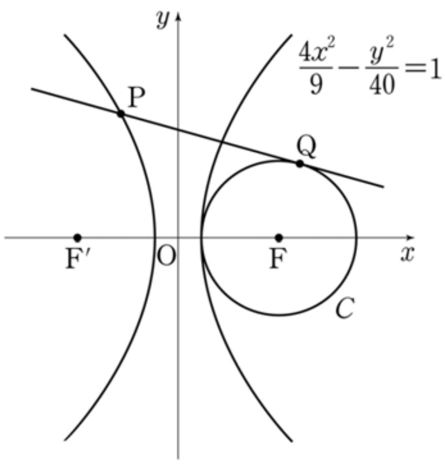
(2) 마찬가지로 y축 위에 두 초점 $F(0, c)$, $F'(0, -c)$를 잡고, 점 F와 F′의 거리의 차가 $2b(c>b>0)$인 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 (1)과 같은 방법으로 다음과 같은 쌍곡선의 방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \text{ (단, } a^2+b^2=c^2\text{)}$$

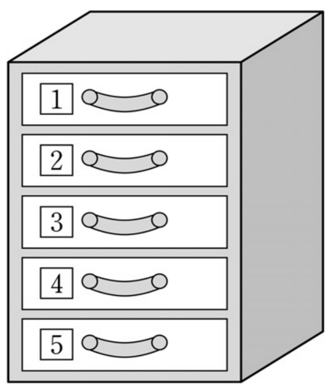
풀어보기

문제 1 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{4x^2}{9}-\frac{y^2}{40}=1$의 두 초점은 F, F′이고, 점 F를 중심으로 하는 원 C는 쌍곡선과 한 점에서 만난다. 제 2 사분면에 있는 쌍곡선 위의 점 P에서 원 C에 접선을 그었을 때 접점을 Q라 하자. $\overline{PQ}=12$일 때, 선분 PF′의 길이는? (2013년 6월 평가원)

① 10 ② $\frac{21}{2}$ ③ 11 ④ $\frac{23}{2}$ ⑤ 12



문제 2 1부터 5까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 5개의 서랍이 있다. 5개의 서랍 중 영희에게 임의로 2개를 배정해 주려고 한다. 영희에게 배정되는 서랍에 적혀 있는 자연수 중 작은 수를 확률변수 X라 할 때, $E(10X)$의 값을 구하시오. (2013년 대수능)



문제 3 닫힌 구간 $[0, a]$ 에서 정의된 확률변수 X 의 확률밀도함수가 연속이다. 확률변수 X 가 다음 조건을 만족시킬 때, 상수 k 의 값은? (2013년 대수능)

(가) $0 \le x \le a$ 인 모든 x 에 대하여 $\mathrm{P}(0 \le X \le x) = kx^2$ 이다. (나) $\mathrm{E}(X) = 1$

① $\frac{9}{16}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{9}$ ⑤ $\frac{1}{16}$

읽기자료

이차곡선 - 쌍곡선

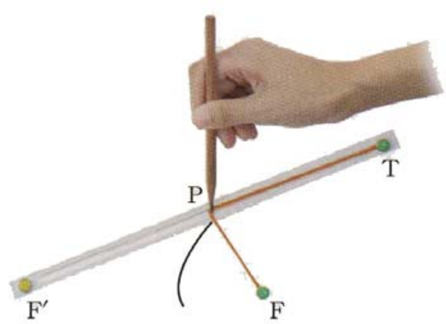
제2차 세계 대전 중 미국 해군은 쌍곡선 항법 장치를 개발하여 선박 또는 항공기의 위치를 파악하고 항로를 결정하는 데 이용하였다. 이 쌍곡선 항법은 두 점에서의 거리의 차가 일정한 점의 자취는 쌍곡선이 된다는 원리를 이용한 것으로 이 원리는 현재 휴대 전화를 이용한 위치 추적에도 활용되고 있다. 쌍곡선은 그 모양이 한 쌍의 곡선으로 이루어져 있기 때문에 이렇게 이름 붙여졌다. 고등학교 교육과정에서는 쌍곡선의 뜻을 알아보고 쌍곡선의 방정식을 구해본다. 그리고 쌍곡선과 직선의 위치관계, 쌍곡선의 접선의 방정식 등에 대해서도 공부한다.

1. 쌍곡선의 소개

여러 교과서에서 '생각열기' 또는 '탐구활동' 등을 통해 다음과 같은 다양한 방법으로 쌍곡선을 도입하고 있다.

1) 실과 자를 이용한 쌍곡선 도입

그림과 같이 길이가 20cm 떨어진 두 점 F, F′ 을 고정하고, 길이가 30cm 인 막대의 한 끝을 점 F′ 에 고정시켜 막대가 회전할 수 있도록 한다. 길이가 22cm 인 실을 한 끝은 막대의 끝점 T 에, 다른 한 끝은 점 F 에 고정한다. 연필 끝으로 실을 막대에 붙이고 실을 팽팽하게 당기면서 막대를 회전시켜 연필을 움직여 보자.*



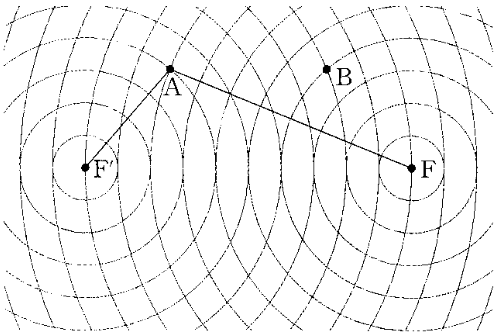
① 연필의 끝점 P 의 자취를 그려보자.

② ①에서 그린 도형은 어떤 모양인지 말하여 보자.

③ 점 P 의 위치에 관계없이 $\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}$ 의 값이 항상 일정함을 설명하여 보자.

2) 동심원을 이용한 쌍곡선 도입

그림과 같이 중심이 각각 F, F′ 이고 반지름의 길이가 각각 1, 2, 3, ⋯ 인 원들이 있다. 다음 물음에 답하여 보자.**



① 점 A 는 두 점 F, F′ 으로부터의 거리의 차가 4 인 점이다. 점 B 에서 두 점 F, F′ 까지의 거리의 차를 구하여라.

② 두 점 F 와 F′ 으로부터의 거리의 차가 4 인 점들을 그림에 표시하여라.

③ 물음 ②에서 표시한 점들을 매끄러운 곡선으로 연결하여라.

3) 종이접기를 이용한 쌍곡선 도입

[그림1]과 같이 한 점과 그 점을 포함하지 않는 원을 그린 다음, [그림2]와 같이 점이 원 위에 놓이도록 종이를 접었다 편다. 점이 놓이는 원의 위치를 바꾸면서 여러 번 종이를 접었다 펼치기를 반복한다. [그림3]과 같이 접힌 선이 많을수록 더 분명한 쌍곡선의 형태가 만들어진다. 이때, 처음에 찍은 점은 쌍곡선의 한 초점이 되며, 접힌 선들은 쌍곡선의 접선이 된다.***


[그림 1]


[그림 2]


[그림 3]

2. 쌍곡선의 정의

위와 같이 여러 교과서가 쌍곡선의 존재를 다양한 방법으로 소개하고 있으며 그 후 쌍곡선에 대한 정의는 공통적으로 다음과 같이 소개하고 있다.

> 평면 위의 서로 다른 두 점 F, F′ 에서 거리의 차가 일정한 점들의 모임은 곡선이 되는데, 이 곡선을 쌍곡선이라 하고, 두 점 F, F′ 을 쌍곡선의 초점이라고 한다. 또, 쌍곡선의 두 초점 F, F′ 을 잇는 직선이 쌍곡선과 만나는 두 점을 쌍곡선의 꼭짓점이라 하고, 이 두 점을 잇는 선분을 주축, 주축의 중점을 쌍곡선의 중심이라고 한다.

이렇게 쌍곡선의 정의를 제시한 후 좌표평면을 도입하여 다음과 같은 쌍곡선의 방정식을 제시한다.

> 두 초점 $\mathrm{F}(k, 0)$, $\mathrm{F}'(-k, 0)$ 으로부터 거리의 차가 $2a$ $(k>a>0)$ 인 쌍곡선의 방정식은
> $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(b^2=k^2-a^2)$
> 두 초점 $\mathrm{F}(0, k)$, $\mathrm{F}'(0, -k)$ 으로부터 거리의 차가 $2b$ $(k>b>0)$ 인 쌍곡선의 방정식은
> $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ $(a^2=k^2-b^2)$

3. 쌍곡선의 접선의 방정식

대부분의 교과서는 쌍곡선과 직선의 위치관계를 판별식을 이용하여 조사하게 한 후 접선의 방정식을 구하는 방법을 다음과 같이 정리한다.

> 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 에 접하고 기울기가 m 인 접선의 방정식은
> $$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}\ (\text{단, } a^2m^2>b^2)$$
> 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은
> $$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$$

* 황선욱 외 12인. (2009). 기하와 벡터. (주)좋은책 신사고.
** 최용준 외 9인. (2009). 기하와 벡터. (주)천재교육.
*** 황선욱 외 12인. (2009). 기하와 벡터. (주)좋은책 신사고.

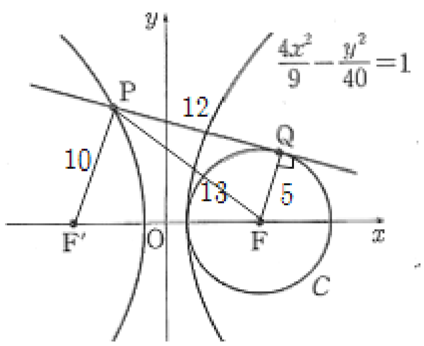
예시답안

풀어보기

문제 1 정답 ①

$\dfrac{x^2}{\frac{9}{4}}-\dfrac{y^2}{40}=1$ 에서 원 C와 쌍곡선의 교점은 $\mathrm{R}\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$ 이다.

$\mathrm{F}(c,\ 0)$ 이라 두면 $c^2=\dfrac{9}{4}+40=\dfrac{169}{4}=\left(\dfrac{13}{2}\right)^2$ $\quad\therefore\ \mathrm{F}\left(\dfrac{13}{2},\ 0\right)$



따라서, 원 C의 반지름의 길이 $r=\dfrac{13}{2}-\dfrac{3}{2}=5$

$\overline{\mathrm{PF}}^2=\overline{\mathrm{PQ}}^2+\overline{\mathrm{FQ}}^2=12^2+5^2=13^2$ $\left(\because\ \angle\mathrm{PQF}=\dfrac{\pi}{2}\right)$ $\quad\therefore\ \overline{\mathrm{PF}}=13$

쌍곡선의 정의에 의해 $\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{PF}}-3=10$

문제 2 정답 20

5 개 중 임의로 2 개를 배정하는 전체 방법의 수는 ${}_5\mathrm{C}_2=10$

i) $X=1$ 인 경우

배정된 서랍의 번호를 순서쌍으로 나타내면 (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5) 이므로

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{4}{10}$$

ii) $X=2$ 인 경우

(2, 3), (2, 4), (2, 5) 이므로 $\mathrm{P}(X=2)=\dfrac{3}{10}$

iii) $X=3$ 인 경우

(3, 4), (3, 5) 이므로 $\mathrm{P}(X=3)=\dfrac{2}{10}$

ⅳ) $X=4$ 인 경우

(4, 5) 이므로 $\mathrm{P}(X=4)=\frac{1}{10}$

ⅰ), ⅱ), ⅲ), ⅳ)에서 확률변수 X의 확률분포는

X	1	2	3	4	계
$\mathrm{P}(X)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=1\times\frac{4}{10}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{2}{10}+4\times\frac{1}{10}=2,\quad \therefore\ \mathrm{E}(10X)=10\times\mathrm{E}(X)=20$

문제 3 정답 ②

$\mathrm{P}(0\le X\le a)=1$ 이므로 $ka^2=1$ $\cdots$㉠

확률변수 X의 확률밀도함수를 $f(x)$ 라 하면 $\mathrm{P}(0\le X\le x)=\int_0^x f(t)dt=kx^2$

등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면 $f(x)=2kx$

$$\therefore \mathrm{E}(X)=\int_0^a xf(x)dx=\int_0^a 2kx^2dx=\left[\frac{2}{3}kx^3\right]_0^a=1$$

$$\therefore\ \frac{2}{3}ka^3=1 \quad \cdots㉡$$

$a=\frac{3}{2}\qquad \therefore k=\frac{4}{9}$

논제 1-A

(1) 부츠의 높이를 h 라 하자. $\mathrm{P}(x<h)=0.9$ 를 만족하는 h 를 구하면 된다. $\int_0^{\frac{4}{3}}f(x)dx=1$ 이고 $\int_0^1 f(x)dx=\frac{5}{6}$ ($\fallingdotseq 0.83$) 이므로 $\int_h^{\frac{4}{3}}f(x)dx=0.1$ 을 만족하는 h 를 구해야 한다.

즉, $\int_h^{\frac{4}{3}}(-3x+4)dx=0.1$, $\frac{3}{2}h^2-4h+\frac{77}{30}=0$, $\therefore\ h=\frac{4}{3}-\frac{1}{\sqrt{15}}$ $(1<h<\frac{4}{3})$

따라서 주어진 조건을 만족하는 부츠의 높이는 $\therefore h=\frac{40}{3}-\frac{10}{\sqrt{15}}$ (인치)

(2) 제설작업에 필요한 염화칼슘의 양을 Y라 하면 $Y=2X$ 이다. 적설량의 기댓값 $\mathrm{E}(X)=\int_0^{\frac{4}{3}}xf(x)dx=\int_0^1 x\cdot x^{\frac{1}{5}}dx+\int_1^{\frac{4}{3}}x\cdot(-3x+4)dx=\frac{190}{297}$ 이다. 따라서 1 일 염화칼슘의 기댓값 $\mathrm{E}(Y)=2\mathrm{E}(X)=\frac{380}{297}$ 톤이다. 이번 겨울 제설작업에 필요한 염화칼슘 기댓값은

30일분의 염화칼슘으로 $\dfrac{3800}{99}$ 톤이 필요할 것으로 기대된다.

답안 작성시 유의점

① 전체 확률은 1 이고 $\int_0^1 f(x)dx=\dfrac{5}{6}$ 이므로 부츠의 높이 h 는 1 보다 큼을 알고 서술해야 한다.

② 제시문에 의하면 이 도시에 눈이 오는 날이 30일로 명시되어 있으므로 1 일 염화칼슘의 기댓값에 30 을 곱해 주어야 한다.

논제 1-B

(1) $\overline{\mathrm{PA}}=6$, $\overline{\mathrm{PB}}=10$ 이므로 지점 P 에 염색제가 도달한 후로부터 4 초 후에 표백제가 도달하므로 염색제가 고착되기에는 시간이 충분치 않아 염색제가 제거된다.

(2) 염색이 될 지점들은 B 로부터의 거리가 A 로부터의 거리보다 $5cm$ 보다 먼 지점들이다. 따라서 $\overline{\mathrm{PB}}-\overline{\mathrm{PA}}>5$ 이다. 즉, 염색이 이루어지는 지점들과 이루어지지 않는 지점들의 경계는 다음과 같은 관계식을 만족하는 쌍곡선의 방정식이다.

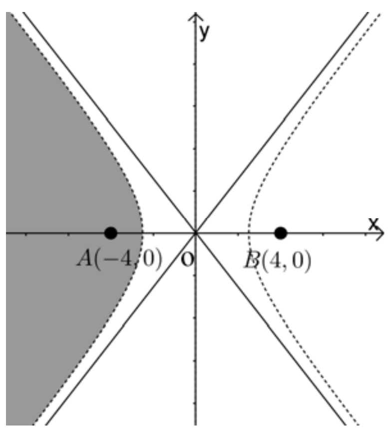
$$\sqrt{(x+4)^2+y^2}+5=\sqrt{(x-4)^2+y^2}$$

위 식의 양변을 제곱하여 정리하면 $156x^2-100y^2-975=0$ 이다.

구하고자 하는 지점들은 이 쌍곡선 위의 점들 중에서 B 로부터의 거리가 A 로부터의 거리보다 먼 지점들이므로 구하고자 하는 영역은

$$\{(x,\ y)\,|\,156x^2-100y^2-975>0,\ x<0\}$$

이고 좌표평면 위에 그리면 다음과 같다.



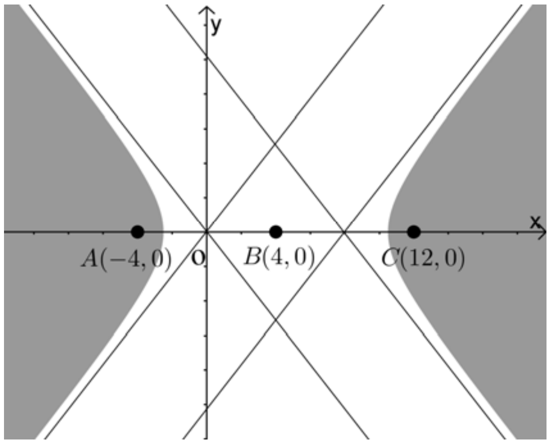
(3) A 와 B 에 의해 결정되는 영역 S 는 (2)에서 구했듯이 다음과 같다.

$$S=\{(x,\ y)\,|\,156x^2-100y^2-975>0,\ x<0\}$$

B 와 C 에 의해 결정되는 영역 S' 는 (2)에서 구한 영역 S 를 직선 $x=4$ 에 대해 대칭 이동하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$S'=\{(x,\ y)\,|\,156(8-x)^2-100y^2-975>0,\ x>8\}$$

따라서 염색이 될 지점들의 영역은 $S \cup S'$ 이다. 이를 좌표평면 위에 그리면 다음과 같다.



논제 2-A

(1) 광선의 단면적은

$S(w_0) = \pi w^2 = \pi w_0^2 \left[1 + \left(\dfrac{\lambda d}{\pi w_0^2}\right)^2\right] = \pi w_0^2 + \dfrac{\lambda^2 d^2}{\pi w_0^2}$ 이고,

$S'(w_0) = 2\pi w_0 - \dfrac{2\lambda^2 d^2}{\pi w_0^3}$, $S''(w_0) = 2\pi + \dfrac{6\lambda^2 d^2}{\pi w_0^4}$ 이다.

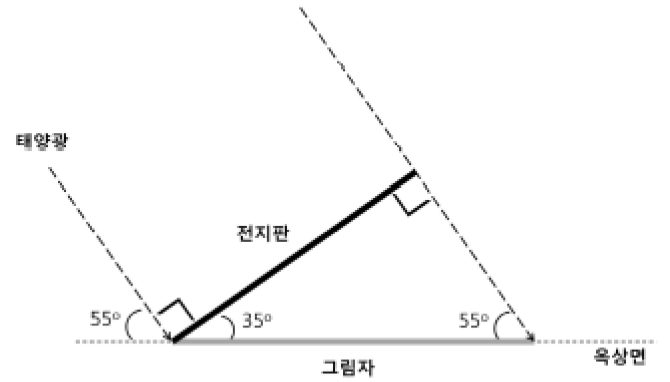
$S''(w_0)$ 가 항상 양의 값을 가지므로 단면적 함수 S 는 아래로 볼록한 함수이다. 따라서 $S'(w_0) = 0$ 을 만족하는 w_0 을 구하면 된다. 따라서 w_0 가 $w_0 = \sqrt{\dfrac{\lambda d}{\pi}}$ 일 때 광선의 단면적은 최솟값 $2\lambda d$ 를 갖는다.

(2) $w = \dfrac{5}{4} w_0$ 를 만족하는 d 를 구하자. $w = \dfrac{5}{4} w_0 = w_0 \left[1 + \left(\dfrac{\lambda d}{\pi w_0^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ 을 정리하면 $d = \pm \dfrac{3\pi w_0^2}{4\lambda}$ 이다. $w = \dfrac{5}{4} w_0$ 를 만족하는 위치 간의 거리 초점심도 $\Delta z = \dfrac{3\pi w_0^2}{2\lambda}$ 이다.

논제 2-B

(1) 제시문의 오른쪽 그래프에서 보듯이 태양복사선은 파장이 $0.3 \sim 2\mu m$ 로 짧은 반면에, 실온의 물체로부터 방출되는 빛은 파장이 $3\mu m$ 이상으로 장파 적외선이다. 그런데, 왼쪽 그래프에서 보면 유리는 파장이 짧은 빛 $(0.3 \sim 3\mu m)$ 은 투과를 잘 시키지만 파장이 긴 빛은 투과시키지 못한다. 따라서 외벽이 유리인 건물에 햇볕이 내리쬘 때 태양복사선은 유리를 쉽게 투과하여 건물 내부에 도달하고 건물 내부 물체들의 온도를 올리게 되지만, 건물 내부의 물체들이 내어놓는 파장이 긴 빛들은 유리를 투과하지 못하므로 유리 청사 내부에 그 에너지가 머무르게 된다. 이러한 온실 효과 때문에 유리 청사는 햇볕이 내리쬘 때 외부보다 그 내부의 온도가 높게 유지된다.

(2) 전지판은 지면으로부터 35° 의 각도로 정남향으로 설치되고, 태양광은 지면으로부터 55° 의 각도로 비추므로 태양광이 전지판에 입사하는 각도는 아래 그림과 같이 $90^\circ = (180-(35+55))^\circ$ 이다.

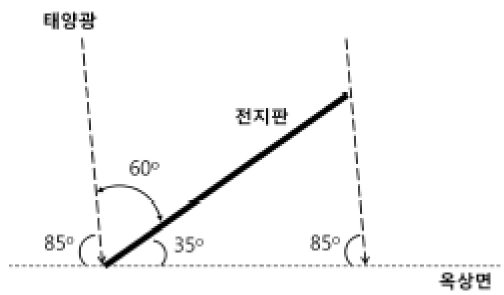


위 그림에서 전지판 한 장의 그림자 세로 길이는 $\dfrac{1}{\cos 35^\circ}$ 미터이다. 따라서 옥상면의 세로 방향으로 전지판 n 장이 설치될 수 있다면, n 은 다음 식을 만족하여야 한다.

$$n \times \frac{1}{\cos 35^\circ} \leq 30 \ (n \text{ 은 양의 정수})$$

따라서 n 은 $n \leq 30\cos 35^\circ = 24.6$ 을 만족하는 가장 큰 양의 정수이므로 $n=24$ 임을 알 수 있다. 즉, 옥상면의 세로방향으로는 전지판을 최대 24 장 설치할 수 있다. 한편 전지판 한 장의 그림자 가로 길이는 전지판 가로 길이와 동일하게 1 m이므로, 옥상면의 가로방향으로는 전지판을 30 장 설치할 수 있다. 따라서 옥상면에 설치할 수 있는 태양광 전지판의 최대 개수는 $24 \times 30 = 720$ 장이다.

(3) 전지판에 대한 태양관선의 입사각은 $60^\circ = (180-(35+85))^\circ$ 이다.



이 경우 태양 광선에 수직인 가상의 평면에 생기는 전지판 그림자의 면적은 전지판 면적의 $\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 이다. 따라서 이 경우 전지판에 입사하는 태양광 에너지의 양은 (2)번 경우의 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.

28 연세대학교 수시

제시문 **제시문을 읽고 다음 물음에 답하시오.***

17 세기에 라이프니츠는 두 양 사이의 대응 관계를 명확히 하고자 함수의 개념을 처음 도입하였다. 그 이후 많은 변화를 거쳐 함수의 개념은 일반화 되었으며 다양한 대응관계를 표현하는 도구로 활용되고 있다. 현대에는 함수를 수가 아닌 대상에도 적용하여 사용하고 있다.

(가) 실수 전체의 집합을 R라 하고, 집합 $U=\{f\,|\,f: R\to R\}$ 라 하자. 즉, 집합 U는 집합 R에서 집합 R로 가는 모든 함수의 모임이다. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B를

$$A=\{f\,|\,f\in U,\ f(x)=ax+b,\ a, b\in R\}\ ,$$

$$B=\left\{f\,|\,f\in U,\ f(x)=ax^2+bx+c,\ a, b, c\in R,\ a>0\right\}$$

라 하자.

(나) 함수 $f\in U$에 대하여 $mx-f(x)$ 가 최댓값을 가지면 그 값을 $F(m)$ 이라 하자.

(다) 두 실수 a, b 에 대하여 $\mathrm{Max}(a, b)=\begin{cases} a & (a\ge b) \\ b & (a<b)\end{cases}$ 이다.

※ 다음 모든 문제에서 사용되는 f 와 F는 제시문 (나)에서 주어진 관계를 만족한다.

논제 1-1

함수 $f(x)=x^2$ 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 에 접하고 기울기가 m 인 접선을 l 이라 할 때, 직선 l의 y 절편이 $-F(m)$ 임을 설명하시오.

논제 1-2

(1) 함수 $f(x)=ax^2+bx+c$ 가 집합 B의 원소일 때, 모든 실수 m 에 대하여 $F(m)=pm^2+qm+r$ 로 나타낼 수 있으므로 함수 $F(x)$ 도 집합 B의 원소임을 설명하시오.

---

* 연세대학교 입학처

(2) 문제 (1)의 두 함수 f 와 F 에 대하여 f 에 F 를 대응시키는 함수 $T : B \to B$ 를 생각할 수 있다. 함수 T 에 대하여 $f_k = \underbrace{(T \circ T \circ \cdots \circ T)}_{k\text{개}}(f)$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ 으로 정의하자. 집합 B 의 원소 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 에 대하여 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n}f_k\left(\frac{k}{2n}\right)$ 의 수렴여부를 논하고, 수렴하면 그 극한값을 a, b, c 에 대한 식으로 나타내시오.

논제 1-3

(1) 함수 $f(x) = \mathrm{Max}(ax+b,\ cx+d)$ (단, $a < c$)에 대하여 $F(m)$ 이 존재하는 m 의 범위를 찾고, $F(m)$ 을 a, b, c, d 와 m 에 대한 식으로 나타내시오.

(2) 함수 $f(x) = \mathrm{Max}\left(\dfrac{a+b}{2}x - \dfrac{ab}{2},\ \dfrac{1}{2}x^2\right)$ (단, $a < b$)라 하자. 모든 실수 m 에 대하여 $F(m)$ 이 존재함을 보이고, $F(m)$ 을 a, b 와 m 에 대한 식으로 나타내시오.

(3) 집합 U 의 원소 f 에 대응하는 F 가 집합 U 의 원소라면 $T(f) = F$ 라 하고, 이 과정을 k 번 반복할 수 있는 경우 $f_k = \underbrace{(T \circ T \circ \cdots \circ T)}_{k\text{개}}(f)$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ 으로 정의하자. 함수 $f(x) = \mathrm{Max}\left(6x - 10,\ \dfrac{1}{2}x^2\right)$ 에 대하여 무한급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}f_n(3^n)$ 의 수렴여부를 논하고, 수렴하면 그 값을 구하시오.

논술유형분석

문항 수	수학 3문항	시간	100분
연관 개념	집합, 함수, 수열과 급수, 미분과 적분		

제시문분석

제시문

수학 교육과정에서 배우는 함수 단원을 바탕으로 다양한 집합을 만들어 낸 과정을 설명하고 있다.

논제분석

논제 1-1

함수의 미분과 곡선의 접선에 관한 기초적인 내용을 아는지를 측정하는 문항이다.

논제 1-2

위로 볼록한 이차함수의 최댓값을 구하는 단순한 문제이나, 식의 전개를 통하여 규칙성을 파악하고 최댓값의 특성을 이해하는지 평가하는 문항이다.

논제 1-3

간단한 경우의 규칙성을 발견하고, 좀 더 복잡한 형태의 문제를 단순화하여 분석하는 능력을 알아보는 문항이다. 또한 함수의 연속 단원의 최대최소의 정리를 이용하여 최댓값이 존재함을 인식하고, 복합된 문제를 적절히 분류하여 단순하게 해결하는 능력을 평가하는 문항이다.

배경지식쌓기

1. 함수의 표현*

가. 함수의 정의와 표현

두 집합 X, Y에 대하여 X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응할 때, 이 대응을 X에서 Y로의 함수라고 하며, 이것을 기호로

$$f\ : X \rightarrow Y$$

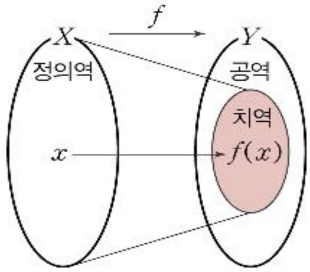
와 같이 나타낸다.

이때 집합 X를 함수 f의 정의역, 집합 Y를 함수 f의 공역이라고 한다.

나. 함숫값과 부분집합

함수 $f\ : X \rightarrow Y$에 대하여 X의 원소 x에 Y의 원소 y가 대응할 때, 이것을 기호로 $y=f(x)$와 같이 나타내고, $f(x)$를 함수 f에 대한 x의 함숫값이라고 한다.

* 2011 신사고



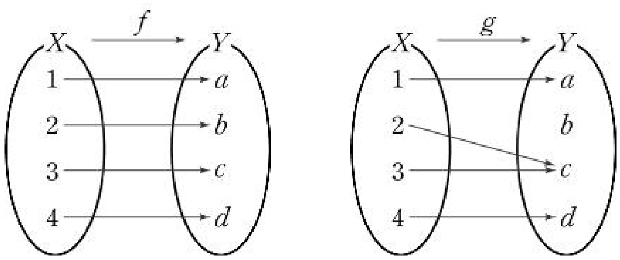
이때 함숫값 전체의 집합, 즉

$$\{ f(x) \mid x \in X \}$$

를 함수 f 의 치역이라고 한다. 함수 $f\ :X \rightarrow Y$ 의 치역은 공역 Y의 부분집합이다.

다. 일대일 함수와 일대일 대응

함수 중에는 아래의 함수 f 와 같이 정의역의 서로 다른 두 원소에 대응하는 공역의 원소가 항상 서로 다른 경우가 있고, 함수 g 와 같이 그렇지 않은 경우가 있다.



일반적으로 함수 $f\ :X \rightarrow Y$ 에서 정의역 X의 임의의 원소 x_1, x_2 에 대하여

$$x_1 \neq x_2 \text{ 이면 } f(x_1) \neq f(x_2)$$

가 성립할 때, 이 함수 f 를 일대일 함수라고 한다.

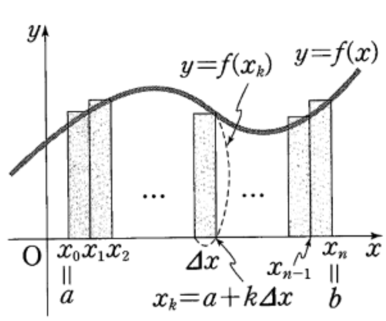
특히 함수 $f\ :X \rightarrow Y$ 가 일대일 함수이고, 치역과 공역이 같으면 이 함수 f 를 일대일 대응이라고 한다. 또 공역을 밝히지 않은 어떤 함수가 일대일 함수이면 치역을 공역으로 보아 이 함수를 일대일 대응으로 볼 수 있다.

2. 정적분의 정의와 무한급수의 관계

정적분 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ 의 정의에 의하면 함수 $f(x)$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x)dx$$

가 성립한다. 이때 위의 그림에서 구간 $[a, b]$ 의 길이는 $b-a$ 이므로 각 직사각형의 가로와 세로의 길이는 다음과 같다.



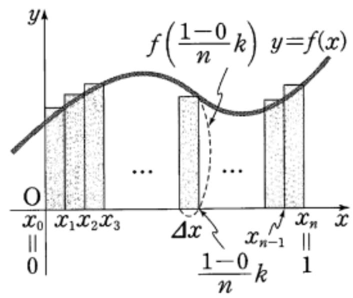
가로의 길이 ➡ $\dfrac{b-a}{n}$,   세로의 길이 ➡ $f\left(a+\dfrac{b-a}{n}k\right)$

따라서 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ 는 각 직사각형의 가로의 길이의 위치인 $a+\dfrac{b-a}{n}k$ 를 적분변수 x 로 보고 구간 $[a, b]$ 에서의 함수 $f(x)$ 의 정적분으로 정의한 것이다.

주어진 무한급수에서 각 직사각형의 가로의 길이를 무엇으로 보느냐에 따라 적분변수가 결정이 되고, 이에 따라 여러 가지 정적분으로 표현이 가능하다.

*** 적분변수의 형태에 따른 무한급수의 정적분으로의 표현**

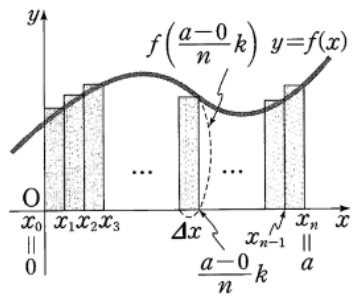
가. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)dx$



$\dfrac{k}{n}=\dfrac{1-0}{n}k$ 를 각 직사각형의 가로의 길이의 위치인 적분변수 x 로 보면 오른쪽 그림과 같이 구간 $[0, 1]$ 의 길이가 1 이므로 각 직사각형의 가로의 길이는 $\dfrac{1-0}{n}$ 이고, 세로의 길이는 $f\left(\dfrac{1-0}{n}k\right)$ 이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)\,dx$$

나. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{a}{n}k\right)\frac{a}{n}=\int_0^a f(x)dx$

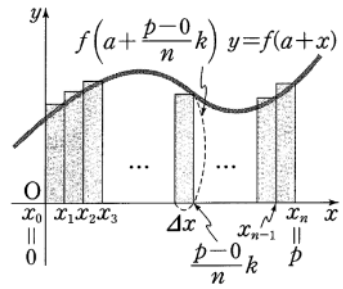


$\dfrac{a}{n}k=\dfrac{a-0}{n}k$ 를 각 직사각형의 가로의 길이의 위치인 적분변수 x 로 보면 오른쪽 그림과 같이 구간 $[0, a]$ 의 길이가 a 이므로 각 직사각형의 가로의 길이는 $\dfrac{a-0}{n}$ 이고, 세로의 길이는 $f\left(\dfrac{a-0}{n}k\right)$ 이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{a}{n}k\right)\frac{a}{n}=\int_0^a f(x)\,dx$$

다. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{p}{n}k\right)\frac{p}{n}=\int_0^p f(a+x)dx$

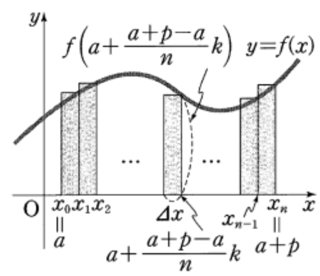
$\dfrac{p}{n}k=\dfrac{p-0}{n}k$ 를 각 직사각형의 가로의 길이의 위치인 적분변수 x 로 보면 오른쪽 그림과 같



이 구간 $[0, p]$ 의 길이가 p 이므로 각 직사각형의 가로의 길이는 $\dfrac{p-0}{n}$ 이고, 세로의 길이는 $f\left(a+\dfrac{p-0}{n}k\right)$ 이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{p}{n}k\right)\frac{p}{n} = \int_{0}^{p} f(a+x)\,dx$$

라. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{p}{n}k\right)\frac{p}{n} = \int_{a}^{a+p} f(x)\,dx$



$a+\dfrac{p}{n}k=a+\dfrac{a+p-a}{n}k$ 를 각 직사각형의 가로의 길이의 위치인 적분변수 x 로 보면 오른쪽 그림과 같이 구간 $[a, a+p]$ 의 길이가 p 이므로 각 직사각형의 가로의 길이는 $\dfrac{a+p-a}{n}$ 이고, 세로의 길이는 $f\left(a+\dfrac{a+p-a}{n}k\right)$ 이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{p}{n}k\right)\frac{p}{n} = \int_{a}^{a+p} f(x)\,dx$$

풀어보기

문제 1 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$h(x)=\frac{1}{3}f(x)+\frac{2}{3}g(x)$$

다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보기>

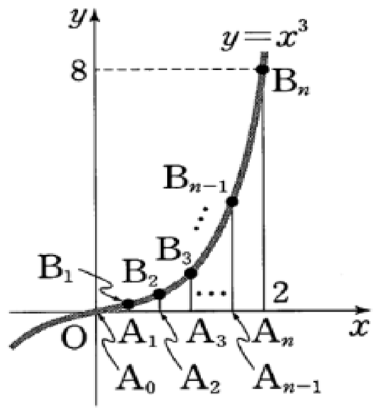
ㄱ. $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 그래프가 어떤 점에서 만나면 $y=h(x)$ 의 그래프는 그 교점을 지난다.

ㄴ. $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 그래프가 모두 y 축에 대하여 대칭이면 $y=h(x)$ 의 그래프도 y 축에 대하여 대칭이다.

ㄷ. $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 가 모두 일대일 대응이면 $y=h(x)$ 도 일대일대응이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제 2 그림과 같이 x축 위의 구간 $[0, 2]$를 n등분한 점과 양 끝점을 차례로 $\mathrm{A_0}(=0)$, $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{A_3}$, $\cdots$, $\mathrm{A_n}(=2)$이라 하고, 점 $\mathrm{A_k}$를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=x^3$과 만나는 점을 $\mathrm{B_k}$라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{\mathrm{A_kB_k}}$의 값을 구하여라.



읽기자료

함　수*

사다리타기게임은 남녀노소 누구나 쉽고 재미있게 즐길 수 있는 게임이다. 옛날에는 종이에 직접 그려서 게임을 즐겼지만 요즘은 인터넷을 이용하여 컴퓨터로도 할 수 있도록 플래시 게임으로 만들어져 있어 친구나 동료들끼리 장소에 구애받지 않고 즐길 수 있다. 사다리타기 게임을 수학에서는 뭐라고 할 수 있을까? 한번 알아보기로 하자.

1. 사다리타기 게임은 함수다

4명이 사다리타기 게임으로 돈을 내어 간식을 먹기로 했을 때, 사다리타기 게임 방법은 다음과 같다.

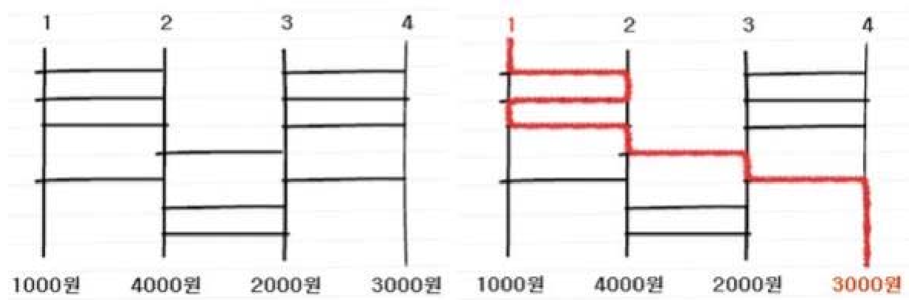
가. 참여하는 사람 수와 같은 개수의 세로선을 일정한 간격으로 긋는다. 여기서는 4명이 참여하므로 세로선은 4개를 긋는다. 각 세로선에는 1, 2, 3, 4의 번호를 붙인다.

나. 오른쪽 그림과 같이 인접한 2개의 세로선 사이에 적당한 간격으로 가로선을 긋는다. 이때 가로선은 몇 개를 그어도 관계없지만 어떤 두 세로선 사이에 그은 가로선이 그 옆의 다른 세로선 사이에 그은 가로선과 일직선이 되지 않아야 한다.

다. 4개의 세로선 위에는 1부터 4까지 차례로 번호를 붙이고, 밑에는 지불해야 할 금액을 임의로 쓴다.

라. 놀이에 참가한 사람은 각자 1, 2, 3, 4의 세로선 가운데 하나씩을 선택하고, 각자 선택한 세로선을 따라 밑으로 내려간다. 이때 처음 선택한 세로선에서 시작하여 연필을 떼

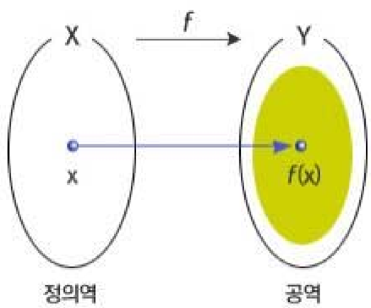
지 않고 밑으로 내려가는데, 내려가며 만나게 되는 가로선을 따라 왼쪽 또는 오른쪽으로 이동하며 내려간다. 예를 들어 그림의 굵은 선은 1을 선택한 경우 선택한 세로선을 따라 가는 길을 나타낸 것이다. 이런 방법으로 1번은 3,000원, 2번은 4,000원, 3번은 2,000원, 4번은 1,000원이 선택되었다.



여기서 세로선의 번호를 x라 하고, 그 선을 선택했을 때 나오는 금액을 y라고 하면, 하나의 x가 정해지면 꼭 하나의 y가 정해진다. 이 관계에서 x는 $1, 2, 3, 4$와 같이 여러 가지 값을 가질 수 있고, y도 x의 값이 변함에 따라 여러 가지 값을 가지게 된다. 이러한 x, y와 같이 변하는 여러 가지 값을 가지는 문자를 변수라고 한다. 그리고 두 변수 x, y에 대하여 x의 값이 정해지면 y의 값도 단 하나로 정해지는 관계가 있을 때, y는 x의 함수라고 한다.

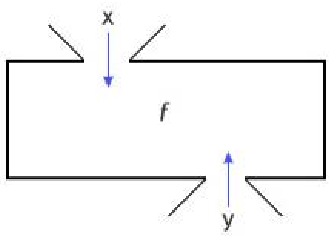
2. 함수의 정의

일반적으로, 두 집합 X, Y에서 X의 각 원소에 Y의 원소가 하나씩만 대응할 때, 이 대응을 X에서 Y로의 함수라 하고, 이것을 $f : X \to Y$와 같이 나타낸다. 이때, 집합 X를 함수 f의 정의역이라고 하고, 집합 Y를 함수 f의 공역이라고 한다. 특히 함수 f에 의하여 정의역 X의 원소 x에 공역 Y의 원소 y가 대응할 때, 이것을 기호로 $y = f(x)$와 같이 나타낸다. 이때, $f(x)$를 함수 f에 의한 x에서의 함숫값이라고 한다. 또, 함수 f에 의한 함숫값 전체의 집합, 곧 $\{f(x) \mid x \in X\}$를 함수 f의 치역이라고 한다. 그림에서 보듯이 일반적으로 치역은 공역의 부분집합이다.



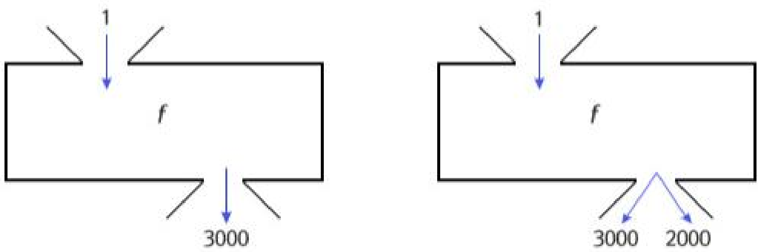
기호 f를 사용하여 사다리타기 게임의 결과를 나타내면 $f(1) = 3000$, $f(2) = 4000$,

$f(3)=2000$, $f(4)=1000$ 이고, 그림과 같이 하나의 기계로 생각할 수 있다. 이 기계의 투입구 x 에 1을 넣으면 y 에서 3000, x 에 2를 넣으면 y 에서 4000, x 에 3을 넣으면 y 에서 2000, x 에 4를 넣으면 y 에서 1000이 나온다.



함수란 일종의 기계로 생각할 수 있다.

그런데 이 기계는 x 에 하나를 넣으면 y 에서도 반드시 하나만 나오므로 x 에 1 을 넣으면 y 에서 3000 과 2000 이 동시에 나올 수 없다. 즉, x 에 하나를 넣었을 때, y 에서 서로 다른 두 개가 나왔다면 f 는 함수가 아닌 것이다. 이와 같은 사실로부터 함수 f 는 정의역의 모든 원소가 대응하고 정의역 X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여 $x_1=x_2$ 이면 $f(x_1)=f(x_2)$임을 알 수 있다.



x 에 하나를 넣으면 y 에서 하나가 나오므로 함수이다. (좌)

x 에 하나를 넣으면 y 에서 둘 이상이 나오므로 x 에 대응하는 값이 어떤 것인지 알 수 없으므로 함수가 아니다. (우)

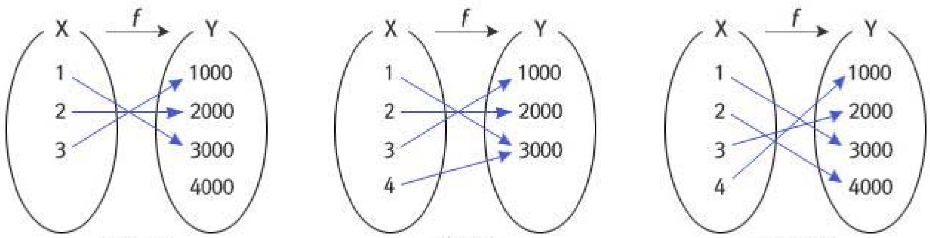
3. 전사함수, 일대일함수(단사함수), 일대일대응(전단사함수)

함수는 공역과 치역의 관계에 따라 일대일함수(단사함수), 전사함수, 일대일대응(전단사함수)이라는 이름을 붙인다. 이제 하나씩 알아보자.

첫째, 예를 들어 아래 왼쪽 그림과 같이 정의역의 각 원소가 치역의 각 원소와 꼭 하나씩 대응되는 경우가 있다. 이때 공역에는 대응되지 않는 원소가 있어도 된다. 이것은 정의역의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 인 경우이다. 함수가 이와 같은 성질을 만족할 때, 이 함수를 단사함수(injective function)라고 한다. 이것을 다시 쓰면 함수 f 가 단사함수일 필요충분조건은 $f(x_1)=f(x_2)$ 이면 $x_1=x_2$ 이다. 이것은 앞에서 소개했던 함수의 정의와 매우 유사하기 때문에 이 성질을 이용할 때 항상 조심해야 한다.

둘째, 치역과 공역이 일치하는 경우가 있다. 즉, 치역의 어떤 원소를 택하던지 그 원소에 대응하는 정의역의 원소가 적어도 하나가 있는 경우이다. 단사함수에서 예를 들었던 함수

에서는 공역의 원소 4000 에 대응하는 정의역의 원소가 없었다. 그러나 아래 가운데 그림과 같은 함수에서는 공역과 치역이 같고, 공역의 어떤 원소를 택하여도 그에 대응하는 정의역의 원소가 적어도 하나씩은 반드시 있다. 이런 함수를 전사함수(surjective function)라고 한다.

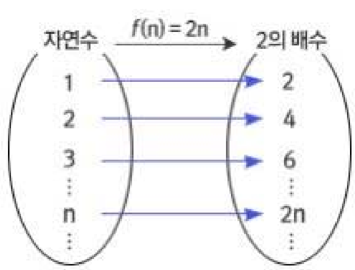


단사함수　　　　전사함수　　　　전단사함수

셋째, 정의역의 각 원소가 치역의 각 원소와 꼭 하나씩 대응되며 치역과 공역이 일치하는 경우, 즉, 단사함수이며 동시에 전사함수인 경우가 있다. 이런 함수를 전단사함수(bijective function)라고 하며 간단히 일대일대응(one to one correspondence)이라고 한다. 이를테면 사다리타기 게임과 같이 정의역의 원소 하나에 공역의 원소가 꼭 하나씩 대응되고 공역과 치역이 일치하는 경우이다. 이 경우 정의역의 원소와 공역의 원소가 일대일로 짝지어지기 때문에 정의역의 원소의 개수와 공역의 원소의 개수가 같다. 즉, 사다리타기 게임은 전단사 함수인 것이다.

4. 일대일대응과 무한

전단사함수는 수학을 한 단계 끌어올리는 중요한 역할을 했다. 오랫동안 수학의 기본원리로 여겨졌던 유클리드 [원론]의 공리를 무너뜨리는 역할을 했기 때문이다. 유클리드 [원론]의 5번째 공리는 "전체는 부분보다 크다."이다. 전체는 그것의 일부분보다 크다는 것은 분명한 사실처럼 보인다. 그러나 무한과 일대일 대응이 함께 관련되어 있다면 이 말은 자명하지 않을 수 있다.



우리가 알고 있는 무한 가운데 가장 쉬운 자연수를 예로 들어보자. 자연수의 집합과 짝수의 집합을 생각해보자. 짝수의 집합은 자연수의 집합의 ‘부분’이다. 그런데 각 자연수 n 에 대하여 n 을 그것의 2 배인 $2n$ 으로 보내는 함수 $f(n)=2n$ 을 생각해보자.

함수 $f(n)=2n$ 은 그림과 같이 자연수 n 에 대하여 꼭 하나의 짝수 $2n$ 이 대응되므로 일대일 대응이다. 따라서 자연수 전체의 집합과 자연수 전체의 진부분집합인 2 의 배수의 집

합은 서로 같은 수만큼의 원소를 가지고 있다. 즉, 전체는 그 일부분보다 크지 않게 된다. 그러므로 유클리드가 모든 영역에서 참이라고 주장했던 공리 가운데 5번째 공리는 참이 아님을 알 수 있다.

5. 일대일 대응의 유래

그러면, 일대일 대응은 언제부터 알려졌을까? 호메로스의 걸작 <오디세이아(Odyssey)>에는 수를 세는 방법에 관한 다음과 같은 이야기가 전해지고 있다. '오디세이아가 여행 중에 외눈박이 거인 폴리페모스(Polyohemus)를 장님으로 만들고 키클로프스(Cyclops)의 땅을 떠났다. 그 후 이 불쌍한 거인은 아침마다 자신의 동굴 입구에 앉아서 그의 양들을 한 마리씩 동굴에서 나오게 할 때마다 조약돌을 한 개씩 동굴밖에 놓았다가 저녁에 양들이 돌아오면 한 개씩 동굴 안으로 들여놓았다.'
이 이야기에서 거인은 수학을 배운 적이 없지만 일대일 대응으로 수를 세고 있다. 이것 말고도 수를 세는 방법에 관한 여러 가지 옛날 이야기가 전해지는데, 모두 일대일 대응에 의한 것들이다. 아프리카 원주민들은 왜 목에 동물의 어금니를 달고 다닐까? 그것은 자기가 잡았던 동물들의 수로 자신의 용맹함을 과시하기 위함이다. 또 아프리카의 마사이(Masai)족은 미혼여성의 나이를 알리기 위하여 그녀의 나이와 같은 개수만큼의 놋쇠 목걸이를 하고 다니는데, 이것도 일대일 대응이다. 그리고 영어에 'to chalk one up'은 '기록하다'라는 뜻으로 옛날 술집 주인이 손님들이 마시는 술잔의 수를 석판 위에 분필로 표시한데서 유래한 것이다. 스페인어에 'echai chins'는 '조약돌을 던지다'라는 뜻으로 옛날 술집 주인이 손님들이 마시는 술잔의 수를 손님들의 두건 위에 조약돌을 던져 계산했던 전통에서 유래했다.

6. 함수의 개념 정립은 17세기 이후부터

단순해 보이는 일대일대응은 수학에서 역사가 가장 오래되었으며 가장 널리 그리고 가장 오랫동안 사용되고 있는 것이다. 그러나 일대일 대응을 비롯한 함수의 개념과 기호는 17세기 이후에 수학적으로 엄밀하게 이루어졌다. 독일의 수학자이자 철학자인 라이프니츠(Leibniz)는 운동하거나 변화하는 구체적인 현상을 표현하려는 데서 발생한 함수(function) 개념을 처음으로 용어화하였다. 그는 변수 x의 값에 따라서 다른 변수 y가 정해지면 y를 곧 함수라고 정의하였고, 특히 곡선의 방정식이 곧 함수라고 생각하였다. 그 후 오일러(Euler)가 함수의 개념을 더욱 확실하게 정의하였고, 함수의 기호인 $f(x)$를 처음 사용하여 오늘에 이르고 있다.

* 수학산책, 이광연 / 한서대학교 수학과 교수

예시답안

풀어보기

문제 1

ㄱ. $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표를 a 라 하면 교점의 좌표는 $(a,\ f(a))$ 이고, $f(a)=g(a)$ 이다. 이 때, $h(a)=\frac{1}{3}f(a)+\frac{2}{3}g(a)=f(a)$ 이므로 $y=h(x)$ 의 그래프는 점 $(a,\ f(a))$ 를 지난다. $\therefore$ 옳다.

ㄴ. $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 그래프가 모두 y 축에 대하여 대칭이므로 $f(-x)=f(x)$, $g(-x)=g(x)$ $\cdots$ ㉠ $\quad\therefore\ h(-x)=\frac{1}{3}f(-x)+\frac{2}{3}g(-x)=\frac{1}{3}f(x)+\frac{2}{3}g(x)$ ($\because$ ㉠)

따라서 $h(-x)=h(x)$ 이므로 $y=h(x)$ 의 그래프도 y축에 대하여 대칭이다. $\therefore$ 옳다.

ㄷ. [반례] $f(x)=3x$, $g(x)=-\frac{3}{2}x$ 라 하면 $f(x)$, $g(x)$ 는 모두 일대일 대응이지만 $h(x)=\frac{1}{3}f(x)+\frac{2}{3}g(x)=0$ 은 일대일 대응이 아니다. $\therefore$ 옳지 않다.

따라서, 참인 것은 ㄱ, ㄴ 이다.

문제 2

구간 $[0,\ 2]$ 를 n 등분하였으므로

$$\overline{\mathrm{OA}_1}=\frac{2}{n},\ \overline{\mathrm{OA}_2}=\frac{4}{n},\ \cdots,\ \overline{\mathrm{OA}_k}=\frac{2k}{n},\ \cdots$$

따라서 점 A_k 의 좌표는 $\left(\frac{2k}{n},\ 0\right)$ 이고 또한 점 B_k의 좌표는 $\left(\frac{2k}{n},\ \left(\frac{2k}{n}\right)^3\right)$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k}=\left(\frac{2k}{n}\right)^3$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^3=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^3\cdot\frac{2}{n}$$

이때 $\frac{2k}{n}=\frac{2-0}{n}k$ 를 x 로 바꾸면 적분구간은 $[0,\ 2]$ 이므로 정적분으로 나타내어 값을 계산하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^3\cdot\frac{2}{n}=\frac{1}{2}\int_0^2 x^3dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^2=2$$

논제 I -1

$x=t$ 에서 접한다고 하면 $2t=m$ 이므로 $t=\frac{m}{2}$ 이다.

직선 l 은 $y=m\left(x-\frac{m}{2}\right)+\frac{m^2}{4}$ 이고 y 절편은 $-\frac{m^2}{2}+\frac{m^2}{4}=-\frac{m^2}{4}$ 이다.

그리고 $mx-f(x)=mx-x^2=-\left(x-\frac{m}{2}\right)^2+\frac{m^2}{4}$ 이므로 $-F(m)=-\frac{m^2}{4}$ 이다.

따라서 직선 l 의 y 절편은 $-F(m)$ 이다.

논제 I -2

(1) $mx-f(x)=mx-ax^2-bx-c=-ax^2+(m-b)x-c=-a\left(x-\frac{m-b}{2a}\right)^2+a\left(\frac{m-b}{2a}\right)^2-c$

이므로

$F(m)=\frac{1}{4a}m^2-\frac{b}{2a}m+\frac{b^2}{4a}-c$ 이다. $\frac{1}{4a}>0\,(\because f(x)\in B)$ 이므로 $F(x)\in$ B 이다.

(2) 논제 1에 의해 $f_1(x)=T(f(x))=\frac{1}{4a}x^2-\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a}-c$ 이다.

여기서 $f_1(x)=px^2+qx+r$ 이라 두면 $f_2(x)=T(f_1)=\frac{1}{4p}x^2-\frac{q}{2p}x+\frac{q^2}{4p}-r$ 이고

$p=\frac{1}{4a}$, $q=-\frac{b}{2a}$, $r=\frac{b^2}{4a}-c$ 를 대입하면 $f_2(x)=T(f_1)=ax^2+bx+c$ 이다.

$$\therefore (T\circ T)(f)=f$$

따라서 $f_{2k}(x)=f(x)=ax^2+bx+c$, $f_{2k-1}(x)=\frac{1}{4a}x^2-\frac{1}{2a}x+\frac{b^2}{4a}-c$ 이다.

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n}f_k\left(\frac{k}{2n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{f_{2i-1}\left(\frac{2i-1}{2n}\right)+f_{2i}\left(\frac{2i}{2n}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{f_1\left(\frac{2i-1}{2n}\right)+f\left(\frac{i}{n}\right)\right\}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}f_k\left(\frac{k}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{f_1\left(\frac{2i-1}{2n}\right)+f\left(\frac{i}{n}\right)\right\}$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{4a}x^2-\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a}-c\right)dx+\int_0^1(ax^2+bx+c)dx$$

$$=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+\frac{1}{12a}-\frac{b}{4a}+\frac{b^2}{4a}$$

따라서 주어진 값은 수렴하고 수렴값은 $\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+\frac{1}{12a}-\frac{b}{4a}+\frac{b^2}{4a}$ 이다.

논제 Ⅰ-3

(1) $ax+b=cx+d$ 를 만족하는 $x=\dfrac{b-d}{c-a}$ 이므로

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & \left(x<\dfrac{b-d}{c-a}\right) \\ cx+d & \left(x\ge\dfrac{b-d}{c-a}\right)\end{cases} \text{ 이고 } mx-f(x)=\begin{cases} (m-a)x-b & \left(x<\dfrac{b-d}{c-a}\right) \\ (m-c)x-d & \left(x\ge\dfrac{b-d}{c-a}\right)\end{cases} \text{ 이다.}$$

여기서 $mx-f(x)$ 의 최댓값이 존재하려면 함수 $mx-f(x)$ 가 구간 $x<\dfrac{b-d}{c-a}$ 에서는 증가함수, 구간 $x\ge\dfrac{b-d}{c-a}$ 에서는 감소함수이어야 한다. 따라서 $m-a\ge 0$ 이고 $m-c\le 0$ 이다. 즉 $F(m)$ 이 존재하게 되는 m 의 범위는 $a\le m\le c$ 이다.

또, 최댓값은 $x=\dfrac{b-d}{c-a}$ 에서 존재하므로

$$F(m)=\frac{(m-a)(b-d)}{c-a}-b=\frac{b-d}{c-a}m+\frac{a(d-b)+b(a-c)}{c-a}=\frac{b-d}{c-a}m+\frac{ad-bc}{c-a} \text{ 이다.}$$

(2) $\dfrac{1}{2}x^2=\dfrac{a+b}{2}x-\dfrac{ab}{2}$ 를 만족하는 x 를 구하면 $x^2-(a+b)x+ab=0$ 에서 $x=a, b$ 이다.

$$\text{따라서 } f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2 & (x<a) \\ \dfrac{a+b}{2}x-\dfrac{ab}{2} & (a\le x\le b) \\ \dfrac{1}{2}x^2 & (x>b)\end{cases}$$

(i) $m<a,\ m>b$ 인 경우

$mx-f(x)=mx-\dfrac{1}{2}x^2=-\dfrac{1}{2}(x-m)^2+\dfrac{m^2}{2}$ 이므로 $x=m$ 에서 최댓값 $\dfrac{1}{2}m^2$ 을 갖는다.

$$\therefore\ F(m)=\frac{m^2}{2}$$

(ii) $a\le m\le b$ 인 경우

$mx-f(x)=\left(m-\dfrac{a+b}{2}\right)x+\dfrac{ab}{2}$ 이고 $mx-f(x)$ 는 $ma-f(a)$ 또는 $mb-f(b)$ 를 최댓값으로 갖는다.

만약 $a\le m<\dfrac{a+b}{2}$ 이면 $m-\dfrac{a+b}{2}<0$ 이므로 $F(m)=ma-f(a)=am-\dfrac{a^2}{2}$ 이고

$\dfrac{a+b}{2}\le m\le b$ 이면 $m-\dfrac{a+b}{2}>0$ 이므로 $F(m)=mb-f(b)=bm-\dfrac{b^2}{2}$ 이다.

따라서 $a\le m\le b$ 일 때 $F(m)=\max\left(am-\dfrac{a^2}{2},\ bm-\dfrac{b^2}{2}\right)$ 이다.

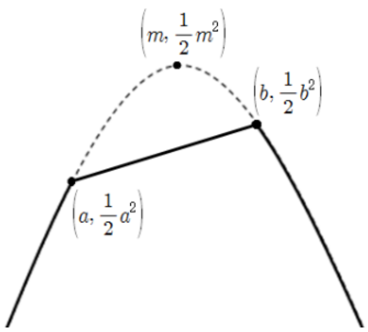
그러므로 (i), (ii) 에 의하여 모든 실수 m 에 대하여 $F(m)$ 은 항상 존재한다.

다른 풀이

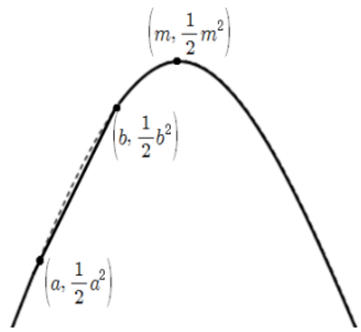
$\frac{1}{2}x^2 = \frac{a+b}{2}x - \frac{ab}{2}$ 에서 $x = a, b$ 이므로 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & (x < a) \\ \frac{a+b}{2}x - \frac{ab}{2} & (a \le x \le b) \\ \frac{1}{2}x^2 & (x > b) \end{cases}$ 이고

$$mx - f(x) = \begin{cases} mx - \frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}(x-m)^2 + \frac{2}{m^2} & (x < a) \\ \left(m - \frac{a+b}{2}\right)x + \frac{ab}{2} & (a \le x \le b) \\ mx - \frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}(x-m)^2 + \frac{2}{m^2} & (x > b) \end{cases}$$ 이다.

함수 $mx - f(x)$ 의 그래프는 m 의 값에 따라 아래와 같다.



$a \le m \le b$



$m < a,\ m > b$

따라서 $a \le m \le b$ 일 때, $F(m) = \max\left(am - \frac{a^2}{2},\ bm - \frac{b^2}{2}\right)$ 이고 $m < a,\ m > b$ 일 때,

$F(m) = \frac{m^2}{2}$ 이다. 그러므로 모든 실수 m 에 대하여 $F(m)$ 은 항상 존재한다.

(3) 위의 (2)에 의해 $f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & (x < a) \\ \max\left(ax - \frac{a^2}{2}, bx - \frac{b^2}{2}\right) & (a \le x \le b) \\ \frac{1}{2}x^2 & (x > b) \end{cases}$

이고 $y = ax - \frac{a^2}{2}$, $y = bx - \frac{b^2}{2}$ 은 각각 $y = \frac{1}{2}x^2$ 위의 점 $\left(a, \frac{a^2}{2}\right), \left(b, \frac{b^2}{2}\right)$ 에서의 접선이므로

$\frac{x^2}{2} \ge ax - \frac{a^2}{2},\ \frac{x^2}{2} \ge bx - \frac{b^2}{2}$ 이다.

따라서 $a \le m \le b$ 일 때 $mx - \max\left(ax - \frac{a^2}{2},\ bx - \frac{b^2}{2}\right)$ 의 최댓값은 위의 (1)의 결과에 의해

$$F(m) = \frac{\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}}{b-a} m + \frac{a^2b - b^2a}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2} m - \frac{ab}{2}$$

이고 이때, $x = \frac{a+b}{2}$ 이므로 $f_2(x) = \frac{a+b}{2} x - \frac{ab}{2}\ (a \le x \le b)$ 이다.

또, $m < a,\ m > b$ 일 때 $mx - f_1(x) = mx - \frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}(x-m)^2 + \frac{1}{2}m^2$ 에서 $x = m$ 일 때 최댓값 $\frac{1}{2}m^2$ 을 가진다. $\therefore F(m) = \frac{1}{2}m^2 \quad (m < a,\ m > b)$

따라서 $f_2(x) = f(x)$ 이다.

주어진 $f(x)$ 에 대해 위의 결과들을 이용해 계산해보면

$$f(x) = \max\left(6x - 10,\ \frac{1}{2}x^2\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & (x < 2) \\ 6x - 10 & (2 \le x \le 10) \\ \frac{1}{2}x^2 & (x > 10) \end{cases} \text{ 이므로}$$

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & (x < 2) \\ \max(2x - 2,\ 10x - 50) & (2 \le x \le 10) \\ \frac{1}{2}x^2 & (x > 10) \end{cases}$$

이다. 따라서 $f_1(3) = 4,\ f_2(9) = 44$ 이고 $n \ge 3$ 이면 $f_n(3^n) = \frac{1}{2} \times 3^{2n} = \frac{9^n}{2}$ 이므로

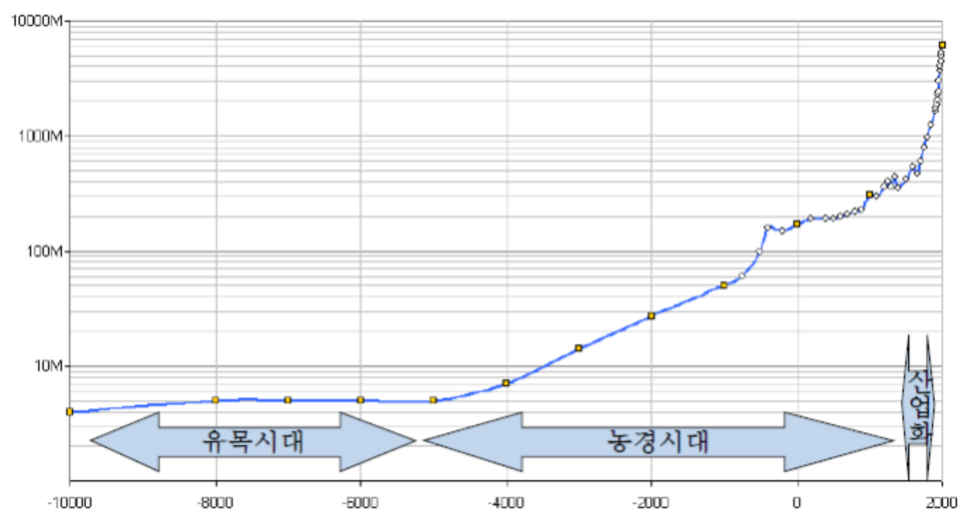
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10^n}\right) f_n(3^n) = \frac{f_1(3)}{10} + \frac{f_2(9)}{10^2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^n - \frac{1}{2} \times \frac{9}{10} - \frac{1}{2} \times \frac{9^2}{10^2} = \frac{897}{200} \text{ 이다.}$$

29 이화여자대학교 모의

제시문1 제시문을 읽고 다음 물음에 답하시오.*

다음은 기원전 10000년부터 서기 2000년까지 인류의 추정 인구수를 시간 t의 함수 $P(t)$로 표시한 그래프이다. 그림에서 세로축은 같은 간격마다 일정한 비율로 값이 커지는 로그 척도로 표시되어 있고, 큰 눈금은 각각 1M(백만), 10M(천만), 100M(일억), 1000M(십억), 10000M(백억)명을 나타낸다. 그래프를 보면 인구수가 유목시대에는 4～5백만명으로 매우 완만하게 증가하다, 그래프를 직선으로 근사할 수 있는 기원전 5000년부터 서기 1600년까지 농경시대 동안은 인구가 거의 일정한 비율로 증가하였고, 1600년 이후 산업화시대에는 매우 큰 비율로 증가하고 있는 것을 알 수 있다.

추정 인구수 P(t), -10000≤t≤2000년



논제 1-i

기원전 5000년 5백만이었던 인구수가 일정한 비율로 증가하여 서기 1600년 5억이 되었다고 할 때, 이 시대 인구가 2배 증가하는데 소요된 평균기간을 구하시오.(단 상용로그 log2의 근삿값은 0.3임.)

* 이화여자대학교 입학처

논제 1-ii

1927년 20억명이었던 인구수는 거의 일정한 증가율을 보이며 증가하여 1970년대 40억명에 도달하였고, 2027년 80억명에 도달할 것으로 예측되고 있다. 이 100년 동안의 연 평균 인구 증가율(%)을 아래 70-배증법칙을 이용하여 근사하여 보시오.

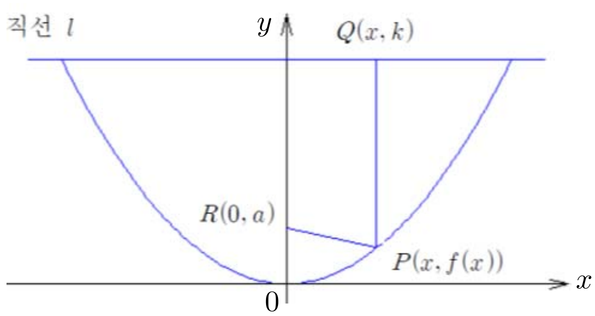
> **70-배증법칙** : 매년 일정한 비율(%)로 증가하는 수열 $\left(1+\frac{\text{비율}}{100}\right)^{\text{연수}}$ 의 값이 2가 되려면 연수×비율의 값은 근사적으로 70과 같다. (참고로 이 근사식은 연수가 비율(%) 보다 큰 경우 유용한 근삿값을 제공한다.)

논제 1-iii

산업화 시대를 전기와 후기로 구분할 때, 전기 350년(16C 후반~20C 초반) 동안 인구수는 일정 비율로 증가하여 4배, 후기 100년(20C 초반~21C 초반) 동안 또 다른 일정 비율로 증가하여 다시 4배로 증가하였다고 하자. 만약 산업화 시대 전기 350년 동안 연 평균 인구 증가율이 과거 전기 추정 값의 $\frac{1}{2}$ 이었고, 후기 100년 동안 연 평균 인구 증가율이 과거 후기 추정 값의 $\frac{1}{4}$ 이라고 가정하면, 이 450년 동안(16C 후반~21C 초반) 인구는 몇 배로 증가되었을지 구하시오.

제시문2 **제시문을 읽고 다음 물음에 답하시오.** *

> 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같이 원점을 지나고, x 축과 직선 l : $y=k\ (k>0)$ 사이에 존재한다. 함수 $y=f(x)$ 위의 임의의 한 점 $\mathrm{P}(x,\ f(x))$ 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 $\mathrm{Q}(x,\ k)$ 라 하자. 고정점 $\mathrm{R}(0,\ a)\ (0<a<k)$ 에 대하여 선분 $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 길이와 선분 $\overline{\mathrm{PR}}$ 의 길이의 합이 항상 일정하다고 할 때, 다음 물음에 답하시오.



논제 2-i

함수 $y=f(x)$ 를 구하시오.

---

* 이화여자대학교 입학처

논제 2-ii

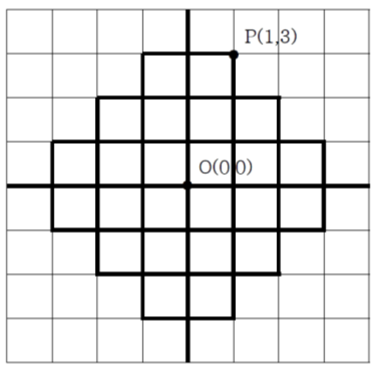
선분 $\overline{PQ}$ 의 길이와 선분 $\overline{PR}$ 의 길이의 곱의 최댓값을 구하시오.

논제 2-ii

삼각형 $\triangle PQR$ 면적의 최댓값을 구하시오.

제시문3 제시문을 읽고 다음 물음에 답하시오. *

그림과 같은 평면 위의 정수 격자점에서 상하좌우 중 한 방향을 골라 한 칸씩 이동하는 것을 시행이라고 하고, 이 때 상하좌우로 이동할 확률을 좌우 각각 p, p, 상하 각각 q, q라 하자. 원점 $O(0, 0)$으로부터 시작하여 n번 시행했을 때 도달한 격자점을 $P(k, l)$라 할 때, 다음 물음에 답하시오.



논제 3-i

4번 시행했을 때 좌표 $P(1, 3)$에 도달할 확률을 $p=\dfrac{1}{3}$, $q=\dfrac{1}{6}$에 대하여 구하시오.

논제 3-ii

n번 시행했을 때 도달한 좌표 $P(k, l)$이 $k \geq 0$, $l \geq 0$, $k+l=n$을 만족할 확률을 p, q에 대하여 구하시오.

논제 3-iii

n번 시행했을 때 도달한 좌표 $P(k, l)$이 부등식 $|k|+|l|<n$을 만족할 확률을 p, q에 대하여 구하시오.

* 이화여자대학교 입학처

논술유형분석

문항 수	수학 3문항	시간	100분
연관 개념	지수•로그 함수, 포물선의 방정식, 산술·기하평균과 부등식, 확률		

제시문분석

제시문1

인류의 추정 인구수에 관한 함수 $\mathrm{P}(t)$ 에 대하여 설명하고 있다.

제시문2

함수 f 의 성질에 대하여 설명하고 있다.

제시문3

좌표평면의 격자점에서 상하좌우로 이동할 확률에 대하여 설명하고 있다.

논제분석

논제 1

인류의 추정 인구수를 나타내는 함수 $\mathrm{P}(t)$ 와 $70-$ 배증법칙을 이용하여 인구수에 관한 여러 가지 문제를 지수와 로그함수에 대한 개념을 바탕으로 해결할 수 있어야 한다.

논제 2

조건을 만족하는 함수가 포물선임을 증명하고 산술기하평균 부등식과 도함수를 이용하여 최댓값에 관한 문제를 해결하게 하고 있다.

논제 3

좌표평면 위의 격자점을 이동하는 경우의 확률을 묻고 있다.

배경지식쌓기

1. 원리합계의 계산

(1) 원금과 이자를 더한 금액을 원리합계라고 한다.

(2) 원금 a 원을 연이율 r 로 n 년간 예금했을 때, 원리합계 S 의 계산은 다음과 같이 두 가지 방법이 있다.

① 단리법 : 원금에만 이자를 더하여 원리합계를 계산하는 방법

$S=a(1+rn)$ ⇦ 공차가 ar 인 등차수열

② 복리법 : 일정한 기간마다 이자를 원금에 더하여 그 원리합계를 다시 원금으로 계산하는 방법, 즉 이자에 다시 이자가 붙는 방법

$S=a(1+r)^n$ ⇦ 공비가 $1+r$ 인 등비수열

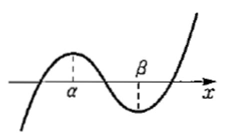
2. 산술 · 기하 · 조화평균 부등식

양수 a, b 에 대하여 $\dfrac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \dfrac{a+b}{2}$ 이고 등호는 $a=b$ 일 때 성립한다.

3. 그래프를 이용한 삼차함수의 극대 · 극소 판정

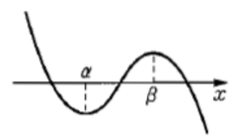
삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 에서 $f'(x)=0$ 의 두 근을 α, $\beta\,(\alpha<\beta)$ 라고 할 때,

$a>0$ 이면



$\begin{cases} x=\alpha\text{에서 극댓값 } f(\alpha) \\ x=\beta\text{에서 극솟값 } f(\beta) \end{cases}$

$a<0$ 이면



$\begin{cases} x=\alpha\text{에서 극솟값 } f(\alpha) \\ x=\beta\text{에서 극댓값 } f(\beta) \end{cases}$

4. 독립시행의 확률

사건 A 가 일어날 확률이 p 이고 n 회 독립시행에서 사건 A 가 r 회 일어날 확률은 ${}_n\mathrm{C}_r\, \mathrm{p}^{\mathrm{r}}\,(1-\mathrm{p})^{\mathrm{n}-\mathrm{r}}$ 이다.

5. 이항정리

자연수 n 에 대하여 $(a+b)^n$ 의 $a^r b^{n-r}$ 의 (이항)계수는 ${}_n\mathrm{C}_r$ 이고

$$(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r\, a^r b^{n-r}$$

이다.

풀어보기

문제 1 질량 a (g) 의 활성탄 A 를 염료 B 의 농도가 c (%) 인 용액에 충분히 오래 담가 놓을 때 활성탄 A 에 흡착되는 염료 B 의 질량 b (g) 는 다음 식을 만족시킨다고 한다.

$$\log\frac{b}{a} = -1+k\log c \text{ (단, } k \text{ 는 상수이다.)}$$

10 g 의 활성탄 A 를 염료 B 의 농도가 8 % 인 용액에 충분히 오래 담가 놓을 때 활성탄 A 에 흡착되는 염료 B 의 질량은 4 g 이다. 20 g 의 활성탄 A 를 염료 B 의 농도가 27 % 인 용액에 충분히 오래 담가 놓을 때 활성탄 A 에 흡착되는 염료 B 의 질량(g)을 구하시오. (단, 각 용액의 양은 충분하다.) (2013년 9월 평가원)

문제 2 좌표평면에서 포물선 $y^2=16x$ 위의 점 A 에 대하여 점 B 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 A 가 원점이면 점 B 도 원점이다.
(나) 점 A 가 원점이 아니면 점 B 는 점 A , 원점 그리고 점 A 에서의 접선이 y 축과 만나는 점을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심이다.

점 A 가 포물선 $y^2=16x$ 위를 움직일 때 점 B 가 나타내는 곡선을 C 라 하자. 점 $(3,\ 0)$ 을 지나는 직선이 곡선 C 와 두 점 P , Q 에서 만나고 $\overline{\mathrm{PQ}}=20$ 일 때, 두 점 P, Q의 x 좌표의 값의 합을 구하시오. (2013년 6월 평가원)

문제 3 한 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수 n 에 대하여

$$f(n)=n+2(-1)^n-2\left[\frac{n}{2}\right]$$

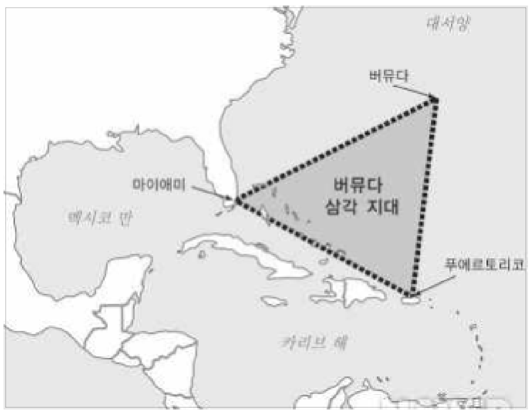
이라 하자. 한 개의 주사위를 5 번 던져서 나온 눈의 수 n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 에 대하여 $f(n_1)+f(n_2)+f(n_3)+f(n_4)+f(n_5)=4$ 일 확률을 $\frac{a}{b}$ 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하시오. (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대 정수이고, a, b 는 서로소인 자연수이다.) (2006년 교육청)

읽기자료

고찰을 통한 최적화 문제해결

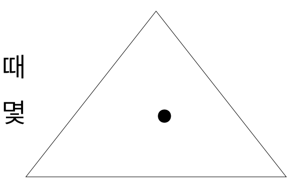
포물선은 정직선과 한 정점과의 거리가 같은 점들의 집합이다. 이 정의를 이용하여 버뮤다 삼각지에서 일어나는 통신장애에 관련된 실생활 문제를 해결해 보자.

그림과 같이 버뮤다 제도를 한 점으로 하고, 플로리다와 푸에르토리코를 잇는 선을 밑변으로 하는 삼각형의 해역을 ‘버뮤다 삼각지역’이라 한다. 이 구역에서는 전자기기들이 작동되지 않아 오래 전부터 많은 선박, 항공기 등이 실종되었으므로 버뮤다 삼각지역을 ‘마의 바다’라고도 부른다.

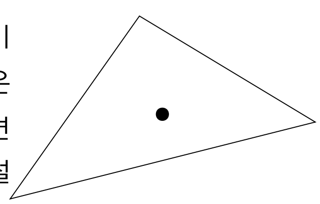


버뮤다 삼각지역과 같이 전자기기가 작동되지 않는 지역을 ‘위험지역’이라 하자. 위 그림에서 위험지역은 버뮤다 삼각지대라 불리는 삼각형 내부와 경계에 분포한다. 위험지역 내에 전자기기들이 작동될 수 있는 점 또는 지역을 ‘안전지역’이라 하자. 안전지역은 위험지역 내의 한 정점 X 에서 어느 한 경계선과의 거리가 같은 점들의 집합이다. 안전지역들이 두 개 이상 겹치는 점 또는 지역을 ‘최적화된 안전지역’이라 하자.

문제 1-1. 그림과 같은 정삼각형의 내부와 경계가 위험지역이고, 이때 무게중심을 X 라 하자. 이 위험지역에서 최적화된 안전지역은 몇 군데이며, 그 위치는 어디인지 설명하시오.

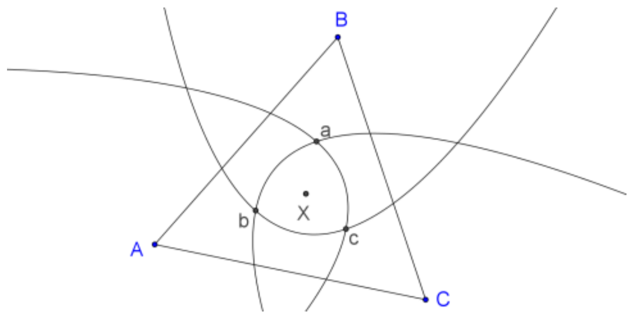


문제 1-2. 그림과 같은 일반적인 삼각형의 내부와 경계가 위험지역이고, 한 정점을 X 라 하자. 이 위험지역에서 최적화된 안전지역은 몇 군데이며, 그 위치는 어디인지 설명하시오. 점 X 의 위치를 변화시킨다면 최적화된 안전지역의 위치와 개수는 어떻게 되는지 설명하시오.



〈문제해결활동〉

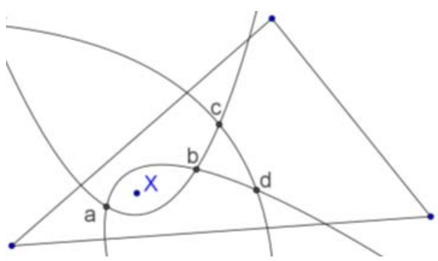
문제 1-1에서 최적화된 안전지역은 경계와 무게중심 X 와의 거리가 같은 지점들의 집합을 찾고, 그 집합들의 교점을 찾는 것이다. 이러한 것들을 GeoGebra를 통해 직관적으로 관찰할 수 있다.



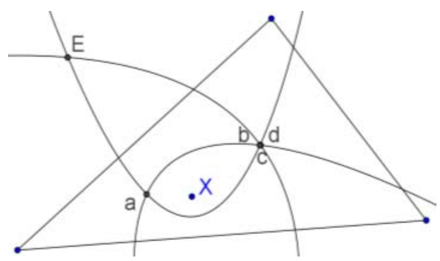
정삼각형에서의 안전지역의 위치와 개수

이 지역에서의 최적화된 안전지역은 3군데이며, 이를 찾는 과정을 예를 들어 설명하면 최적화된 안전지역 a 는 정삼각형의 영역 안에서 경계 $\overline{BC}$ 와 무게중심 X 로 만들어지는 집합과 $\overline{AB}$ 와 무게중심 X 로 만들어지는 집합과의 교점으로 찾아낼 수 있다. 이러한 지역을 찾아내는데 있어 정직선과 한 정점과의 거리가 같은 점들의 집합인 포물선은 훌륭한 도구가 된다.

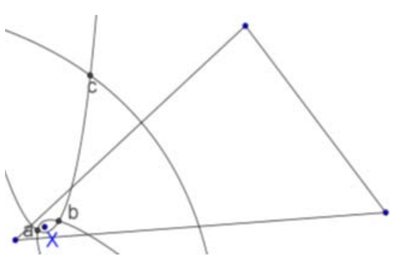
문제 1-2의 답은 일반적인 삼각형에서의 위험지역 내부의 점의 변화에 따른 안전지역의 위치와 개수 변화를 그림과 같이 관찰하여 직관적으로 얻을 수 있다.



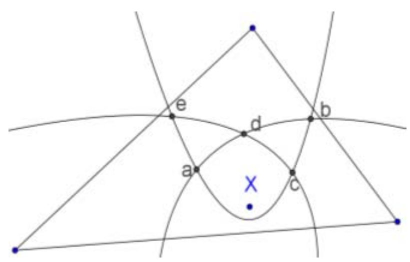
최적화된 안전지역 4개



최적화된 안전지역 2개



최적화된 안전지역 2개



최적화된 안전지역 5개

일반적 삼각형의 점 X 의 위치에 따른 최적화된 안전지역의 변화

위와 같이 삼각형의 내부의 점 X의 위치에 따라 최적화된 안전지역의 개수와 위치가 변하는 것을 관찰할 수 있으며, 처음 주어진 삼각형의 모양에 따라서 최적화된 안전지역의 위치와 모양은 더 다양하게 변화함을 확인할 수 있다.
결론적으로 GeoGebra를 사용함으로써 점 X의 위치에 따라 최적화된 안전지역의 위치와 개수가 다양하게 변함을 직관적으로 관찰할 수 있다. 삼각형 모양으로 주어진 지역 외에도 다각형, 원 등 변화 가능한 다양한 모양이 존재한다. 이때 이를 수학적으로 계산하여 안전지역을 찾아내는 것은 거의 불가능하지만, 이 문제는 이차곡선(포물선)과 관련된 문제이므로 규칙성을 가지고 있고, GeoGebra를 활용함으로써 이 문제 상황을 직관적으로 접근할 수 있기 때문에 문제해결이 가능할 것이다.

예시답안

풀어보기

문제 1

$10\,\mathrm{g}$의 활성탄 A를 염료 B의 농도가 8%인 용액에 담가 놓으면 A에 흡착되는 염료 B의 질량이 $4\,\mathrm{g}$이므로 $\log\frac{4}{10} = -1 + k\log 8$이다. 이것을 정리하면, $2\log 2 - 1 = -1 + 3k\log 2$이므로 $k = \frac{2}{3}$이다.

$20\,\mathrm{g}$의 활성탄 A를 염료 B의 농도가 27%인 용액에 담가 놓으면 A에 흡착되는 염료 B의 질량을 $x\,\mathrm{g}$이라 하면 $\log\frac{x}{20} = -1 + \frac{2}{3}\log 27$이다. $\log\frac{x}{2} - 1 = -1 + 2\log 3$이므로 $\log\frac{x}{2} = \log 3^2$이다. 따라서 $x = 18(\mathrm{g})$이다.

문제 2

$\mathrm{A}(a,\ b)$이라 두면 접선은 $by = 8(x+a)$이고 $x=0$이면 $y = \frac{8a}{b}$이므로 y축과의 교점은 $\mathrm{D}\left(0,\ \frac{8a}{b}\right)$이다. 이때, $b^2 = 16a$이므로 $\frac{8a}{b} = \frac{b}{2}$이다. $\therefore\ \mathrm{D}\left(0,\ \frac{b}{2}\right)$.

따라서, $\triangle\mathrm{OAD}$의 무게중심은 $\mathrm{B}\left(\frac{0+0+a}{3},\ \frac{0+\frac{b}{2}+b}{3}\right) = \left(\frac{a}{3},\ \frac{b}{2}\right)$이다.

$\frac{a}{3} = x$, $\frac{b}{2} = y$라 두면 $a = 3x$, $b = 2y$, $b^2 = 16a$이므로 $4y^2 = 16\times 3x$이고 따라서 곡선 C의

방정식은 $y^2=12x$ 이다.

이제 P, Q 의 x 좌표를 각각 x_1, x_2 라 두고, 포물선 $y^2=12x$ 의 초점을 F 라 한다. 포물선 $y^2=12x$ 의 준선은 $x=-3$ 이므로, 다음 식이 성립한다.

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{QF}}=(3+x_1)+(3+x_2)=x_1+x_2+6=20$$

$$\therefore\ x_1+x_2=14$$

문제 3

주어진 조건에 의하면, $f(1)=f(3)=f(5)=-1$, $f(2)=f(4)=f(6)=2$ 이다.

짝수의 눈이 나온 횟수를 X, 홀수의 눈이 나온 횟수를 Y 라 하면 던진 횟수는 5 이므로 $X+Y=5\cdots\cdots$㉠

$f(n_1)+f(n_2)+f(n_3)+f(n_4)+f(n_5)=4$ 이므로 $2X-Y=4\cdots\cdots$㉡

㉠과 ㉡을 연립하면 $X=3$, $Y=2$ 이다. 따라서 주사위의 눈이 짝수가 3 번, 홀수가 2 번 나올 확률은

$${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$$

$$\therefore\ a+b=5+16=21$$

논제 1- i

기원전 5000 년부터 서기 1600 년까지의 추정 인구수 $\mathrm{P}(t)$ 는 상수 a, b 에 대하여 $\log\mathrm{P}(t)=at+b$ 이다. 2 배 증가하는데 소요된 평균기간을 α 라 하면

$$\log\mathrm{P}(t+\alpha)=\log 2\mathrm{P}(t)$$

$$a(t+\alpha)+b=\log 2+at+b$$

$$\alpha=\frac{\log 2}{a}$$

이다. $\dfrac{\mathrm{P}(1600)}{\mathrm{P}(-5000)}=\dfrac{5억}{5백만}=100$ 에서 양변에 상용로그를 취하여 정리하면

$$1600a-\{(-5000)a\}=2\,,\ a=\frac{2}{6600}=\frac{1}{3300}$$

이다. 따라서 평균기간 $\alpha=3300\times\log 2=990$ 년이다. 즉, 약 1,000 년마다 인구수가 두 배로 증가한다.

논제 1- ii

1927 년부터 2027 년까지 100 년 동안 인구수는 4 배 증가하였으므로 인구수가 2 배가 되는데 50 년이 걸린다. 70− 배증법칙에 의해 (연 평균 인구 증가율)$\times 50=70$ 이므로 연 평균 인구 증가율은 $\dfrac{70}{50}=1.4\,(\%)$ 이다.

논제 1-iii

문제 상황을 표로 정리하면 아래와 같다.

인구수가 2배가 되는 소요기간(년)	70-배증법칙에 따른 연 평균 인구 증가율(%)	문제의 조건을 적용한 연 평균 인구 증가율(%)	70-배증법칙에 따라 인구수가 2배가 되는데 소요되는 기간(년)
전기 175년	$\frac{70}{175}$	$\frac{70}{175}\times\frac{1}{2}=\frac{70}{350}$	$70\times\frac{350}{70}=350$
후기 50년	$\frac{70}{50}$	$\frac{70}{50}\times\frac{1}{4}=\frac{70}{200}$	$70\times\frac{200}{70}=200$

그러므로 전기 350년 동안 인구수는 2배가 되고 후기 100년 동안 인구수는 $\sqrt{2}$ 배가 된다. 따라서 450년 동안 인구수는 $2\sqrt{2}$ 배가 된다.

다른 풀이 전기 350년 동안 인구수가 4배가 되었으므로 2배가 되는데 175년이 소요된다. 마찬가지로 후기 100년 동안 인구수가 4배가 되었으므로 2배가 되는데 50년이 소요된다. 그런데 전기 인구증가율이 $\frac{1}{2}$ 로 감소하게 되면 2배 되는데 350년이 소요될 것이고 후기 인구증가율이 $\frac{1}{4}$ 로 감소하게 되면 2배 되는데 200년이 소요될 것이다.

따라서 전기 350년 동안 $2^{350/350}=2$ 배 증가, 후기 $2^{\frac{100}{200}}=\sqrt{2}$ 배 증가해서 450년 동안 $2\sqrt{2}$ 배 증가되었을 것이다.

논제 2-i

점 P가 원점에 있을 때, $\overline{PQ}+\overline{PR}=a+k$ 이므로

$$a+k=(k-y)+\sqrt{x^2+(y-a)^2}$$

$$x^2+(y-a)^2=(y+a)^2$$

$$y=\frac{1}{4a}x^2\ (-2\sqrt{ak}\le x\le 2\sqrt{ak})$$

이다. 따라서 $f(x)=\frac{1}{4a}x^2\ (-2\sqrt{ak}\le x\le 2\sqrt{ak})$ 이다.

논제 2-ii

산술기하평균에 의해 $\overline{PQ}\times\overline{PR}\le\frac{(\overline{PQ}+\overline{PR})^2}{4}=\frac{(a+k)^2}{4}$ 이다.

등호가 성립되는 경우가 있는지 알아보자. 점 P가 원점이면 $\overline{PQ}<\overline{PR}$ 이고 점 P가 직선 l 위에 있으면 $\overline{PQ}>\overline{PR}$ 이다. 중간값 정리에 의해 $\overline{PQ}=\overline{PR}=\frac{a+k}{2}$ 가 되는 점 P가 존재하므로

등호가 성립한다. 따라서 최댓값은 $\dfrac{(a+k)^2}{4}$ 이다.

다른 풀이 $\overline{\mathrm{PQ}} \times \overline{\mathrm{PR}} = \left(k-\dfrac{x^2}{4a}\right)\left(k+a-k+\dfrac{x^2}{4a}\right)=\left(k-\dfrac{x^2}{4a}\right)\left(a+\dfrac{x^2}{4a}\right)$ 이므로

$g(x)=\left(k-\dfrac{x^2}{4a}\right)\left(a+\dfrac{x^2}{4a}\right)$ 라 하면 $g'(x)=-\dfrac{x}{4a^2}\left(x^2-2a(k-a)\right)$ 이고 $x=\pm\sqrt{2a(k-a)}$ 에서

최댓값 $\dfrac{(a+k)^2}{4}$ 을 갖는다. 따라서 최댓값은 $\dfrac{(a+k)^2}{4}$ 이다.

논제 2-iii

함수 f 가 y 축 대칭이므로 $0 \le x \le 2\sqrt{ak}$ 인 경우만 고려하자.

$\triangle$PQR 의 넓이 $S(x)=\dfrac{1}{2}\times\left(k-\dfrac{1}{4a}x^2\right)\times x=-\dfrac{1}{8a}x^3+\dfrac{1}{2}kx$ 이다.

$S'(x)=-\dfrac{3}{8a}x^2+\dfrac{1}{2}k$ 이므로 증감표에 의해 $x=2\sqrt{\dfrac{ak}{3}}$ 에서 극댓값은 $\dfrac{2k}{3}\sqrt{\dfrac{ak}{3}}$ 이다.

$S(0)=S\left(2\sqrt{ak}\right)=0$ 이므로 $\triangle$PQR 의 넓이의 최댓값은 $\dfrac{2k}{3}\sqrt{\dfrac{ak}{3}}$ 이다.

논제 3- i

4 번 시행하여 $(1,\ 3)$ 에 도달하는 경우는 우 1 회, 상 3 회뿐이므로 ${}_4\mathrm{C}_3\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{6}\right)^3$ 이다.

논제 3- ii

n 번 시행하여 $(k,\ n-k)\,(k,\ n-k \ge 0)$ 에 도달하는 경우는 우 k 회, 상 $n-k$ 회뿐이므로

${}_n\mathrm{C}_k p^k q^{n-k}$ 이다. 따라서 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\, p^k q^{n-k}=(p+q)^n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ 이다.

논제 3-iii

n 번 시행했을 때 도달한 좌표 $\mathrm{P}(k,\ l)$ 이 부등식 $|k|+|l|<n$ 을 만족할 확률은

$$1-(\,|k|+|l|=n\text{일 확률})$$

이다. 이제 $|k|+|l|=n$ 일 확률을 구하자.

$k,\ l$의 부호 4가지 경우의 확률은 $k,\ l \ge 0$인 확률 $(p+q)^n$과 같다. 또한 4가지 각 경우의 등호가 성립되는 네 점 $(\pm n,\ 0)$, $(0,\ \pm n)$은 두 번씩 계산되어지므로 $|k|+|l|=n$ 일 확률은 $4(p+q)^n-2(p^n+q^n)$ 이다. 따라서 n 번 시행했을 때 도달한 좌표 $\mathrm{P}(k,\ l)$ 이 부등식 $|k|+|l|<n$ 을 만족할 확률은

$$1-4(p+q)^n+2(p^n+q^n) \text{ 이다.}$$

30 이화여자대학교 수시

논제 1 제시문을 읽고 다음 물음에 답하시오.*

다음은 해발고도 h가 높아질수록 대기압 P가 낮아지고, 이에 따라 물의 끓는점 T가 낮아지는 현상을 수학적으로 기술한 것이다. 이에 관하여 (단, 문제에서 주어진 수치는 계산의 편의를 위하여 실제 측정값을 다소 조정한 것이다.)

논제 1-i

해발고도 h의 변화에 따른 대기압 $P(h)$의 변화비율 $\dfrac{1}{P(h)}\dfrac{dP}{dh}$를 $f(h)$라 할 때, 대기압 $P(h)$를 대기압의 변화비율 $f(h)$와 해수면($h=0$)에서의 대기압 $P_0 = P(0)$을 이용하여 구하시오.

논제 1-ii

대류권에서 대기압의 변화비율 $f(h)$는 h에 무관하게 거의 일정한 값을 가지는데, 이 값을 상수 k로 가정하자. 해발고도 5,680 (m) 에서의 대기압이 $\dfrac{1}{2}P_0$라 할 때, 상수 값 k와 해발고도가 약 8,520(m) 인 히말라야 로체봉에서의 대기압 P_L을 구하시오.

논제 1-iii

압력이 낮아지면 액체의 끓는점도 함께 낮아진다. 물의 경우 $P_0 = 1$(기압) 일 때 절대온도 $T_0 = 373(K)$ 에서 끓는다. 하지만 압력$\left(\dfrac{1}{30} < P < 3\right)$이 변화하면 물의 끓는점 $T(P)$는 근사적으로 $T(P) = \dfrac{T_0}{1-a\log P}$의 관계를 만족하고, $P = \dfrac{1}{2}$(기압) 일 때 $T\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{373}{1.05}(K)$ 에서 끓는다. 어떤 산에 올라가서 물을 가열하였더니 $T_H = \dfrac{373}{1.0125}(K)$ 에서 끓었다고 할 때, 이 지점의 해발고도 H를 구하시오. (단, log는 상용로그이다.)

---

* 이화여자대학교 입학처

논제 2 주어진 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a, b>0)$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

논제 2- i

임의의 실수 m 을 기울기로 하는 타원의 두 접선 사이의 거리를 m 에 대한 함수 $l(m)$ 으로 구하시오.

논제 2- ii

타원 밖의 점 P에서 그은 타원의 두 접선이 서로 수직할 때, 이러한 점 P 의 자취를 나타내는 방정식을 구하시오.

논제 2- ii

타원에 외접하는 직사각형의 면적의 최댓값 S 를 구하시오.

논제 3 **제시문을 읽고 다음 물음에 답하시오.**

모든 실수에서 정의된 함수 $f(x)$ 는 다음 두 조건을 만족한다.

1. 정의역에서 함수 $f(x)$ 는 연속이고 미분가능하다.
2. 정의역에서 함수 $f(x)$ 는 증가한다.

위의 두 조건을 만족하는 함수 $f(x)$ 에 대하여, 함수 $g(x)$ 는 모든 실수에서 $g(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ 와 같이 정의된다.

논제 3- i

임의의 실수 x 에 대하여 $g''(x)\ge 0$ 임을 보이시오.

논제 3- ii

임의의 양의 실수 a 에 대하여, 폐구간 $[0, a]$ 에서 $g(x)\le \dfrac{g(a)}{a}\cdot x$ 임을 보이시오.

논제 3-iii

임의의 양의 실수 a 에 대하여, 함수 $g(x)$ 가 다음 부등식을 만족함을 보이시오.

$$\int_0^a g(x)\,dx \le \frac{a}{2}\int_0^a f(x)\,dx$$

논제 3-iv

임의의 양의 실수 c 와 $d(\ge c)$ 에 대하여, $f(c)\ge 0$ 이면 함수 $g(x)$ 가 다음 부등식을 만족함을 보이시오.

$$(d-c)\int_0^c f(x)\,dx \le \int_c^d g(x)\,dx \le \frac{d-c}{2}\left(\int_0^c f(x)\,dx+\int_0^d f(x)\,dx\right)$$

논술유형분석

문항 수	수학 3문항	시간	100분
연관 개념	지수•로그 함수, 타원의 방정식, 산술·기하평균과 부등식, 정적분		

제시문분석

논제1

해발고도 h 가 높아질수록 대기압 P 가 낮아지고, 이에 따라 물의 끓는점 T 가 낮아지는 현상을 설명하고 있다.

논제2

타원의 방정식의 기본형을 제시하고 있다.

논제3

두 함수 f, g 를 설명하고 있다.

논제분석

논제 1

함수의 미분가능성의 개념을 이해하고 함수의 연속성을 알고 있는지를 묻는 문항이다.

논제 2

이차곡선과 접선의 성질을 활용하여 얻은 조작적인 경험을 바탕으로 면적에 관한 함수를 구성하고 그 함수의 최댓값을 묻고 있다.

논제 3

함수와 변수, 정적분을 중심으로 개념을 이해하고 논리적인 사고과정을 통해 주어진 부등식의 증명을 묻고 있다.

배경지식쌓기

1. 타원의 접선의 방정식

(1) 기울기 m 이 주어졌을 때 ⇨ $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$

(2) 접점 $(x_1,\ y_1)$ 이 주어졌을 때 ⇨ $\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

(3) 타원 밖의 한 점이 주어졌을 때 ⇨ 접점을 $(x_1,\ y_1)$ 이라 놓고 공식을 이용
기울기를 m 이라 놓고 공식을 이용
판별식을 이용

2. 곡선의 오목, 볼록

(1) 곡선상의 두 점 A , B 에 대하여 $\overparen{\mathrm{AB}}$ 가 $\overline{\mathrm{AB}}$ 보다 아래에 있으면 위로 오목이라 한다. 이 경우 두 점 A , B 사이에서 극소가 되는 점은 단 한 개 뿐이다.
곡선상의 두 점 A , B 에 대하여 $\overparen{\mathrm{AB}}$ 가 $\overline{\mathrm{AB}}$ 보다 위에 있으면 위로 볼록이라 한다.
곡선상의 한 점의 좌우에서 위로 오목, 볼록 상태가 변할 때, 이 점을 변곡점이라 한다.
(2) $f''(x)>0$ 이면 이 곡선은 위로 오목
(3) $f''(x)<0$ 이면 이 곡선은 위로 볼록
(4) $f''(x_1)=0$ 이고, $x=x_1$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 변하면 $(x_1,\ f(x_1))$ 은 변곡점

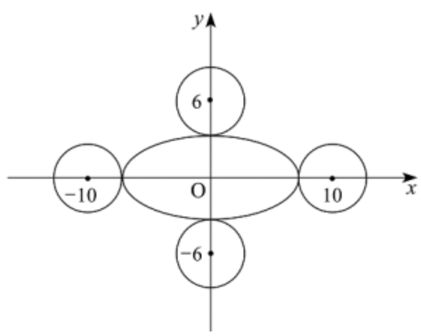
풀어보기

문제 1 직선 $y=2-x$ 가 두 로그함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$ 의 그래프와 만나는 점을 각각 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 라 할 때, [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (2008년 대수능)

[보 기]		
ㄱ. $x_1 > y_2$	ㄴ. $x_2 - x_1 = y_1 - y_2$	ㄷ. $x_1 y_1 > x_2 y_2$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제 2 그림과 같이 좌표평면에 중심의 좌표가 각각 $(10, 0)$, $(-10, 0)$, $(0, 6)$,$(0, -6)$ 이고 반지름의 길이가 모두 같은 4 개의 원에 동시에 접하고, 초점이 x 축 위에 있는 타원이 있다.



이 타원의 두 초점 사이의 거리가 $4\sqrt{10}$ 일 때, 장축의 길이를 구하시오. (단, 네 원의 중심은 타원의 외부에 있다.) (2007년 교육청)

문제 3 함수 $f(x)=3(x-1)^2+5$ 에 대하여 함수 $F(x)$ 를 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 라 하자. 미분가능한 함수 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $F(g(x))=\frac{1}{2}F(x)$ 를 만족시킨다. $g'(2)=p$ 일 때, $30p$ 의 값을 구하시오. (2012년 대수능)

읽기자료

유체의 힘과 압력에서 적분의 활용*

잠수부들은 더 깊이 잠수함에 따라 수압이 증가한다는 사실을 실감하게 된다. 이것은 그들 위에 물의 무게가 증가하기 때문이다. 일반적으로, 넓이가 $A[\mathrm{m}^2]$ 인 얇은 수평판이 그림에서처럼 액체표면 밑 $d[\mathrm{m}]$ 깊이에 밀도가 $1\,\mathrm{m}^3$ 당 $\rho[\mathrm{kg}]$ 인 액체 속에 잠겨 있다고 가정하자.

그 판 바로 위에 있는 액체의 부피가 $V = Ad$ 이므로, 그 액체의 질량은 $m = \rho V = \rho Ad$ 이다. 따라서 그 판 위에 액체가 미치는 힘은 $F = mg = \rho g Ad$ 이다. 여기서 g 는 중력가속도이다. 그 판위에 가해지는 압력(pressure) P 는 다음과 같이 단위면적당 힘으로 정의된다.

$$P = \frac{F}{A} = \rho g d$$

압력의 SI 단위는 파스칼이라 불리는 m^2 당 뉴턴(약어 : $1N/\mathrm{m}^2 = 1\ \mathrm{Pa}$) 이다. 이 단위는 작으므로 킬로파스칼($\mathrm{kPa}$) 이 자주 쓰인다. 예컨대, 물의 밀도가 $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$ 이기 때문에 $2\,\mathrm{m}$ 깊이의 수영장 밑바닥의 압력은

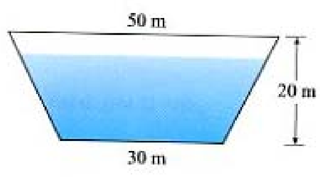
$$P = \rho g d = 1000\,\mathrm{kg/m^3} \times 9.8\,\mathrm{m/s^2} \times 2\,\mathrm{m} = 19{,}600\,\mathrm{Pa} = 19.6\,\mathrm{kPa}$$

이다. 유체압력(fluid pressure)의 중요한 원리인 한 액체 속의 어느 점에서든 가해지는 압력은 모든 방향에서 동일하다는 사실이 실험으로 입증되었다.(잠수부는 귀와 눈에 가해지는 수압이 같다고 느낀다.) 그러므로 질량밀도 ρ 인 유체 속의 깊이 d 에서 어느 방향에서든 받는 압력은

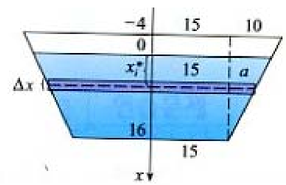
$$P = \rho g d = \delta d$$

이다. 이 식은 유체 속에 수직판이나 벽 또는 댐을 향하여 가해지는 유체정역학적인 힘(hydrostatic force)을 결정하는 데 도움이 된다. 이것은 간단한 문제가 아니다. 왜냐하면 수압은 일정하지 않고 깊이가 증가함에 따라 수압도 증가하기 때문이다.

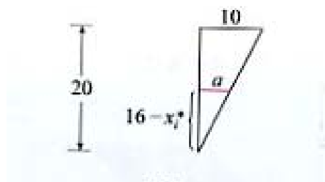
(예제) [그림]에서 보여지는 사다리꼴 모양의 댐이 있다. 그 높이는 20m 이고 윗 폭은 50m 이며 아랫폭은 30m 이다. 수위가 댐의 꼭대기로부터 4m 일 때 수압으로 인해 댐에 가해지는 힘을 구하여라.



[그림 1]



[그림 2]



[그림 3]

풀이) [그림2]와 같이 수면에서 원점이 되도록 수면과 직교하는 x 축을 잡으면 물의 깊이가 16m 이므로 구간 $[0,\ 16]$ 의 점 x_i 에 대한 정규분할 P 를 생각하며 $x_{i^*} \in [x_{i-1},\ x_i]$ 를 택한다. 댐의 i 번째 수평부분은 높이 Δx , 폭 w_i 인 직사각형으로 근사화된다.

[그림3]의 닮은 삼각형으로부터 $\dfrac{a}{16-x_i^*} = \dfrac{10}{20}$ 이고 $a = 8 - \dfrac{x_i^*}{2}$ 이므로

$w_i = 2(15+a) = 2(15+8-\dfrac{x_i^*}{2})$ 이다. 만약 A_i 가 i 번째 부분의 넓이라면

$$A_i \approx w_i \Delta x \approx (46 - x_i^*)\Delta x$$

이다. 만약 Δx 가 작으면 i 번째 가해지는 압력 P_i 는 거의 일정하며 식 $P = \rho g d = \delta d$ 를 이용하여 $P_i \approx 1000 g x_i^*$ 이다. 그러므로 i 번째 부분에 미치는 유체정역학적인 힘 F_i 는 압력과 넓이의 곱이다. 즉, $F_i = P_i A_i \approx 1000 g x_i^* (46 - x_i^*)\Delta x$ 이다. 이런 힘을 더하여 $n \to \infty$ 일 때, 극한을 취하면, 댐에 가해지는 전체의 유체정역학적인 힘을 얻는다. 즉,

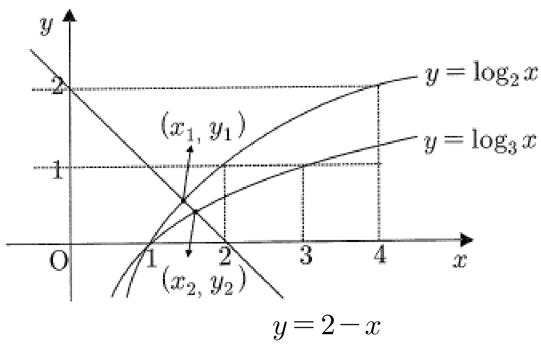
$$\begin{aligned} F &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 1000 g x_i^* (46 - x_i^*)\Delta x \\ &= \int_0^{16} 1000 g x (46 - x)\,dx \\ &= 1000(9.8)\int_0^{16} (46x - x^2)\,dx \\ &= 9800\left[23x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^{16} \approx 4.43 \times 10^7 \mathrm{N} \end{aligned}$$

* 미분적분학(2011). James Stewart.

예시답안

풀어보기

문제 1



ㄱ. 위 그림에서 $x_1>1$, $y_2<1$ 이므로 $x_1>y_2$ 이다. [참]

ㄴ. $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ 는 직선 $y=2-x$ 위의 점이므로 직선의 기울기가 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-1$ 이다.

따라서 $x_2-x_1=-(y_2-y_1)=y_1-y_2$ 이다. [참]

ㄷ. $x_1y_1-x_2y_2=x_1(2-x_1)-x_2(2-x_2)=({x_2}^2-{x_1}^2)-2(x_2-x_1)=(x_2-x_1)(x_2+x_1-2)$

$x_2-x_1>0$ 이고, $x_1>1$, $x_2>1$ 에서 $x_1+x_2>2$ 이므로 $x_1y_1-x_2y_2>0$

$\therefore\ x_1y_1>x_2y_2$ [참]

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

문제 2

원의 반지름의 길이를 r 라 하면 타원의 장축과 단축의 길이는 각각 $2(10-r)$, $2(6-r)$ 이므로

타원의 방정식은 $\dfrac{x^2}{(10-r)^2}+\dfrac{y^2}{(6-r)^2}=1$ 이다.

타원의 두 초점 사이의 거리가 $4\sqrt{10}$ 이므로

$$(10-r)^2-(6-r)^2=(2\sqrt{10})^2 \qquad \therefore\ r=3$$

따라서 타원의 장축의 길이는 $2(10-3)=14$ 이다.

문제 3

$$f(x)=3(x-1)^2+5 \quad \cdots ㉠$$

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt \quad \cdots ㉡$$

$$F(g(x))=\frac{1}{2}F(x) \quad \cdots ㉢$$

이라고 하자.

i) ㉢의 양변을 미분하면 $F'(g(x))g'(x)=\frac{1}{2}F'(x)$ 이다.

이 식에 $x=2$ 를 대입하면 $F'(g(2))g'(2)=\frac{1}{2}F'(2) \cdots ①$

ii) ㉡의 양변을 미분하면

$F'(x)=f(x)=3(x-1)^2+5=3x^2-6x+8$

이 식에 $x=2$ 를 대입하면 $F'(2)=8 \quad \cdots ⓐ$

iii) ㉢의 식에 $x=2$ 를 대입하면 $F(g(2))=\frac{1}{2}F(2) \quad \cdots ②$

iv) ㉠을 ㉡에 대입하여 적분을 하면

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x \{3(t-1)^2+5\}\,dt$$

$$=\int_0^x (3t^2-6t+8)\,dt=x^3-3x^2+8x \quad \cdots ③$$

v) ③의 식에 ②를 적용하면

$$\{g(2)\}^3-3\{g(2)\}^2+8\{g(2)\}=\frac{1}{2}\cdot\{2^3-3\cdot2^2+8\cdot2\}=6$$

$g(2)=t$ 를 치환하면 $t^3-3t^2+8t=6$, $t^3-3t^2+8t-6=0$

$(t-1)(t^2-2t+6)=0$, $t=1$, $\therefore\ g(2)=1$

vi) $F'(g(2))=F'(1)=5 \quad \cdots ⓑ$

vii) ⓐ와 ⓑ를 ①에 대입하면 $5\cdot g'(2)=4$, $g'(2)=\frac{4}{5}$

$$\therefore\ 30p=24$$

논제 I- i *

변화비율에 대한 관계식 $\frac{1}{P(h)}\frac{dP}{dh}=f(h)$ 의 양변을 0 부터 h 까지 정적분하면

$\int_0^h \frac{1}{P(h)}\frac{dP}{dh}dh=\ln P(h)-\ln P(0)=\int_0^h f(h)dh$ 와 같은 관계식을 얻을 수 있다.

* 이화여대 예시답안

$\ln P(h) = \ln P_0 + \int_0^h f(h)dh$ 이므로, $P(h) = P_0\, e^{\int_0^h f(h)dh}$ 이다.

논제 1- ii *

$P(h) = P_0\, e^{\int_0^h kdh} = P_0\, e^{kh}$ 이다. $P(5680) = P_0\, e^{k \cdot 5680} = \frac{1}{2}P_0$ 이므로,

$k = \frac{1}{5680}\ln\frac{1}{2} = -\frac{\ln 2}{5680}$ 이다. 따라서 $P(h) = P_0 e^{\frac{h}{5680}\ln\frac{1}{2}} = P_0\left(\frac{1}{2}\right)^{h/5680}$ 이고,

$P(8520) = P_0\left(\frac{1}{2}\right)^{8520/5680} = P_0\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2} = P_0\frac{1}{2\sqrt{2}}$ 이다.

논제 1- iii **

$T\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{373}{1-a\log 0.5} = \frac{373}{1.05}$ 이므로, $a = \frac{0.05}{\log 2}$ 이다.

$T(P_H) = \frac{373}{1.0125} = \frac{373}{1-a\log P_H}$ 이므로, $\log P_H = -\frac{0.0125}{a} = -\frac{0.0125}{0.05}\log 2$ 이고,

$P_H = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/4}$ 이다. $P(H) = \left(\frac{1}{2}\right)^{H/5680} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/4}$ 이므로 $H = \frac{5680}{4} = 1420(\mathrm{m})$ 이다.

다른 풀이

(논제1- ii)의 결과로부터 합성합수를 구하면,

$$T(h) = \frac{373}{1-a\log(1/2)^{h/5680}} = \frac{373}{1+a\cdot\log 2\cdot h/5680}$$

와 같다.

논제 2- i ***

주어진 실수 m 을 기울기로 가지는 두 접선의 방정식은 $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2+b^2}$ 으로 주어지며, 평행한 두 직선의 거리는 공식에 의하여

$$l(m) = \frac{\left|\sqrt{a^2m^2+b^2} - \left(-\sqrt{a^2m^2+b^2}\right)\right|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{2\sqrt{a^2m^2+b^2}}{\sqrt{m^2+1}}$$

으로 주어진다.

---

* 이화여대 예시답안
** 이화여대 예시답안
*** 이화여대 예시답안

다른 풀이

주어진 실수 m을 기울기로 가지는 두 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ 으로 주어지며, 두 평행한 직선이 원점에서 같은 거리에 있으므로 직선과 한 점의 거리 공식 $\left(\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$에 의하여 $l(m)=2\dfrac{|0-m\cdot 0+\sqrt{a^2m^2+b^2}|}{\sqrt{m^2+1}}=\dfrac{2\sqrt{a^2m^2+b^2}}{\sqrt{m^2+1}}$ 로 구해진다.

논제 2-ii*

타원 밖의 점 P를 $(X,\ Y)$라고 할 때, 점 P를 지나는 기울기 m인 직선의 방정식은 $y=m(x-X)+Y$로 쓸 수 있다. 이때 기울기 m으로 주어진 타원의 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ 으로 구해지므로 $-mX+Y=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ 이다. 양변을 제곱하며 좌변에 모아 m에 관하여 정리하면

$$(X^2-a^2)m^2-2XYm+(Y^2-b^2)=0$$

로 주어지며, 두 접선이 수직하므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$$\frac{Y^2-b^2}{X^2-a^2}=-1\quad(X\neq\pm a)$$

이다. 따라서 네 점 $(\pm a,\ \pm b)$을 제외한 원 $X^2+Y^2=a^2+b^2$ 위의 점 P에서 서로 수직인 두 접선을 그을 수 있다. 이때 외부의 네 점 $(\pm a,\ \pm b)$에서도 수직인 두 접선 $x=\pm a,\ y=\pm b$을 그을 수 있으므로, 수직인 두 접선을 가지는 타원 밖은 점들의 자취는 원의 방정식 $X^2+Y^2=a^2+b^2$ 을 만족한다.

논제 2-iii**

주어진 타원에 외접하는 직사각형은 서로 수직인 기울기를 가지는 평행한 두 쌍의 접선으로 결정됨을 알 수 있다. 따라서 기울기 $m,\ -\dfrac{1}{m}$ $(m\neq 0)$에 대하여 외접하는 직사각형의 면적은 기울기 m을 가지는 두 평행한 접선의 거리와 기울기 $-\dfrac{1}{m}$ 을 가지는 두 평행한 접선의 거리의 곱으로 주어지므로, 위의 (1)을 활용하여 직사각형의 면적을 구하면

$$l(m)\,l\left(-\frac{1}{m}\right)=\frac{2\sqrt{a^2m^2+b^2}}{\sqrt{m^2+1}}\,\frac{2\sqrt{a^2\dfrac{1}{m^2}+b^2}}{\sqrt{\dfrac{1}{m^2}+1}}=4\sqrt{\frac{a^2b^2\left(m^2+\dfrac{1}{m^2}\right)+a^4+b^4}{m^2+\dfrac{1}{m^2}+2}}$$

---

* 이화여대 예시답안

** 이화여대 예시답안

$$= 4\sqrt{a^2b^2 + \frac{a^4 - 2a^2b^2 + b^4}{m^2 + \frac{1}{m^2} + 2}} = 4\sqrt{a^2b^2 + \frac{(a^2 - b^2)^2}{m^2 + \frac{1}{m^2} + 2}}$$

으로 주어지며, $m^2 + \frac{1}{m^2} \geq 2$ 이므로 위의 식은 $m^2 + \frac{1}{m^2} = 2$ 일 때 최댓값을 갖는다. 따라서 최댓값은 $2(a^2 + b^2)$ 이다. 단, 기울기가 $m = 0$ 으로 주어진 경우 외접 직사각형은 외부의 네 점 $(\pm a,\ \pm b)$ 으로 구성되므로 면적은 $4ab$ 이며 절대부등식에 의하여 $2(a^2 + b^2) \geq 4\sqrt{a^2b^2} = 4ab$ 이므로 모든 기울기에 대하여 최댓값은 $2(a^2 + b^2)$ 이다.

다른 풀이 타원에 외접하는 직사각형은 (논제2-ⅱ)에 구해진 원에 내접함을 알 수 있다. 원에 내접하는 직사각형 중 그 면적이 최대인 것이 정사각형이다(아래 설명 예시). 반지름의 길이가 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 인 원에 내접하는 정사각형의 면적이 $2(a^2 + b^2)$ 이므로 구하는 직사각형의 면적의 최댓값은 $2(a^2 + b^2)$ 이다.

(설명 예시)

반지름 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 을 가지는 원에 내접하는 직사각형의 두 대각선은 원의 지름과 같다. 따라서 직사각형의 두 변의 길이를 A, B 라고 할 때 두 변의 길이는 $A^2 + B^2 = 4(a^2 + b^2)$ 를 만족한다. 이제 직사각형의 면적 AB 는 산술기하평균을 이용하면

$$AB \leq \frac{A^2 + B^2}{2} = \frac{4(a^2 + b^2)}{2}$$

을 만족하므로 두 변의 길이가 같을 때 면적의 최댓값 $2(a^2 + b^2)$ 을 얻는다.

논제 3-ⅰ*

미적분학의 기본정리에 의해 함수 $y = g(x)$ 는 임의의 실수에 대하여 연속이고 미분가능하며 $g'(x) = f(x)$ 로 주어진다. 그러면 조건 1에 의해 $g'(x)$ 는 미분가능하고 $y = g(x)$ 의 2계 도함수는 $g''(x) = f'(x)$ 로 주어진다. 그리고 조건 2에 의해 $f(x)$ 가 증가함수이므로 $g''(x) = f'(x) \geq 0$ 이다.

* 이화여대 예시답안

논제 3-ⅱ*

$g''(x) \geq 0$ 에 의하여 구간 $[0,\ a]$ 에서의 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 아래로 볼록이다. 그러므로 두 점 $(0,\ 0)=(0,\ g(0))$ 과 $(a,\ g(a))$ 을 잇는 직선 $y=\dfrac{g(a)}{a}\cdot x$ 의 그래프는 $y=g(x)$ 의 그래프 위쪽에 위치한다. 위의 대소 관계를 식으로 나타내면 $x\in[0,\ a]$ 에 대하여 $g(x) \leq \dfrac{g(a)}{a}\cdot x$ 이다.

다른 풀이 1 미분을 이용하여 부등식을 보일 수도 있다. 먼저 $x=0$ 일 때 $g(0)=0$ 이고 $\dfrac{g(a)}{a}\cdot 0=0$ 이므로 주어진 부등식은 참이다. $x\in(0,\ a]$ 일 때, $h(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ 라 하고 $h(x)$ 가 $(0,\ a]$ 에서 증가함수임을 보이면 모든 $x\in(0,\ a]$ 에 대하여 $\dfrac{g(x)}{x} \leq \dfrac{g(a)}{a}$ 가 성립하고 x 가 양수이므로 양변에 x 를 곱하면 $g(x) \leq \dfrac{g(a)}{a}\cdot x$ 이다.

$h(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ 가 $(0,\ a]$ 에서 증가함수임을 보이기 위하여 미분하면

$$h'(x)=\frac{g'(x)x-g(x)}{x^2}=\frac{f(x)x-g(x)}{x^2}$$

이므로, $(0,\ a]$ 에서 $f(x)x-g(x) \geq 0$ 임을 보이면 된다.
$f(x)x-g(x)$ 를 미분하면

$$(f(x)x-g(x))'=f'(x)x+f(x)-g'(x)=f'(x)x+f(x)-f(x)=f'(x)x$$

이고, 조건 2에 의해 $f'(x) \geq 0$ 이고 $x\in(0,\ a]$ 이므로 $(0,\ a]$ 에서 $f'(x)x \geq 0$ 이다. 따라서 $y=f(x)x-g(x)$ 는 구간 $(0,\ a]$ 에서 증가하는 함수이고 그 최솟값은

$$f(x)x-g(x)\big|_0=f(0)\cdot 0-g(0)=0$$

이다. 따라서 $(0,\ a]$ 에서 $f(x)x-g(x) \geq 0$ 가 성립하고 $h'(x) \geq 0$ 가 참이다. 그러므로 $h(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ 가 $(0,\ a]$ 에서 증가함수이고, $x\in(0,\ a]$ 에 대하여 $\dfrac{g(x)}{x} \leq \dfrac{g(a)}{a}$ 가 성립한다.

다른 풀이 2 구간 $[0,\ a]$ 에서 $k(x)=\dfrac{g(a)}{a}x-g(x)$ 라고 하면, $[0,\ a]$ 에서 $k(x) \geq 0$ 를 보이면 된다. $k(0)=k(a)=0$ 이므로 Rolle's Theorem에 의하여

$$k'(x)=\frac{g(a)}{a}-g'(x)=\frac{g(a)}{a}-f(x)=0$$

가 되는 점이 적어도 하나 $(0,\ a)$ 에 존재한다. 그리고 조건 2에 의해 f 가 증가함수이기 때문에

* 이화여대 예시답안

$k'(x)=\dfrac{g(a)}{a}-f(x)=0$ 를 만족하는 점은 단 하나(단조증가인 경우)이거나 구간(locally constant인 경우)으로 주어진다. 그런 점을 b 라고 하면 $f(b)=\dfrac{g(a)}{a}$ 를 만족하고

$$k(b)=\frac{g(a)}{a}b-g(b)=b\left(\frac{g(a)}{a}-\frac{g(b)}{b}\right)=b\left(f(b)-\frac{g(b)}{b}\right)$$

가 된다. 한편 평균치 정리에 의해, 적당한 $c\in(0,\ b)$ 에 대하여,

$$\frac{g(b)}{b}=\frac{g(b)-g(0)}{b-0}=g'(c)=f(c)$$

가 성립한다. 그러므로 $k(b)=b\left(f(b)-\dfrac{g(b)}{b}\right)=b(f(b)-f(c))$ 가 되고, 조건 2에 의해 $f(x)$ 가 증가함수이고 $c\le b$ 이므로 $f(c)\le f(b)$ 가 성립하여 $k(b)=b(f(b)-f(c))\ge 0$ 가 나온다. 한편 함수 $k(x)$ 는 폐구간 $[0,\ a]$ 에서 연속이고 미분가능하므로, 극값 정리에 의하여 최솟값을 구간의 경계와 $k'(x)=0$ 가 되는 점에서 가진다. 이미 위에서 $k(0)=k(a)=0$ 을 확인했고 $k'(x)=0$ 가 성립하는 점 b 에서 $k(b)\ge 0$ 임을 보였으므로, 극값 정리에 의해 구간 $[0,\ a]$ 에서 $k(x)=\dfrac{g(a)}{a}x-g(x)$ 의 최솟값은 0 이다. 따라서 $[0,\ a]$ 에서 $k(x)\ge 0$ 가 성립한다.

논제 3-iii*

부등식 $g(x)\le\dfrac{g(a)}{a}\cdot x$ 에 $[0,\ a]$ 에서의 정적분을 적용하면

$$\int_0^a g(x)\,dx\le\int_0^a\frac{g(a)}{a}x\,dx=\frac{g(a)}{a}\int_0^a x\,dx=\frac{g(a)}{a}\frac{1}{2}a^2=\frac{a}{2}g(a)$$

을 얻고, $g(a)=\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx$ 이므로 $\displaystyle\int_0^a g(x)\,dx\le\frac{a}{2}\int_0^a f(x)\,dx$ 이다.

논제 3-iv**

$f(c)\ge 0$ 이면 조건 2에 의해 폐구간 $[c,\ d]$ 에서 $f(x)\ge 0$ 이므로, $f(x)=g'(x)\ge 0$ 이고 함수 $g(x)$ 는 $[c,\ d]$ 에서 증가함수이다. 그러므로 $x\in[c,\ d]$ 에 대하여 $g(c)\le g(x)$ 가 성립하고

$$\int_c^d g(c)\,dx=(d-c)g(c)=(d-c)\int_0^c f(x)\,dx\le\int_c^d g(x)\,dx$$

이다. 그리고 (1)에 의하여 $g(x)$ 의 그래프는 폐구간 $[c,\ d]$ 위에서 $(c,\ g(c))$ 와 $(d,\ g(d))$ 를 연결하는 직선 아래에 있다. 그러므로 $x\in[c,\ d]$ 에 대하여 $g(x)\le\dfrac{g(d)-g(c)}{d-c}(x-c)+g(c)$ 이고 정적분을 적용하면

---

* 이화여대 예시답안
** 이화여대 예시답안

$$\int_c^d g(x)\,dx \le \int_c^d \left\{ \frac{g(d)-g(c)}{d-c}(x-c)+g(c) \right\} dx = \left[\frac{g(d)-g(c)}{d-c}\left(\frac{1}{2}x^2-cx\right)+g(c)x \right]_c^d$$

$$= \frac{g(d)-g(c)}{d-c}\left(\frac{1}{2}d^2-cd+\frac{1}{2}c^2\right)+g(c)(d-c)$$

$$= \frac{d-c}{2}(g(d)-g(c))+\frac{d-c}{2}2g(c)$$

$$= \frac{d-c}{2}(g(c)+g(d))$$

이다. 위의 관계식에 $g(c)=\int_0^c f(x)\,dx$ 와 $g(d)=\int_0^d f(x)\,dx$ 을 대입하면 보이고자 하는 부등식의 오른쪽 부분을 얻는다.

다른 풀이

$\int_c^d \left\{ \frac{g(d)-g(c)}{d-c}(x-c)+g(c) \right\} dx$ 는 폐구간 $[c,\ d]$ 위에서 직선

$y=\frac{g(d)-g(c)}{d-c}(x-c)+g(c)$ 와 두 수직선 $x=c$, $x=d$ 에 둘러싸인 '사다리꼴'의 '면적'이다.

그러므로 정적분을 계산하지 않고도 사다리꼴의 면적공식에 의해

$\int_c^d \left\{ \frac{g(d)-g(c)}{d-c}(x-c)+g(c) \right\} dx = \frac{d-c}{2}(g(c)+g(d))$ 을 얻을 수 있다.

31 인하대학교 수학과학우수자 모의

제시문 I 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.*

[가] 서로 다른 n 개 중에서 r 개를 택하여 한 줄로 나열하는 것을 n 개에서 r 개를 택하는 순열이라 한다. 이 순열의 수를 기호로 ${}_nP_r$ 와 같이 나타내고 다음과 같이 계산한다.

$$ {}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \ (0 < r \le n) $$

[나] 서로 다른 n 개 중에서 순서를 생각하지 않고 r 개를 택하는 것을 n 개에서 r 개를 택하는 조합이라 한다. 이 조합의 수를 기호로 ${}_nC_r$ 와 같이 나타내고 다음과 같이 계산한다.

$$ {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} \ (0 < r \le n) $$

여기서 $r!$ 는 1 에서 r 까지의 모든 자연수의 곱이다.

(※) 6명의 사람이 있다. 이 사람들을 분할하는 여러 가지 상황에 대하여 그 분할 방법의 수를 생각해 보자.

논제 I-1

6명의 사람들을 세 개의 조로 나누는 방법의 수를 구하시오. 단, 각 조에는 적어도 한 명이 포함되어 있다. (10점)

논제 I-2

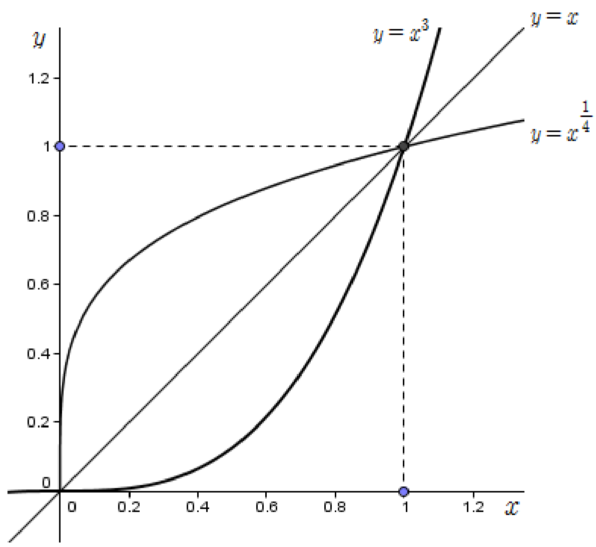
6 명의 사람들을 세 개의 방 A, B, C 에 빈 방이 없게 배치하는 방법의 수를 구하려 한다. "각 방에 적어도 한 명씩은 들어가야 하므로 6 명 중 3 명을 뽑아 각 방에 배치하는 방법의 수는 ${}_6P_3$ 이고 나머지 3 명은 각 방에 임의로 배치되어도 되므로 $3\times3\times3$ 를 곱해 주면, 총 방법의 수는 ${}_6P_3 \times 3^3 = 3240$ 이다." 이 풀이가 옳은지 틀린지를 결정하고, 옳지 않다면 올바른 풀이를 제시하시오. (10점)

* 인하대학교 입학처

제시문 II 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. *

[가] 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 근은 두 함수 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표이다.

[나] 아래 그림과 같이 멱함수 $y=x^r$ $(x>0, r>0)$ 의 그래프는 점 $(1,1)$ 을 지나고 $\lim_{x\to+0} x^r=0$, $\lim_{x\to\infty} x^r=\infty$ 이다. 또한 r 의 범위에 따라 그래프의 모양이 다른데, $r=1$ 일 때는 직선 $y=x$ 이지만 $0<r<1$ 일 때는 아래로 오목하고 $r>1$ 일 때는 위로 오목하다. 한편 $0<x<1$, $p>q$ 이면 $x^p<x^q$ 이고 $x>1$, $p>q$ 이면 $x^p>x^q$ 이다.



논제 Ⅱ-1

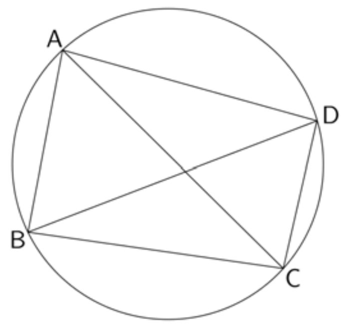
방정식 $e^x=x^r$ $(x>0)$ 의 근의 개수가 $0, 1, 2$ 가 되도록 하는 양수 r 의 값의 범위를 각각 구하시오. (15점)

* 인하대학교 입학처

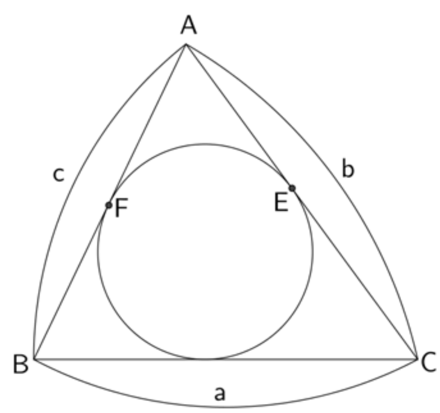
제시문 III 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.*

[가] 톨레미(영어명 Ptolemy, 원명 프톨레마이오스(Ptolemaios), AD 90-168)는 이집트 알렉산드리아에서 활동한 그리스계 수학자로서, 그는 역사상 가장 위대한 저서 중 하나인 알마게스트(Almagest)의 저자이다. 다음은 유명한 톨레미의 정리이다.

> 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여
> 서로 마주보고 있는 두 변의 쌍의 길이의 곱의 합은 두 대각선의 길이의 곱과 같다.
> $$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}=\overline{AC}\cdot\overline{BD}$$



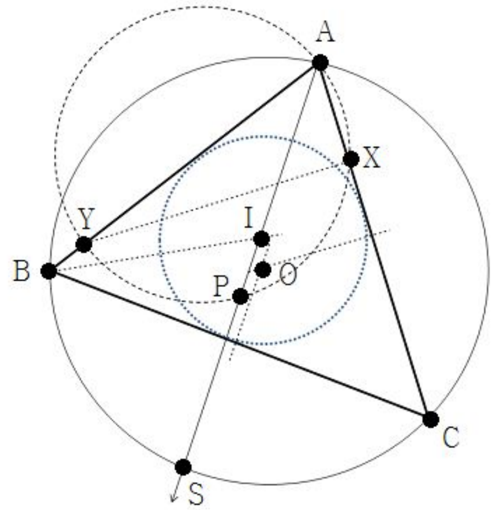
[나] 삼각형 ABC에 대하여 $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$, $\overline{AB}=c$라 하고, 이 삼각형의 내접원이 변 AC, AB와 접하는 점을 각각 E, F라 할 때, 등식 $\overline{AE}=\overline{AF}=\frac{1}{2}(b+c-a)$가 성립함은 쉽게 알 수 있다.



[다] 삼각형 ABC의 내심 I는 세 내각의 이등분선의 교점이고, 삼각형 ABC의 외심 O는 세 변의 수직이등분선의 교점이다.

* 인하대학교 입학처

[라] 아래 그림과 같이 삼각형 ABC 의 내심을 I 라 하고 외심을 O 라 하자. 그리고 두 점 X, Y 는 등식 $\overline{AX} + \overline{AY} = \overline{BC}$를 만족하는 각각 반직선 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ 위에 있는 점이라고 하자. 반직선 $\overrightarrow{AI}$가 삼각형 ABC 의 외접원과 만나는 점을 S 라 하고, 삼각형 AXY 의 외접원이 선분 AS 와 만나는 점을 P 라 하자.



논제 Ⅲ-1

제시문 (가)의 그림에서 선분 AC 가 ∠BAD 의 이등분선이고, $\angle BAD = \alpha$ 라 할 때, 제시문 (가)에 근거하여 다음 등식이 성립함을 보이시오. (7점)

$$\overline{AB} + \overline{AD} = 2\overline{AC}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

논제 Ⅲ-2

제시문 (라)의 경우에 다음 등식이 성립함을 보이시오. (8점)

$$\overline{AI} + \overline{AP} = \overline{AS}$$

논제 Ⅲ-3

제시문 (라)의 경우에 문제 (3-2)의 결과를 이용하면 $\overline{OI} = \overline{OP}$ 임을 알 수 있다. 따라서 점 X, Y 가 등식 $\overline{AX} + \overline{AY} = \overline{BC}$를 만족하면서 반직선 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ 위를 움직일 때 점 P 는 일정한 점이다. $\angle BAC = \theta$ 인 삼각형 ABC 에 대하여, $\overline{AX}$ 의 길이가 x 일 때 $\overline{PX}$ 의 길이를 $f(x)$ 라고 하자. 이때, 극한

$$\lim_{x \to +0} \frac{\overline{AP} - f(x)}{x}$$

의 값을 θ 의 식으로 나타내시오. (10점)

논술유형분석

문항 수	수학 3문항, 과학 5-7문항(총 8-10문항)	시간	120분
연관 개념	순열과 조합, 도함수와 접점사이의 관계, 톨레미의 정리		

제시문분석

제시문 Ⅰ

[가]에서는 순열과 순열의 수의 정의를 제시하였고, [나]에서는 조합과 조합의 수의 정의를 제시하고 있다. 그리고 ! 의 정의를 부가적으로 설명하였다.

제시문 Ⅱ

[가]에서는 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 교점의 x 좌표가 $f(x)=g(x)$ 의 해가 됨을 설명하고 있다. [나]에서는 멱함수 $y=x^r$ 의 특성을 설명하고 r 의 값에 따른 그래프의 개형을 설명하고 있다.

제시문 Ⅲ

[가]에서는 톨레미에 대한 설명과 톨레미의 정리를 제시하였다. [나]에서는 주어진 삼각형과 삼각형의 내접원 사이의 등식을 소개하고 있다. [다]에서는 내심과 외심의 정의를 설명하고 있다. [라]에서는 문제 상황을 제시하고 있다.

논제분석

논제 Ⅰ-1

6 명의 사람을 분할할 수 있는 여러 가지 상황과 그 분할 방법의 수를 살피는 물음으로, 6 명의 사람을 각 조에 적어도 한명을 포함하여 세 개의 조로 나누는 방법의 수를 묻고 있다.

논제 Ⅰ-2

[논제 1-1]에서 구한 집합의 분할 개수를 이용하여 6 명의 사람들을 세 개의 방에 빈방이 없도록 배치하는 방법의 개수를 묻고 있다. 또한 오류를 가진 풀이가 있는지 판단하고 그 이유를 밝히도록 하고 있다.

논제 Ⅱ-1

e 를 밑으로 하는 지수함수 e^x 와 양수 r 을 지수로 갖는 멱함수 $x^r\,(x>0)$ 의 교점의 개수를 만족하는 r 의 범위를 묻고 있다.

논제 Ⅲ-1, 2, 3

특정한 평면도형의 상황에 관하여 제시문에서 주어진 정리(톨레미의 정리)를 이해하고**[논제 Ⅲ-1]**, 삼각형에 적용하여 여러 가지 문제를 단계적으로 해결하고**[논제 Ⅲ-2]**, 이에 관련된 극한값의 계산**[논제 Ⅲ-3]**을 묻고 있다.

배경지식쌓기

1. 세는 방법

가. 포함 배제 원리

전체집합 U와 그 부분집합 A, B, C에 대하여

1) 두 집합의 포함 배제 원리

$$\begin{aligned} n(A^c\cap B^c) &= n((A\cup B)^c)=n(U)-n(A\cup B)\\ &=n(U)-n(A)-n(B)+n(A\cap B)\end{aligned}$$

2) 세 집합의 포함 배제 원리

$$\begin{aligned} n(A^c\cap B^c\cap C^c) &= n((A\cup B\cup C)^c)\\ &= n(U)-n(A\cup B\cup C)\\ &=n(U)-n(A)-n(B)-n(C)\\ &\quad +n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)-n(A\cap B\cap C)\end{aligned}$$

나. 집합의 분할

1) 주어진 집합을 공집합이 아닌 몇 개의 서로소인 부분집합으로 나누는 것을 집합의 분할이라고 한다. 즉, 집합 A 의 부분집합 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 에 대하여

(ⅰ) $A_i\cap A_j = \phi$ (단, $i, j=1, 2, \cdots, n$ 이고 $i \neq j$)

(ⅱ) $A_1\cup A_2\cup \cdots \cup A_n = A$

이면 $\{A_1, A_2, \cdots A_n\}$ 은 집합 A 의 분할이다. (단, n 은 자연수)

2) 분할하는 방법의 수 구하기
서로 다른 n 개의 원소를 p 개, q 개, $\cdots$, r 개$(p+q+\cdots+r=n)$로 나누는 방법의 수는

$$_nC_p \times {}_{n-P}C_q \times \cdots \times {}_rC_r$$

이 때, $p, q, \cdots, r$ 중 같은 것이 k 개 있으면 $k!$ 으로 나눈다.

다. 중복조합과 수의 분할

1) 서로 다른 n 개에서 중복을 허락하여 r 개를 뽑는 것을 n 개에서 r 개를 택하는 중복조합이라 한다.

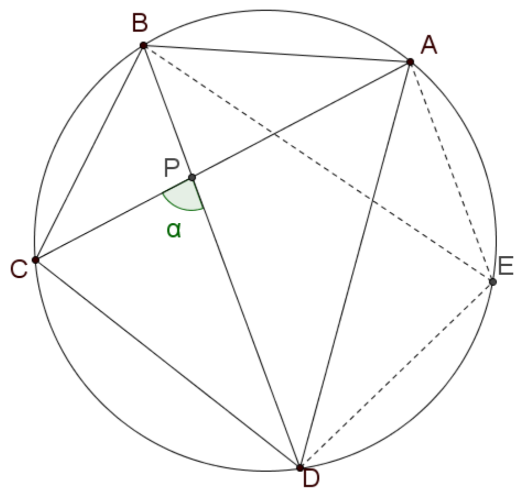
2) 서로 다른 n 개에서 r 개를 택하는 중복조합의 수는 $_{n+r-1}C_r$

3) 일반적으로 자연수 n 을

$$n = n_1+n_2+\cdots+n_k \text{ (단, } n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_k \geq 1)$$

와 같이 나타내는 것을 수의 분할이라 한다.

2. 톨레미의 정리 증명



그림에서와 같이 $\overline{AC}$ 와 $\overline{BD}$ 는 점 P 에서 만나고, $\angle CPD = \alpha$ 라고 하자. 만일 원의 내접사각형 ABCD 의 네 변이 모두 같으면, ABCD 가 정사각형이므로 결론은 성립된다.
ABCD 의 네 변이 모두 같은 경우가 아닐 때, 예를 들어 $\overline{AD} > \overline{AB}$ 라고 하자. 호 AD 위에서 $\overline{DE} = \overline{AB}$ 되게 점 E를 취하고, A 와 E , B 와 E, D 와 E를 각각 맺으면 $\overline{AD} = \overline{BE}$ 이다.
그리고 사각형 ABCD 의 넓이를 S_1 , 사각형 BCDE 의 넓이를 S_2 라 하면

$$S_1 = \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{BD} \cdot \sin\alpha$$

$$S_2 = \frac{1}{2}(\overline{BE} \cdot \overline{BC} + \overline{DE} \cdot \overline{DC})\sin\angle EBC$$

$S_1 = S_2$ 이므로

$$\frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{BD} \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}(\overline{BE} \cdot \overline{BC} + \overline{DE} \cdot \overline{DC})\sin\angle EBC \text{ 이다.}$$

$\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{BE}}$, $\overline{\mathrm{DE}} = \overline{\mathrm{AB}}$ 이고 $\alpha = \angle\mathrm{CAD} + \angle\mathrm{BDA} = \angle\mathrm{CBD} + \angle\mathrm{DBE} = \angle\mathrm{EBC}$이므로 다음이 성립한다.

$$\overline{\mathrm{AD}} \cdot \overline{\mathrm{BC}} + \overline{\mathrm{AB}} \cdot \overline{\mathrm{CD}} = \overline{\mathrm{AC}} \cdot \overline{\mathrm{BD}}$$

풀어보기

문제 1 9명이 A, B, C 세 대의 보트에 나누어 타는 방법의 수는? (단, 각 보트는 4명까지 탈 수 있고 빈 보트는 없다고 한다.)

문제 2 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x) = f(x)e^{-x}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 점 $(1,\ g(1))$ 과 점 $(4,\ g(4))$ 는 곡선 $y = g(x)$ 의 변곡점이다.
> (나) 점 $(0,\ k)$ 에서 곡선 $y = g(x)$ 에 그은 접선의 개수가 3인 k 의 값의 범위는 $-1 < k < 0$ 이다.

$g(-2) \times g(4)$ 의 값을 구하시오. (2013 수능)

문제 3 정사각형 ABCD 의 외접원의 호 CD 위의 점 P에 대하여 다음 등식을 증명하여라.

$$\overline{\mathrm{PA}}(\overline{\mathrm{PA}} + \overline{\mathrm{PC}}) = \overline{\mathrm{PB}}(\overline{\mathrm{PB}} + \overline{\mathrm{PD}})$$

읽기자료

포함배제의 원리

전체집합 U와 그 부분집합 A, B, C에 대하여 다음이 성립한다.

$$|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$$

$$|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |B\cap C| - |C\cap A| + |A\cap B\cap C|$$

또, 드모르간의 법칙에 의해 $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$, $\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}=\overline{A\cup B\cup C}$ 이므로

$|\overline{A}\cap\overline{B}| = |\overline{A\cup B}| = |U| - |A\cup B| = |U| - |A| - |B| + |A\cap B|$

$|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}| = |\overline{A\cup B\cup C}| = |U| - |A\cup B\cup C|$

$= |U| - |A| - |B| - |C| + |A\cap B| + |B\cap C| + |C\cap A| - |A\cap B\cap C|$ 이다.

이제 n 개의 집합 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 에 대하여 $|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n}|$ 을 세는 공식을 일반화하여 보자. 다음은 포함배제의 원리로 잘 알려진 공식이다. 포함배제의 원리라고 이름 붙여진 것은 여러 집합들을 연속적으로 포함하고(더하고) 연속적으로 배제하는(빼는)데서 유래한다.

<포함배제의 원리>

집합 A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_n 중 k개의 집합의 $\cap$의 크기의 합을 α_k 라 하면

$$|U-(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)| = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\alpha_k$$

(단, $\alpha_0 = |U|$, $\alpha_1 = \sum_i |A_i|$, $\alpha_2 = \sum_{i<j}|A_i\cap A_j|$, $\cdots, \alpha_n = |A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|$)

[증명] 공헌하는 값 = 그 원소가 세어지는 횟수

U에 속해있는 임의의 원소 x 에 대해 양변에 공헌하는 값이 같다는 것을 증명한다.

x 가 A_i 중 정확히 k 번 속한다고 하자.($k=0, 1, 2, \cdots, n$)

좌변 : $k=0$ 일 때 : 1 공헌, $k\neq 0$ 일 때 : 0 공헌

우변 : $k\neq 0$일 때

x가 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 에 속한다면 a_0 , 즉 $|U|$ 를 셀 때, 정확히 한 번 헤아려지고

a_1 에서는 $|A_1|, |A_2|, \ldots, |A_k|$ 에서 각 1 번씩 k 번 헤아려지며

a_2 에서는 $|A_1\cap A_2|, |A_1\cap A_3|, \ldots, |A_{k-1}\cap A_k|$ 에서 $\binom{k}{2}$ 번 헤아려지므로

a_i 에서는 $\binom{k}{i}$ 번 공헌한다.

$\therefore$ x 는 우변에서 $1-\binom{k}{1}+\binom{k}{2}-\binom{k}{1}+\cdots=0$ 번 공헌한다.

$k=0$ 일 때 x 는 $|U|$ 에서 1 번 공헌한다.

예시답안

풀어보기

문제 1 (i) $(1,4,4)$ 로 나누어 세 대에 타는 방법

$${}_9C_1 \cdot {}_8C_4 \cdot {}_4C_4 \cdot \frac{1}{2!} \cdot 3! = 1890 \text{ 가지}$$

(ii) $(2,3,4)$ 로 나누어 세 대에 타는 방법

$${}_9C_2 \cdot {}_7C_3 \cdot {}_4C_4 \cdot 3! = 4536 \text{ 가지}$$

(iii) $(3,3,3)$ 로 나누어 세 대에 타는 방법

$${}_9C_3 \cdot {}_6C_3 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{3!} \cdot 3! = 1680 \text{ 가지}$$

문제 2 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 라고 하면 $g(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{e^x}$

$$g'(x) = \frac{-ax^2+(2a-b)x+b-c}{e^x},\quad g''(x) = \frac{ax^2-(4a-b)x+2a-2b+c}{e^x}$$

$g''(1) = g''(4) = 0$ 이므로 $ax^2-(4a-b)x+2a-2b+c=0$ 의 두 근은 $1, 4$ 이다.

$\therefore\ b = -a,\ c = 0$

따라서 $g(x) = \dfrac{ax^2-ax}{e^x}$ 이므로 $g'(x) = \dfrac{a(-x^2+3x-1)}{e^x}$

(i) $a>0$ 일 때

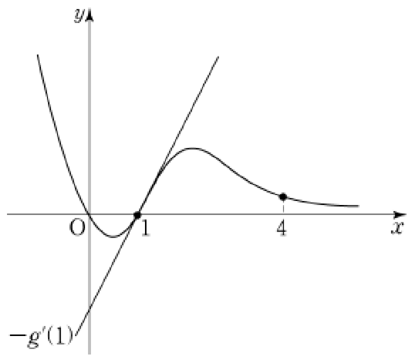
$g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$	$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↘	$g(\frac{3+\sqrt{5}}{2})$	↗	$g(\frac{3+\sqrt{5}}{2})$	↘

$\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \infty$ 이므로 $y = g(x)$ 의 그래프를 나타내면 다음과 같다.

점 $(1,\ 0)$ 에서 접선의 방정식은 $y = g'(1)(x-1)$ 이고 이 접선의 y 절편은 $-g'(1)$ 이다. 점 $(0,\ k)$ 에서 $g(x)$ 에 그은 접선의 개수가 3 이기 위해서는 $-g'(1) < k < 0$ 이어야 한다. 따라서 조건

(나)에 의해 $g'(1)=\dfrac{a}{e}=1$ 이므로 $a=e$ 이다.



(ii) $a<0$일 때

$y=g(x)$ 의 그래프는 $a>0$일 때 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동하면 된다. 이때 조건 (나)를 만족하는 a는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에 의해 $g(x)=\dfrac{ex^2-ex}{e^x}$ 이므로 $g(-2)\times g(4)=72$ 이다.

문제 3 정사각형의 한 변의 길이를 a 라 하자. 원의 내접사각형 ABCP 에서

$$\overline{PA}\times a+\overline{PC}\times a=\overline{PB}\times\sqrt{2}\,a$$

$$\therefore\frac{\overline{PA}+\overline{PC}}{\overline{PB}}=\sqrt{2}$$

같은 방법으로 원의 내접사각형 ABPD 에서 $\dfrac{\overline{PB}+\overline{PD}}{\overline{PA}}=\sqrt{2}$ 를 얻는다.

두 식으로부터

$$\frac{\overline{PA}+\overline{PC}}{\overline{PB}}=\frac{\overline{PB}+\overline{PD}}{\overline{PA}}$$

$$\therefore\overline{PA}(\overline{PA}+\overline{PC})=\overline{PB}(\overline{PB}+\overline{PD})$$

논제 I −1*

세 모둠에 속한 사람들 수는 (1, 1, 4), (1, 2, 3), (2, 2, 2) 세 가지가 있다. 각각의 경우에 대해 분할 방법의 수를 구하면 다음과 같다.

(1, 1, 4)인 경우: ${}_6C_1\times{}_5C_1\times\dfrac{1}{2!}=15$

(1, 2, 3)인 경우: ${}_6C_1\times{}_5C_2=60$

(2, 2, 2)인 경우: ${}_6C_2\times{}_4C_2\times\dfrac{1}{3!}=15$

이것들을 모두 더하면 총 방법의 수는 90 이다.

* 인하대 예시 답안

논제 Ⅰ-2*

${}_6P_3 \times 3^3 = 3240$ 는 먼저 각 방에 한 명씩 배치하고 나서 두 번째 배치에서 나머지 3 명을 배치하는 방법의 수를 센 것으로, 이것은 각 방에 배치된 인원이 같더라도 배치된 순서가 다르면 다른 배치방법인 것으로 인정해 가짓수를 센 것이므로 옳지 않다. 올바른 풀이는 다음과 같다. [논제Ⅰ-1]에서 각각의 경우에 대해 3 개의 방에 배치하는 방법인 $3!=6$ 을 곱해 주면 된다. 즉, $90\times6=540$ 이 올바른 답이다.

다른 풀이

6 명을 A, B, C 세 방으로 나눌 때 모든 경우를 생각하면 $3^6=729$가 된다. 각 방에는 적어도 한 명씩 들어가야 하는 경우의 여사건을 생각하여, 적어도 하나의 방이 비어진 경우를 생각해 볼 수 있다.

$\mathrm{A}_1=\{$A방이 빈경우$\}$, $\mathrm{B}_1=\{$B방이 빈경우$\}$, $\mathrm{C}_1=\{$C방이 빈경우$\}$라 두면

$n(\mathrm{A}_1)=2^6$, $n(\mathrm{B}_1)=2^6$, $n(\mathrm{C}_1)=2^6$, $n(\mathrm{A}_1\cap\mathrm{B}_1)=1$, $n(\mathrm{B}_1\cap\mathrm{C}_1)=1$, $n(\mathrm{C}_1\cap\mathrm{A}_1)=1$, $n(\mathrm{A}_1\cap\mathrm{B}_1\cap\mathrm{C}_1)=0$ 이 되어 포함배제 원리에 의해 적어도 하나의 방이 비어진 경우를 생각하면 다음과 같게 된다.

$$n(\mathrm{A}_1\cup\mathrm{B}_1\cup\mathrm{C}_1)$$
$$=n(\mathrm{A}_1)+n(\mathrm{B}_1)+n(\mathrm{C}_1)-n(\mathrm{A}_1\cap\mathrm{B}_1)-n(\mathrm{B}_1\cap\mathrm{C}_1)-n(\mathrm{C}_1\cap\mathrm{A}_1)+n(\mathrm{A}_1\cap\mathrm{B}_1\cap\mathrm{C}_1)$$
$$=2^6+2^6+2^6-1-1-1+0$$
$$=189$$

그러므로 $729-189=540$ 이 된다.

논제 Ⅱ-1**

(ⅰ) 주어진 방정식이 하나의 양근을 가지는 경우는 두 곡선 $y=e^x$ 와 $y=x^r$ 의 그래프가 접할 때이다. 접점을 $(t,\ e^t)=(t,\ t^r)$ 이라 두자. 접점에서의 접선의 기울기는 $e^t=rt^{r-1}$ 이므로 $e^t=t^r=rt^{r-1}$ 이고, $t=r$ 이다. 또, $e^r=r^r$ 로부터 $r=e$ 를 얻는다.

(ⅱ) 만약 $0<r<e$ 이면 곡선 $y=x^r$ 의 그래프는 $y=x^e$ 의 그래프 아래에 있으므로 곡선 $y=x^r$ 과 곡선 $y=e^x$ 는 만나지 않는다. 즉, 방정식 $e^x=x^r\ (x>0)$ 의 해는 없다.

(ⅲ) 만약 $r>e$ 이면 곡선 $y=x^r$ 의 그래프는 $y=x^e$ 의 그래프 위에 있으므로 곡선 $y=x^r$ 과 곡선 $y=e^x$ 는 $x<e$ 범위에서 한번 만난 후, 곡선 $y=e^x$ 가 $y=x^r$ 보다 빨리 증가함에 유의하면 $x>e$ 범위에서 다시 한 번 만나게 됨을 알 수 있다. 즉, 방정식 $e^x=x^r\ (x>0)$ 의 해는 두 개임을 알 수 있다.

---

* 인하대 예시 답안
** 인하대 예시 답안

※교점의 존재성

$r>e$ 일 때, x 의 값을 두 함수에 대입하여 보면 다음을 알 수 있다.
(ⅰ) $x=1$ 대입, $1^r<e^1$ 이므로 곡선 $y=e^x$ 가 $y=x^r$ 위에 있다.
(ⅱ) $x=e$ 대입, $e^r>e^e$ 이므로 곡선 $y=x^r$ 가 $y=e^x$ 위에 있다.
(ⅲ) $x=e^e$ 대입, $e^{er}<e^{e^r}$이므로 곡선 $y=e^x$ 가 $y=x^r$ 위에 있다.
중간값 정리로부터 $1<x<e$ 와 $e<x<e^e$ 에 각각 근이 존재함을 알 수 있다.

논제 Ⅲ-1*

$\angle\mathrm{BDC}=\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\alpha}{2}$, $\angle\mathrm{DBC}=\angle\mathrm{DAC}=\dfrac{\alpha}{2}$ 이므로 삼각형 BCD 는 이등변삼각형이다. 따라서 $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CD}}=s$ 라 할 때, $\overline{\mathrm{BD}}=2s\cos\dfrac{\alpha}{2}$ 이다. 제시문 (가)의 톨레미의 정리에 의해 $\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{CD}}+\overline{\mathrm{AD}}\cdot\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AC}}\cdot\overline{\mathrm{BD}}$ 이고 $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CD}}=s$ 이므로 좌변은

$$\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{CD}}+\overline{\mathrm{AD}}\cdot\overline{\mathrm{BC}}=(\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AD}})\cdot s$$

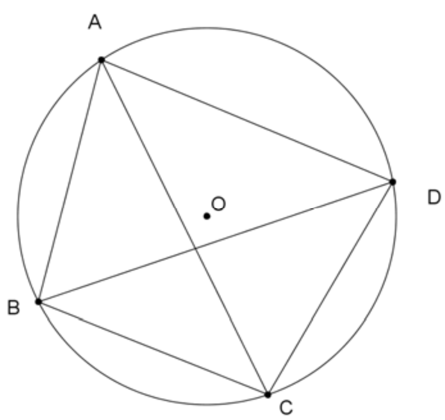
이고, 우변은

$$\overline{\mathrm{AC}}\cdot\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{AC}}\,2s\cos\frac{\alpha}{2}$$

이다. 따라서 등식 $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AD}}=2\overline{\mathrm{AC}}\cos\dfrac{\alpha}{2}$ 을 얻는다.

다른 풀이

톨레미 정리를 이용하지 않은 풀이



* 인하대 예시 답안

$\angle A=\alpha$ 라두면 $\angle CAB=\frac{\alpha}{2}$, $\angle CAD=\frac{\alpha}{2}$ 가 된다. 그러면 원주각의 성질에 의해

$\angle CBD=\frac{\alpha}{2}$, $\angle CDB=\frac{\alpha}{2}$ 가 된다. $\angle ADB=\beta$ 로 두면 $\angle ABD=\pi-\alpha-\beta$ 가 된다.

sin 법칙에 의해

$$\frac{\overline{AB}}{\sin\beta}=\frac{\overline{AD}}{\sin(\pi-\alpha-\beta)}=\frac{\overline{AD}}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\overline{AC}}{\sin(\frac{\alpha}{2}+\beta)}=2R$$

이 된다.

$\overline{AB}=\frac{\overline{AC}\sin\beta}{\sin(\frac{\alpha}{2}+\beta)}$, $\overline{AD}=\frac{\overline{AC}\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\frac{\alpha}{2}+\beta)}$ 가 되어

$$\overline{AB}+\overline{AD}=\frac{\overline{AC}\sin\beta}{\sin(\frac{\alpha}{2}+\beta)}+\frac{\overline{AC}\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\frac{\alpha}{2}+\beta)}$$

$$=\overline{AC}\frac{\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\frac{\alpha}{2}+\beta)}$$

$$=\overline{AC}\frac{\sin(\frac{\alpha}{2}+\beta-\frac{\alpha}{2})+\sin(\frac{\alpha}{2}+\beta+\frac{\alpha}{2})}{\sin\frac{\alpha}{2}+\beta}$$

$$=\overline{AC}\frac{\sin(\frac{\alpha}{2}+\beta)\cos(\frac{\alpha}{2})-\cos(\frac{\alpha}{2}+\beta)\sin(\frac{\alpha}{2})+\sin(\frac{\alpha}{2}+\beta)\cos(\frac{\alpha}{2})+\cos(\frac{\alpha}{2}+\beta)\sin(\frac{\alpha}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2}+\beta)}$$

$$=2\overline{AC}\cos(\frac{\alpha}{2})$$

논제 Ⅲ-2*

[논제 Ⅲ-1]의 결과에 의해

$$\overline{AX}+\overline{AY}=2\overline{AP}\cos\frac{\alpha}{2} \quad \text{-------①}$$

$$\overline{AB}+\overline{AC}=2\overline{AS}\cos\frac{\alpha}{2} \quad \text{-------②}$$

이 ②식에서 ①식을 빼주면,

$$2(\overline{AS}-\overline{AP})\cos\frac{\alpha}{2}=\overline{AB}+\overline{AC}-(\overline{AX}+\overline{AY})=b+c-a \quad \text{-----③}$$

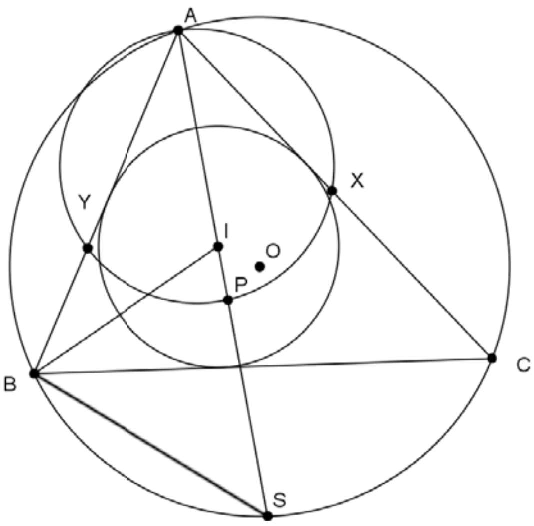
이다. 한편, 삼각형 ABC 의 내접원이 변 AC, AB 와 접하는 점을 각각 E, F 라 할 때, 등식

* 인하대 예시 답안

$\overline{\mathrm{AE}} = \overline{\mathrm{AF}} = \frac{1}{2}(b+c-a)$가 성립하고, $\overline{\mathrm{AE}} = \overline{\mathrm{AI}}\cos\frac{\alpha}{2}$ 이므로, ③식의 우변은 $2\overline{\mathrm{AI}}\cos\frac{\alpha}{2}$ 와 같다.

따라서 $2(\overline{\mathrm{AS}} - \overline{\mathrm{AP}})\cos\frac{\alpha}{2} = 2\overline{\mathrm{AI}}\cos\frac{\alpha}{2}$ 이고, 이것으로부터 등식 $\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{AI}} = \overline{\mathrm{AS}}$ 를 얻는다.

다른 풀이



(편의상 $\angle\mathrm{BAP} = \angle\mathrm{CAP} = \alpha$ 라 두자.) 사각형 AYPX는 원에 내접하고 $\overline{\mathrm{AP}}$ 는 $\angle$A를 이등분하므로 [논제 Ⅲ-1]에 의해

$$\overline{\mathrm{AY}} + \overline{\mathrm{AX}} = 2\overline{\mathrm{AP}}\cos\alpha$$

그런데 $\overline{\mathrm{AY}} + \overline{\mathrm{AX}} = \overline{\mathrm{BC}}$ 이므로 $\overline{\mathrm{AP}} = \frac{\overline{\mathrm{BC}}}{2\cos\alpha}$

원주각의 성질에 의해 $\angle\mathrm{SBC} = \angle\mathrm{SCB} = \alpha$ 가 되고, 이등변삼각형의 성질에 의해 $\overline{\mathrm{BS}} = \frac{\overline{\mathrm{BC}}}{2\cos\alpha}$ 가 된다. 즉, $\overline{\mathrm{BS}} = \overline{\mathrm{AP}}$.

그런데 I 는 내심이므로 $\angle\mathrm{CBI} = \angle\mathrm{ABI} = \beta$ 라 두면 $\angle\mathrm{SBI} = \angle\mathrm{SIB} = \alpha+\beta$ 가 되어 $\triangle\mathrm{SBI}$ 는 이등변 삼각형이 된다. $\overline{\mathrm{BS}} = \overline{\mathrm{SI}}$ 가 되고 결국은 $\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{SI}}$ 가 된다.

$\overline{\mathrm{AS}} = \overline{\mathrm{AI}} + \overline{\mathrm{IS}} = \overline{\mathrm{AI}} + \overline{\mathrm{SI}} = \overline{\mathrm{AI}} + \overline{\mathrm{AP}}$ 가 된다.

논제 Ⅲ-3*

$\angle\mathrm{BAC} = \theta$ 인 고정된 삼각형 ABC 에 대하여, 점 X, Y 가 등식 $\overline{\mathrm{AX}} + \overline{\mathrm{AY}} = \overline{\mathrm{BC}}$를 만족하면서 반직선 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ 위를 움직일 때 점 P 는 일정한 점이므로 $\lim_{x \to +0} f(x) = \overline{\mathrm{AP}}$ 이다. 따라서

* 인하대 풀이 참조

$\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{\overline{\mathrm{AP}} - f(x)}{x}$ 은 $\dfrac{0}{0}$ 꼴인 부정형이다. 삼각형 APX 에서

$$\{f(x)\}^2 = \overline{\mathrm{AP}}^{\,2} + x^2 - 2x\,\overline{\mathrm{AP}}\cos\frac{\theta}{2}$$

이므로 주어진 극한은 다음과 같이 θ 로 표현된다.

$$\lim_{x \to +0} \frac{\overline{\mathrm{AP}} - f(x)}{x} = \lim_{x \to +0} \frac{\overline{\mathrm{AP}}^{\,2} - \{f(x)\}^2}{x\{\overline{\mathrm{AP}} + f(x)\}} = \lim_{x \to +0} \frac{2x\,\overline{\mathrm{AP}}\cos\dfrac{\theta}{2} - x^2}{2x\,\overline{\mathrm{AP}}} = \cos\frac{\theta}{2}$$

32 인하대학교 일반전형 모의

제시문 I 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.(20점)

(가) 일반적으로 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x, y)$ 를 식

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \qquad (a, b, c, d \text{ 는 상수})$$

에 의하여 점 $\mathrm{P}'(x', y')$ 으로 옮기는 변환을 일차변환이라고 한다. 이 때 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 를 이 일차변환의 행렬이라고 한다. 원점을 닮음의 중심으로 하는 닮은비가 $k\,(k \neq 0)$ 인 닮음변환, 원점을 중심으로 각 θ 만큼 회전하는 회전변환, 원점을 지나는 직선에 대한 대칭변환 등은 일차변환이다.

(※) 두 수열 $\{x_n\}$과 $\{y_n\}$이 다음의 식을 만족한다고 하자.

$$x_1 = 1,\ y_1 = 2,\quad \begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x_n - \dfrac{1}{2}y_n \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{2}x_n + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y_n \end{cases}$$

논제 I -1

평면 위의 점 (x_n, y_n) 을 (x_{n+1}, y_{n+1}) 로 옮기는 변환에 대응하는 행렬을 구하시오. (5점)

논제 I -2

$x_{2014} + y_{2014}$ 의 값을 구하시오. (15점)

제시문 II 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (25점)

(가) 일반적으로 서로 다른 n개 중에서 r개를 택하여 한 줄로 나열하는 것을 n개에서 r개를 택하는 순열이라 하고, 이 순열의 수를 기호로 ${}_nP_r$ 와 같이 나타내고 다음과 같이 계산한다.

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \ (0 < r \le n)$$

(나) 일반적으로 서로 다른 n개 중에서 순서를 생각하지 않고 r개를 택하는 것을 n개에서 r개를 택하는 조합이라 하고, 이 조합의 수를 기호로 ${}_nC_r$ 와 같이 나타내고 다음과 같이 계산한다.

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} \ (0 < r \le n)$$

여기서 $r!$는 1에서 r까지의 모든 자연수의 곱이다.

(※) 6명의 사람이 있다. 이 사람들을 분할하는 여러 가지 상황에 대하여 그 분할 방법의 수를 생각해 보자.

논제 II-1

6명의 사람들을 세 개의 조로 나누는 방법의 수를 구하시오. 단, 각 조에는 적어도 한 명이 포함되어 있다. (10점)

논제 II-2

6명의 사람들을 세 개의 방 A, B, C에 나누어 배치하는 방법의 수를 구하시오. 단, 빈 방이 있어도 상관없다. (5점)

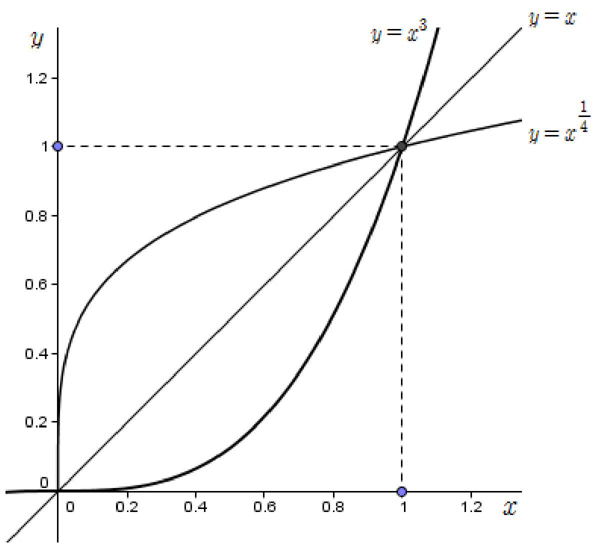
논제 II-3

6명의 사람들을 세 개의 방 A, B, C에 빈 방이 없게 배치하는 방법의 수를 구하려 한다. "각 방에 적어도 한 명씩은 들어가야 하므로 6명 중 3명을 뽑아 각 방에 배치하는 방법의 수는 ${}_6P_3$이고 나머지 3명은 각 방에 임의로 배치되어도 되므로 $3\times3\times3$을 곱해 주면, 총 방법의 수는 ${}_6P_3 \times 3^3 = 3240$이다."이 풀이가 옳은지 틀린지를 결정하고, 옳지 않다면 올바른 풀이를 제시하시오. (10점)

제시문 Ⅲ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (20점)

(가) 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 근은 두 함수 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표이다.

(나) 그림과 같이 멱함수 $y=x^r\ (x>0,\ r>0)$ 의 그래프는 점 $(1,1)$ 을 지나고 $\lim_{x\to+0} x^r=0$, $\lim_{x\to\infty} x^r=\infty$ 이다. 또한 r 의 범위에 따라 그래프의 모양이 다른데, $r=1$ 일 때는 직선 $y=x$ 이지만 $0<r<1$ 일 때는 아래로 오목하고 $r>1$ 일 때는 위로 오목하다. 한편 $0<x<1,\ p>q$ 이면 $x^p<x^q$ 이고 $x>1,\ p>q$ 이면 $x^p>x^q$ 이다.



논제 Ⅲ-1

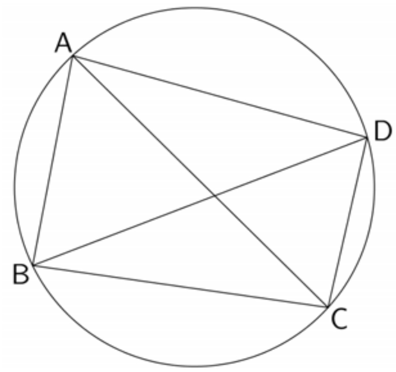
방정식 $e^x=x^r\ (x>0)$ 이 하나의 근을 가질 때 양수 r 의 값을 구하시오. (20점)

제시문Ⅳ **다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (35점)**

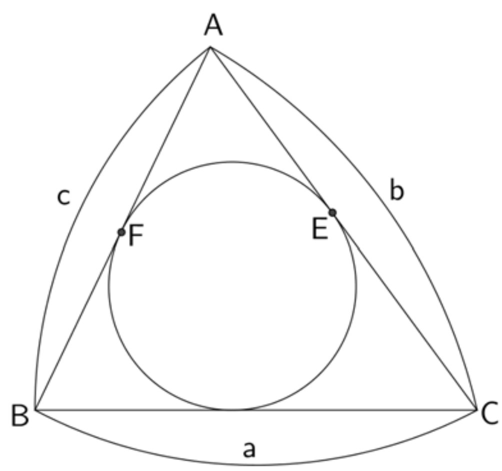
(가) 톨레미(영어명 Ptolemy, 원명 프톨레마이오스(Ptolemaios), AD 90-168)는 이집트 알렉산드리아에서 활동한 그리스계 수학자로서, 그는 역사상 가장 위대한 저서 중 하나인 알마게스트(Almagest)의 저자이다.
다음은 유명한 톨레미의 정리이다.

원에 내접하는 사각형 ABCD 에 대하여
서로 마주보고 있는 두 변의 쌍의 길이의 곱의 합은 두 대각선의 길이의 곱과 같다.

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}=\overline{AC}\cdot\overline{BD}$$

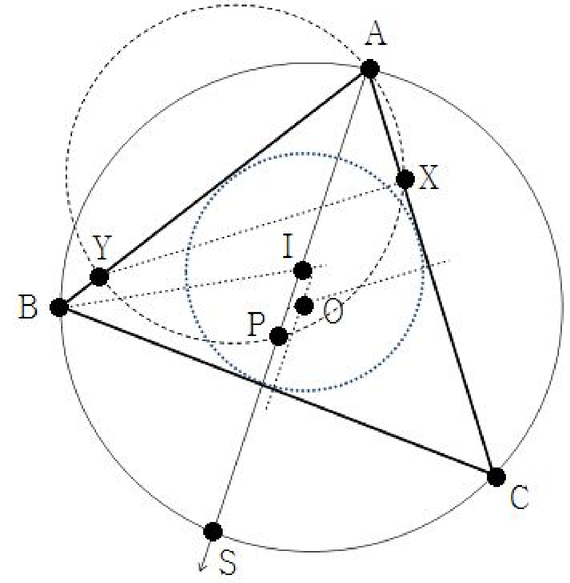


(나) 삼각형 ABC 에 대하여 $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$, $\overline{AB}=c$ 라 하고, 이 삼각형의 내접원이 변 AC, AB 와 접하는 점을 각각 E, F 라 할 때, 등식 $\overline{AE}=\overline{AF}=\frac{1}{2}(b+c-a)$ 가 성립함은 쉽게 알 수 있다.



(다) 삼각형 ABC 의 내심 I 는 세 내각의 이등분선의 교점이고, 삼각형 ABC 의 외심 O 는 세 변의 수직이등분선의 교점이다.

(라) 아래 그림과 같이 삼각형 ABC의 내심을 I라 하고 외심을 O라 하자. 그리고 두 점 X, Y는 등식 $\overline{\mathrm{AX}}+\overline{\mathrm{AY}}=\overline{\mathrm{BC}}$을 만족하는 각각 반직선 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ 위에 있는 점이라고 하자. 반직선 $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$가 삼각형 ABC의 외접원과 만나는 점을 S라 하고, 삼각형 AXY의 외접원이 선분 AS와 만나는 점을 P라 하자.



논제Ⅳ-1

제시문 (가)의 그림에서 선분 AC가 ∠BAD의 이등분선이고, ∠BAD $=\alpha$라 할 때, 제시문 (가)에 근거하여 다음 등식이 성립함을 보이시오. (10점)

$$\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AD}}=2\overline{\mathrm{AC}}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

논제Ⅳ-2

제시문 (라)의 경우에 다음 등식이 성립함을 보이시오. (15점)

$$\overline{\mathrm{AI}}+\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AS}}$$

논제Ⅳ-3

제시문 (라)의 경우에 [논제 Ⅳ-2]의 결과를 이용하면 $\overline{\mathrm{OI}}=\overline{\mathrm{OP}}$임을 알 수 있다. 따라서, 점 X, Y가 등식 $\overline{\mathrm{AX}}+\overline{\mathrm{AY}}=\overline{\mathrm{BC}}$를 만족하면서 반직선 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ 위를 움직일 때 점 P는 일정한 점이다. ∠BAC $=\theta$인 삼각형 ABC에 대하여, $\overline{\mathrm{AX}}$의 길이가 x일 때 $\overline{\mathrm{PX}}$의 길이를 $f(x)$라고 하자. 이때, 극한 $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\overline{\mathrm{AP}}-f(x)}{x}$의 값을 θ의 식으로 나타내시오. (10점)

논술유형분석

문항 수	수학 4문항(소문항 9문항)	시간	120분
연관 개념	일차변환, 순열과 조합, 도함수와 그래프, 톨레미의 정리와 삼각형의 내심과 외심		

제시문분석

제시문 Ⅰ

일차변환의 정의와 일차변환의 예를 소개하였다.

제시문 Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ

인하대학교 수학과학우수자 모의 제시문 Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ과 동일.

논제분석

논제 Ⅰ-1

주어진 일차변환을 나타내는 행렬을 묻고 있다.

논제 Ⅰ-2

주어진 일차변환이 회전변환임을 이용하여 좌표를 구하는 물음으로 주어진 일차변환은 반시계방향으로 30° 회전변환임을 이용하여 $x_{2014}+y_{2014}$ 의 값을 구할 수 있다.

논제 Ⅱ-1, 3

인하대학교 수학과학우수자 모의 논제 Ⅰ-1, 2와 동일.

논제 Ⅱ-2

6 명의 사람들을 빈 방이 있어도 상관없이 세 개의 방에 나누어 배치하는 방법의 수를 묻고 있다.

논제 Ⅲ-1

함수의 그래프와 미분의 개념을 이용하여 주어진 방정식이 오직 하나의 양의 실근을 가질 조건을 구하는 물음이다. (인하대학교 수학과학우수자 모의 논제 Ⅱ-1과 유사)

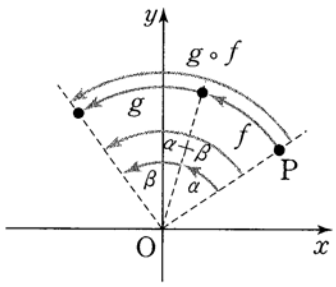
논제 Ⅳ-1, 2, 3

인하대학교 수학과학우수자 모의 논제 Ⅲ-1, 2, 3과 동일.

배경지식쌓기

1. 회전변환의 합성을 나타내는 행렬의 특징

원점을 중심으로 α만큼 회전하는 회전변환을 f, 원점을 중심으로 β만큼 회전하는 회전변환을 g라 할 때, 좌표평면 위의 점 P를 합성변환 $g \circ f$에 의하여 옮긴다고 하면 이는 오른쪽 그림과 같이 점 P를 원점을 중심으로 α만큼 회전한 다음, 다시 원점을 중심으로 β만큼 회전하여 옮기므로 다음이 성립한다.



원점을 중심으로 α만큼 회전한 다음, 원점을 중심으로 β만큼 회전하는 회전변환

⇔ 원점을 중심으로 $\alpha+\beta$만큼 회전하는 회전변환

이때 합성변환 $g \circ f$를 나타내는 행렬은

$$\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} \cdots ㉠$$

한편 원점을 중심으로 $\alpha+\beta$만큼 회전하는 회전변환을 나타내는 행렬은

$$\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix} \cdots ㉡$$

㉠=㉡이 성립하므로

$$\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}$$

즉 두 회전변환의 행렬의 곱셈은 각의 크기만 더하면 된다.

이와 같은 방법으로 회전변환 f의 합성변환 $f \circ f = f^2$은 원점을 중심으로 $\alpha+\alpha=2\alpha$만큼 회전하는 회전변환과 같으므로 합성변환 $f \circ f$를 나타내는 행렬은 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}\cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha\end{pmatrix}$$

따라서 일반적으로 회전변환 f의 합성변환 $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n\text{번}}$ (n은 자연수)는 좌표평면 위의 점을 원점을 중심으로 $n\alpha$만큼 회전하는 회전변환과 같으므로 합성변환 f^n을 나타내는 행렬은 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix}\cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha\end{pmatrix}$$

2. 도함수와 그래프

가. 도함수를 이용한 그래프 그리기

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같은 사항을 조사한 다음, 이를 종합하여 그래프의 개형을 그린다.

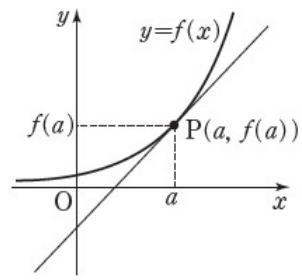
① 곡선이 존재하는 범위(함수의 정의역과 치역)

② 곡선의 대칭성(x축에 대하여 대칭, y축에 대하여 대칭, 원점에 대하여 대칭)과 주기

③ 좌표축과의 교점
④ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소
⑤ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점
⑥ $\lim\limits_{x \to \text{정의역의 끝}} f(x)$ ((예) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$), 점근선 파악

나. 접선의 방정식

$x=a$ 에서의 함수 $y=f(x)$ 의 미분계수 $f'(a)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기를 나타낸다. 따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기 ➡ $f'(a)$ 접선의 방정식 ➡ $\boldsymbol{y-f(a)=f'(a)(x-a)}$
※ 직선의 방정식 : 점 (x_1, x_2) 을 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은 $y-y_1=m(x-x_1)$ 이다.



풀어보기

문제 1 일차변환 f 를 나타내는 행렬을 $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ 이라 할 때, 행렬 $A^n\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 으로 나타내어지는 일차변환에 의하여 직선 $l : x+\sqrt{3}y-k=0$ 이 옮겨진 도형을 l_n 이라 하자. 직선 $l_1,\ l_2,\ l_3,\ \cdots,\ l_6$ 으로 둘러싸인 정육각형의 넓이가 $\sqrt{3}$ 일 때, 양수 k 의 값은? (2012년 EBS수능특강 기하와 벡터)

① $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

문제 2 함수 $f(x)=kx^2e^{-x}\ (k>0)$ 과 실수 t 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$ 에서 x 축까지의 거리와 y 축까지의 거리 중 크지 않은 값을 $g(t)$ 라 하자. 함수 $g(t)$ 가 한 점에서만 미분가능하지 않도록 하는 k 의 최댓값은? (2013년 대수능)

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ③ $\frac{e}{2}$ ④ $\sqrt{e}$ ⑤ e

읽기자료

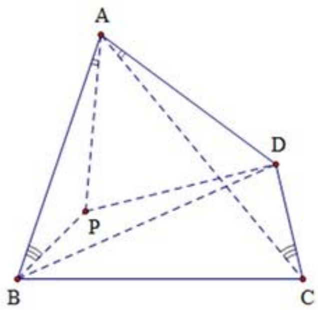
프톨레마이오스 부등식(Ptolemy's Inequality)

일반적으로 볼록사각형 ABCD 에서 다음의 부등식이 성립한다.

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC} \ge \overline{AC}\cdot\overline{BD}$$

(단, 등호는 사각형 ABCD 가 원에 내접할 때 성립한다.)

(증명)



사각형의 내부에 $\angle BAP=\angle CAD$, $\angle ABP=\angle ACD$ 를 만족하는 점 P 를 잡자.

$\triangle ABP = \triangle ACD$ (AA 닮음)이므로 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BP}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CD}}$ 이다.

따라서 $\overline{AB}\cdot\overline{CD} = \overline{AC}\cdot\overline{BP}$ …①

또 $\angle BAC=\angle BAP+\angle PAC=\angle PAC+\angle CAD=\angle PAD$ 이고 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AD}}$ 이다.

$\triangle BAC = \triangle PAD$ (SAS닮음)이므로, $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{PD}}$ 이다.

따라서 $\overline{BC}\cdot\overline{DA} = \overline{AC}\cdot\overline{PD}$ …②

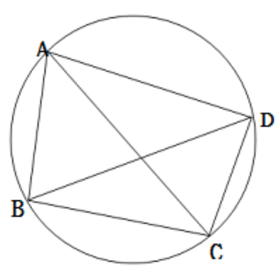
①, ②에서 두 식을 더하여 정리하면

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{BC}\cdot\overline{DA} = \overline{AC}\cdot\overline{BP}+\overline{AC}\cdot\overline{PD} = \overline{AC}\cdot(\overline{BP}+\overline{PD}) \ge \overline{AC}\cdot\overline{BD}$$

단, 등호는 점 P 가 대각선 $\overline{BD}$ 위에 있을 때 성립한다.

이 때, $\angle ABP=\angle ABD=\angle ACD$ 가 성립하므로, 네 점 A, B, C, D 는 한 원 위에 있다. 즉, 프톨레마이오스 정리는 이 부등식의 특수한 경우가 된다.

○ 프톨레마이오스 정리[Ptolemaeos' theorem]

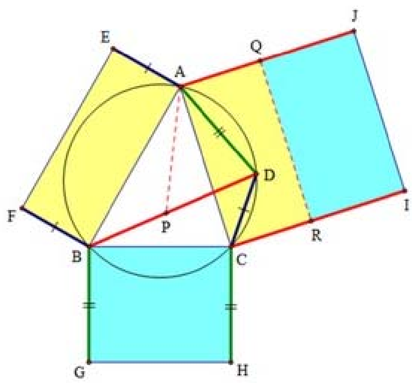


“원에 내접하는 사각형에서 두 쌍의 대변의 길이의 곱의 합은 두 대각선의 길이의 곱과 같다.”가 성립하며 이를 프톨레마이오스의 정리(Ptolemaeos' theorem) 또는 톨레미(Ptolemy's Theorem)의 정리라고 한다.

즉, 사변형 ABCD 가 원에 내접(內接)할 때, $\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}=\overline{AC}\cdot\overline{BD}$ 가 성립하며, 또 역으로 볼록사변형 ABCD 에서 위의 관계가 성립하면, 이 사변형은 원에 내접한다고 하는 정리이다.

이 정리는 피타고라스의 정리의 일반화라고도 할 수 있다. 왜냐하면, 사변형 ABCD 가 직사각형이면, $\overline{AB}=\overline{CD}$, $\overline{AD}=\overline{BC}$, $\overline{AC}=\overline{BD}$ 가 되어 처음에 말한 등식이 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$ 으로 되기 때문이다.

(증명)



대각선 $\overline{BD}$ 위에 $\angle BAP=\angle CAD$ 를 만족하는 점P 를 잡으면, $\angle ABP=\angle ACD$ 이므로, $\triangle ABP=\triangle ACD$ (AA 닮음)이다.

따라서 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BP}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CD}}$ 이므로, $\overline{AB}\cdot\overline{CD}=\overline{AC}\cdot\overline{BP}$ 이다.…①

또, $\angle BAC=\angle BAP+\angle PAC=\angle PAC+\angle CAD=\angle PAD$, $\angle ACB=\angle ADP$ 이므로 $\triangle ACB=\triangle ADP$ (AA 닮음)이다.

따라서 $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{PD}}$ 이므로, $\overline{BC}\cdot\overline{DA}=\overline{AC}\cdot\overline{PD}$ 이다.…②

①,②에서 두 식을 더하여 정리하면,

$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{BC}\cdot\overline{DA}=\overline{AC}\cdot\overline{BP}+\overline{AC}\cdot\overline{PD}=\overline{AC}\cdot(\overline{BP}+\overline{PD})=\overline{AC}\cdot\overline{BD}$ 이다.

위의 그림에서 사각형 ABFE ,BCHG ,ACIJ 는 각각 $\overline{AB}$ 와 $\overline{CD}$, $\overline{BC}$ 와 $\overline{DA}$, $\overline{AC}$ 와 $\overline{BD}$ 의 길이를 이웃한 두 변으로 하는 직사각형이다. 이때, 직사각형 ABFE 와 BCHG 의 넓이의 합은 직사각형 ACIJ 의 넓이와 같다. (단, $\overline{AE}=\overline{CD}$, $\overline{BG}=\overline{DA}$, $\overline{AJ}=\overline{BD}$ 이다.)

또, $\overline{AQ}=\overline{CR}\equiv\overline{BP}$ 인 점 Q, R 을 각각 $\overline{AJ}$, $\overline{CI}$ 위에 잡으면, 직사각형 ABFE , BCHG 의 넓이는 각각 직사각형 ACRQ , QRIJ 의 넓이와 같다.

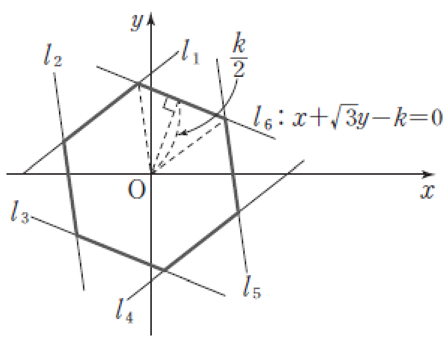
특별히 사각형 ABCD 가 직사각형일 때, $\overline{AB}=\overline{CD}$, $\overline{BC}=\overline{DA}$, $\overline{AC}=\overline{BD}$ 이므로, $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$ 이 성립한다. 즉, 피타고라스의 정리를 톨레미 정리의 특별한 경우로 생각할 수 있다.

예시답안

풀어보기

문제 1 정답 ④

행렬 $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 은 원점을 중심으로 하여 반시계방향으로 60° 만큼 회전하는 회전변환을 나타내는 행렬이다. 따라서 행렬 A^n 은 원점을 중심으로 하여 $n\times 60^\circ$ 만큼 회전하는 회전변환을 나타낸다. 그러므로 직선 l_n 은 직선 l 을 원점을 중심으로 하여 $n\times 60^\circ$ 만큼 회전이동시킨 것이다. 따라서 여섯 개의 직선 $l_1, l_2, l_3, \cdots, l_6$ 으로 둘러싸인 정육각형은 다음 그림과 같다.



이때, 원점에서 직선 $l: x+\sqrt{3}y-k=0$ 까지의 거리는 $\frac{|-k|}{\sqrt{1+3}}=\frac{k}{2}\ (\because k>0)$

이므로 정육각형의 한 변의 길이를 a 라 하면 $\frac{k}{2}$ 는 한 변의 길이가 a 인 정삼각형의 높이이므로 $\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{k}{2}$ 에서 $a=\frac{k}{\sqrt{3}}$ 이다. 따라서 정육각형의 넓이는 한 변의 길이가 $\frac{k}{\sqrt{3}}$ 인 정삼각형 6 개의 넓이의 합과 같으므로 $6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{k}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{2}k^2$ 에서 $\frac{\sqrt{3}}{2}k^2=\sqrt{3}$

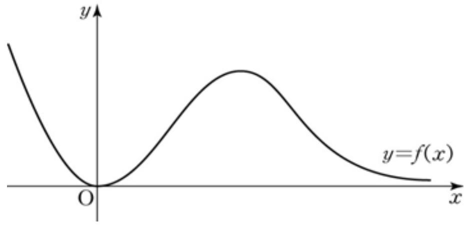
$\therefore k=\sqrt{2}\ (\because k>0)$

문제 2 정답 ⑤

$f(x)=kx^2e^{-x}\,(k>0)$ 에서

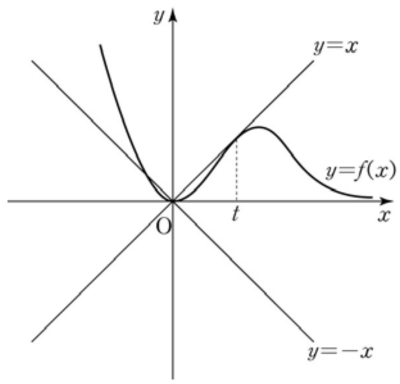
$f'(x)=2kxe^{-x}-kx^2e^{-x}=kx(2-x)e^{-x}$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=2$



x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4k}{e^2}$	$\searrow$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$ 에서 x 축까지의 거리와 y 축까지의 거리 중 크지 않은 값을 $g(t)$ 라 하므로 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$, $y=-x$ 와 만나는 교점을 찾는다.



이때, 미분가능하지 않은 점이 한 곳만 있으려면 $x>0$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$가 만나지 않거나 접해야 한다.

접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$ 라 하면 $kt^2e^{-t}=t$ …… ㉠이고

$x=t$ 에서 접선의 기울기가 1 이므로 $kt(2-t)e^{-t}=1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $2-t=1$ $\quad\therefore\ t=1$

$\therefore\ k=e$

따라서 k 의 최댓값은 e 이다.

논제 I -1

제시문에 의해 주어진 식을 만족하는 일차변환의 행렬은 $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ 이다.

논제 I -2

$\mathrm{P}_n=\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ 라 두면

[논제 I -1]에 의해 $\mathrm{P}_{n+1}=\mathrm{AP}_n=\mathrm{A}^2\mathrm{P}_{n-1}=\cdots=\mathrm{A}^n\mathrm{P}_1$ 이므로 $\mathrm{P}_{2014}=\mathrm{A}^{2013}\mathrm{P}_1$ 이다.

즉, $\begin{pmatrix} x_{2014} \\ y_{2014} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}^{2013}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ 이다.

행렬 A는 원점을 중심으로 $\frac{\pi}{6}$만큼 반시계방향으로 회전하는 회전변환이므로

$\mathrm{A}^{12}=\mathrm{E}$, $\mathrm{A}^{6}=-\mathrm{E}$ 이며 $\mathrm{A}^{3}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ 이다.

따라서, $\mathrm{A}^{2013}=(\mathrm{A}^{12})^{167}(\mathrm{A}^{6})\mathrm{A}^{3}=-\mathrm{A}^{3}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ 이다.

그러므로 $\begin{pmatrix}x_{2014}\\y_{2014}\end{pmatrix}=\mathrm{A}^{2013}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ 이고 $x_{2014}+y_{2014}=1$ 이다.

논제 Ⅱ-1

인하대학교 수학과학우수자 모의 논제 Ⅰ-1과 동일.

논제 Ⅱ-2*

6 명 각각이 A, B, C 세 방에 들어갈 수 있고 빈 방이 있어도 상관없다. 따라서 각 사람에 대해 3 가지 방법이 있으므로, 방법의 수는 $3^6=729$ 이다.

논제 Ⅱ-3

인하대학교 수학과학우수자 모의 논제 Ⅰ-2와 동일.

논제 Ⅲ-1**

$e^x=x^r\ (x>0)$ 이 하나의 근을 가지기 위해서는 두 함수의 그래프 $y=e^x$, $y=x^r\ (x>0)$ 가 한 점에서 만나야 한다. 또한, 임의의 양수 r 에 대하여 $\lim_{x\to\infty}(e^x-x^r)>0$ 이고 제시문에 의해 함수 $y=x^r\ (x>0)$ 의 그래프는 위로 오목하므로 두 그래프가 한 점에서만 만나기 위해서는 그 교점에서 접해야 한다.

따라서 두 그래프의 교점의 x 좌표를 a 라 하면

$$e^a=a^r \cdots ①$$

또한, 교점에서 접선의 기울기가 같아야 하므로

$$e^a=ra^{r-1} \cdots ②$$

①, ②에 의해 $r=e$ 이다.

논제 Ⅳ-1,2,3

인하대학교 수학과학우수자 모의 논제 Ⅲ-1, 2, 3과 동일.

---

* 인하대 풀이 참조

** 인하대 풀이 참조

33 한양대학교 모의

제시문 I **다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.** *

[가] 무한급수의 값을 구하는 방법으로 급수의 각 항을 부분 항들의 합 또는 차로 나타내는 것을 생각할 수 있다. 예를 들어 아래의 무한급수에서

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots$$

k 번째 항은 $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$ 로 나타낼 수 있으므로 제1항에 제 n항까지의 부분합 S_n 을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

따라서 무한급수의 합은 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=1$ 이 된다.

[나] 다음 무한급수의 값을 구해보자.

$$\frac{3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{5}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{7}{3\cdot 4\cdot 5}+\frac{9}{4\cdot 5\cdot 6}+\cdots$$

급수의 k 번째 항을 $\dfrac{A}{k}+\dfrac{B}{k+1}+\dfrac{C}{k+2}$ 의 꼴로 생각한 후, 이를 이용해 제1 항에 제n 항까지의 부분합 S_n 을 표현한다. 부분항들이 서로 상쇄되는 것을 생각하면 최종적으로 S_n 을 다음과 같이 간단히 쓸 수 있고 무한급수의 값이 $\dfrac{5}{4}$ 임을 알 수 있다.

$$S_n=\frac{5}{4}-\frac{D}{n^2+3n+2}$$

[다] 조금 더 복잡한 꼴의 무한급수를 생각해보자.

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+2}\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+E\right]$$

* 한양대학교 입학처

논제 I-1

제시문 (나)에 알맞도록 상수 A, B, C를 찾으시오.

논제 I-2

제시문 (나)에 알맞도록 n에 대한 다항식 D를 찾으시오.

논제 I-3

제시문 (다)에 알맞는 실수 E의 값을 구하시오.

제시문 II **다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.**

[가] 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이면 극한 $\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$는 어떤 실수 S로 수렴한다. (단, n은 자연수이고 $x_k = a+\frac{k(b-a)}{n}$) $\int_a^b f(x)dx$를 그 실수 S로 정의하고

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx\,,\ \int_a^a f(x)dx = 0$$

으로 정의한다.

[나] 함수 $f(x)$가 열린 구간 $(c,\ d)$에서 연속이고 a가 $(c,\ d)$에 속하는 한 점이면

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

가 $(c,\ d)$에서 성립한다.

[다] (정적분의 기본 정리) 함수 $f(x)$가 열린 구간 $(c,\ d)$에서 연속이고 a, b가 $(c,\ d)$에 속하는 두 점이라 하자. $F(x)$가 $F'(x)=f(x)$를 $(c,\ d)$에서 만족하면 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$$

[라] 임의의 실수 x는 어떤 정수 n과 실수 $y(0 \le y < 2\pi)$에 대하여 $x = 2\pi n + y$로 표현할 수 있다.

논제 II-1

극한값 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k+n}{n}\right)^{13}$을 구하시오.

논제 Ⅱ-2

계산 '$\int_{-\frac{1}{e}}^{e} \frac{1}{x}dx = [\ln|x|]_{-\frac{1}{e}}^{e} = 2$'에서 잘못된 점을 설명하시오.

논제 Ⅱ-3

실수 전체에서 $f'(x) = \ln(\sin x + 2)$ 과 $f(0) = 3$ 을 만족하는 함수 $f(x)$ 를 정적분을 이용해서 표현하시오.

논제 Ⅱ-4

어떤 실수 a ($a > 1$)에 대해 함수 $f(x)$ 가 실수전체에서 $f'(x) = \ln(\sin x + a)$ 를 만족할 때 $f(x)$ 가 실수전체에서 최댓값과 최솟값을 가질 필요충분조건이

$\int_{0}^{2\pi} \ln(\sin x + a)dx = 0$ 임을 설명하시오.

논제 Ⅱ-5

다음을 읽고 $\int_{0}^{2\pi} \ln(\sin x + a)dx = 0$ 을 만족하는 실수 a ($a > 1$)가 오직 하나 있음을 설명하시오.

㉮ $\int_{0}^{2\pi} \ln(\sin x + a)dx$ 는 a 의 함수로서 열린 구간 $(1, \infty)$ 에서 연속이다.
㉯ 1 보다 큰 실수 a 중 $\int_{0}^{\pi} \ln(a^2 - \sin^2 x)dx < 0$ 을 만족하는 것이 있다.

논술유형분석

문항 수	수학 2문항	시간	120분
연관 개념	무한급수, 정적분, 중간값의 정리		

제시문분석

제시문 Ⅰ

제시문[가]는 일반항이 2 개의 부분항으로 표현되는 경우 무한급수의 값을 구하는 방법의 예를 제시하고 있다. 제시문[나]는 일반항이 3 개의 부분항으로 표현되는 경우 무한급수의 값을 어떻게 구할 수 있는가를 설명하고 있다. 제시문[다]는 좀 더 복잡한 경우의 무한급수에서 이를 유한급수+무한급수 꼴로 표시하는 아이디어를 제시하고 있다.

제시문 Ⅱ

제시문[가]는 정적분의 정의를, 제시문[나]와 [다]는 정적분의 기본 정리(미적분학의 기본 정리)를 제시하고 있으며, 제시문[라]는 임의의 실수를 $2\pi\times$ (정수) + 실수 꼴로 표현할 수 있음을 설명하고 있다.

논제분석

논제 Ⅰ-1

일반항을 3 개의 부분항의 합으로 표현했을 때 각 항의 분자의 값을 구하는 문항이다.

논제 Ⅰ-2

논제1의 결과를 이용하여 부분합 S_n 을 구하는 문항이다. 제시문[가]를 참고로 하여 서로 상쇄되는 항이 무엇인지를 이해하면 어렵지 않게 구할 수 있다.

논제 Ⅰ-3

좀 더 복잡한 꼴의 무한급수를 적절하게 재배열하여 유한급수+무한급수 꼴로 변형한 다음, 제시문[가]의 풀이를 활용하여 무한급수 부분의 값을 구하는 문항이다. 어떻게 적절하게 재배열할지를 찾는 것이 문제 풀이의 관건이다.

논제 Ⅱ-1

정적분의 정의를 이용하여 극한값을 구하는 기본적인 문항이다.

논제 Ⅱ-2

정적분의 정의를 적용할 수 있는 조건을 잘 이해하고 있는가를 묻는 문항이다.

논제 Ⅱ-3

연속함수는 모두 원시함수를 갖는다는 사실을 숙지하고 원시함수를 정적분의 형태롤 표현할 수 있는가를 묻는 문항이다.

논제 Ⅱ-4

연속함수는 모두 원시함수를 갖는다는 사실을 숙지하고 원시함수를 정적분의 형태롤 표현할 수 있는가를 묻는 문항이다.

논제 Ⅱ-5

연속함수는 모두 원시함수를 갖는다는 사실을 숙지하고 원시함수를 정적분의 형태로 표현할 수 있는가를 묻는 문항이다.

배경지식쌓기

1. 무한급수의 수렴과 발산

(1) 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 에서 첫째항부터 제n 항까지의 합

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

를 이 무한급수의 부분합이라고 한다.

(2) 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 부분합으로 이루어진 수열

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ \cdots,\ S_n,\ \cdots$$

이 일정한 수 S에 수렴할 때, 즉 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ 일 때 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 S에 수렴한다고 하고, S를 이 무한급수의 합이라 하며 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots=S \text{ 또는 } \sum_{n=1}^{\infty}a_n=S$$

또, 이 부분합의 수열 $\{S_n\}$ 이 발산할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 은 발산한다고 한다.

2. 정적분과 무한급수

함수 $f(x)$ 가 구간 $[a,\ b]$ 에서 연속일 때,

(1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)\,dx$

(2) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{p}{n}k\right)\frac{p}{n}=\int_0^p f(x)\,dx$

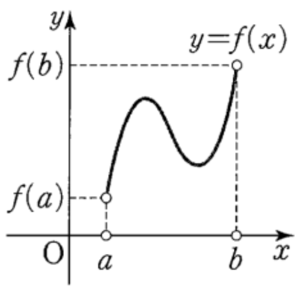
(3) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{p}{n}k\right)\frac{p}{n}=\int_a^{a+p} f(x)\,dx=\int_0^p f(a+x)\,dx$

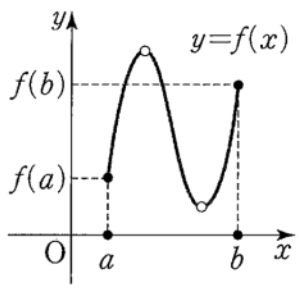
3. 최대 · 최소의 정리

함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a,\ b]$ 에서 연속이면 $f(x)$ 는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

(1) 닫힌 구간이 아닌 구간에서 정의된 연속함수는 최댓값과 최솟값을 갖지 않을 수도 있다.

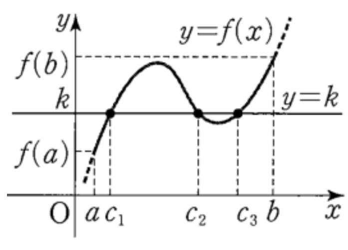
(2) 닫힌 구간에서도 연속함수가 아니면 최댓값과 최솟값을 갖지 않을 수도 있다.





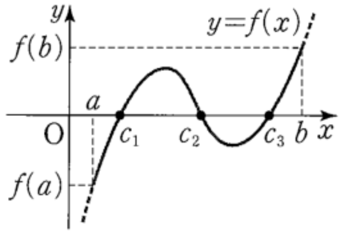
4. 정적분과 무한급수

(1) 중간값의 정리



함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a,\ b]$ 에서 연속이고 $f(a)\neq f(b)$ 이면 $f(a)$ 와 $f(b)$ 사이에 있는 임의의 값 k 에 대하여 $f(c)=k$ 인 c 가 열린 구간 $(a,\ b)$ 에서 적어도 하나 존재한다.

(2) 중간값의 정리의 활용



함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a,\ b]$ 에서 연속이고 $f(a)f(b)<0$ 이면 방정식 $f(x)=0$ 은 열린 구간 $(a,\ b)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

풀어보기

문제 1 $S=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2n+mn^2+2mn}$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) $\frac{1}{m^2n+mn^2+2mn}=\frac{1}{n}\left(\frac{\frac{1}{n+2}}{m}-\frac{\frac{1}{n+2}}{m+n+2}\right)$ 임을 보이시오.

(2) $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+2}\right)$ 임을 보이시오.

(3) S 의 값을 구하시오.

문제 2 $F'(x)=f(x)$ 인 이차함수 $y=f(x)$ 와 임의의 두 실수 a, c 에 대하여 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(a,\ F(a))$, $\mathrm{B}(a+c,\ F(a+c))$ 를 지나는 직선의 기울기와 같은 값을 갖는 것은? (2010년 7월 전국연합)

① $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{2n}\right)\frac{c}{n}$ ② $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{ck}{n}\right)\frac{1}{n}$ ③ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+c+\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$

④ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(c+\frac{ak}{n}\right)\frac{1}{2n}$ ⑤ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+\frac{k}{n}\right)\frac{2}{n}$

문제 3 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 $(x+1)f(x)=0$ 이 세 개의 열린 구간 $(-2,\ 0)$, $(0,\ 2)$, $(2,\ 4)$ 에서 각각 한 개의 실근을 가질 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (2013 EBS 수능특강)

[보 기]

ㄱ. $f(-2)g(2)<0$ ㄴ. $f(0)f(4)>0$ ㄷ. $f(0)f(2)f(4)<0$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제 4 연속함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = f(x+2)$ 이다.

(나) $\int_1^{\frac{3}{2}} f(2x)dx = 7$, $\int_1^{\frac{4}{3}} f(3x)dx = 1$

$\int_{2001}^{2012} f(x)dx$ 의 값은? (2010년 10월 전국연합)

① 65　　② 71　　③ 82　　④ 88　　⑤ 99

읽기자료

수열의 극한에 대한 해석학적 정의

이론적인 극한의 개념은 미적분학의 창시자 뉴턴(Newton, I. ; 1642~1727)에 의하여 도입되었으며, 오일러(Euler, J. L. ; 1707~1783), 볼차노(Bolzano, B. P. J. N. ; 1781~1848), 코시(Cauchy, A. L. ; 1789~1857) 등에 의하여 학문적 체계를 갖추게 되었다. 특히 코시는 극한의 개념을 명확히 하여 수열의 극한과 무한급수의 수렴성에 대하여 엄밀한 정의를 함으로써 극한의 개념을 체계화하였다. 코시는 <해석교정>에서 '변수가 차례로 택하는 값이 일정한 값에 가까워질 때, 그 차가 임의의 주어진 양보다 작아지면 그 정해진 값을 처음 변수의 극한이라고 한다.'로 극한을 정의하고 있다. 또, <미적분 개요>에서는 평균값의 정리, 정적분의 존재 정리의 증명에서 $\epsilon-\delta$ 논법을 사용하고 있다. 그러나 $\epsilon-N$ 논법과 $\epsilon-\delta$논법이 오늘날과 같이 엄밀한 모양으로 체계화된 것은 약 반세기 후인 바이어슈트라스(Weierstrass, K. T. W. ; 1815~1897)부터이다. 바이어슈트라스는 먼저 실수 체계를 엄밀하게 전개하고 그 다음에 해석학의 모든 기초적인 개념을 실수 체계로부터 유도하자며 '해석학의 산술화(arithmetization of analysis)'를 주장하였다. 실수 체계의 엄밀한 전개는 19세기 말에 바이어슈트라스, 데데킨트(Dedekind, J. W. R. ; 1831~1916), 칸토어(Cantor, G. ; 1845~1918), 페아노(Peano, G. ; 1858~1932) 등에 의하여 성공적으로 실현되었고, 실수 체계에서의 극한의 존재성이 확립된 것이다.

고등학교 교과서에서는 수열의 극한의 정의를 다음과 같이 하고 있다.

'무한수열 $a_1, a_2, a_3, \cdots a_n$ 에서 n 이 한없이 커짐에 따라 n 번째항 a_n 이 일정한 값 α 에 한없이 가까워지면, 수열 $\{a_n\}$ 은 α 에 수렴한다고 하고, 이 α 를 수열의 $\{a_n\}$ 의 극한값 또는 극한이라고 한다.'

이 정의에는 '한없이 커진다.'거나 '한없이 가까워진다.'와 같이 수학적으로 매우 애매모호한 표현이 있다. 예를 들어 수열 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$ 에서 n 이 한없이 커짐에 따라 n 번째 항은 한없이 0에 가까워진다고 할 수 있지만, 한편 -1에도 , -2에도 한없이 가까워진다고 할 수 있다. 따라서 '한없이 가까워진다.'는 표현은 어떤 상태를 나타내기에 다소 부

적절하다. 그러므로 'a_n 이 일정한 값 α 에 한없이 가까워진다.'는 것을 보다 엄밀한 수학적인 표현으로 바꾸어 수열의 극한을 다음과 같이 정의한다.

임의의 양수 ϵ 에 대하여 적당한 자연수 N이 있어서

$$n > N \text{일 때 } |a_n - \alpha| < \epsilon$$

이면 수열 $\{a_n\}$ 은 α에 수렴한다고 하며, 기호로 $\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha$ 와 같이 나타낸다. 이때 α 를 수열 $\{a_n\}$ 의 극한 또는 극한값이라고 한다.

이 정의에는 '한없이 커진다.'거나 '한없이 가까워진다.'와 같은 모호한 말이 없고, 실수의 연산 및 대소 관계와 같은 산술적인 내용만이 사용된다.

수열의 극한을 $\epsilon - N$ 논법으로 정의하면 극한에 관한 성질을 다음과 같이 증명할 수 있다.

수렴하는 수열 $\{a_n\}$ 의 극한은 유일하다.

(증명) α, β 를 수열 $\{a_n\}$ 의 서로 다른 극한이라 하고, $\epsilon = \frac{1}{3}|\alpha - \beta|$ 라고 하자.

그러면 ϵ 은 양수이므로 적당한 수 N_1 과 N_2 가 정해져서

$n > N_1$ 이면 $|a_n - \alpha| < \epsilon$, $n > N_2$ 이면 $|a_n - \beta| < \epsilon$

이제 $N = \mathrm{Max}\{N_1, N_2\}$ 라고 할 때, $n > N$이면

$$|\alpha - \beta| = |(\alpha - a_n) + (a_n - \beta)| \le |a_n - \alpha| + |a_n - \beta| < 2\epsilon = \frac{2}{3}|\alpha - \beta|$$

이것은 모순이다. 따라서 수렴하는 수열 $\{a_n\}$ 의 극한은 유일하다.

수렴하는 수열 $\{a_n\}$ 은 유계(모든 항의 절댓값이 일정한 수보다 크지 않음)이다.

(증명) $a_n \to \alpha$ 라고 하자. 임의로 한 양수 ϵ 을 잡으면, $n > N$일 때 $|a_n - \alpha| < \epsilon$,

즉 $|a_n| < |\alpha| + \epsilon$ 이 되는 자연수 N이 정해진다.

이제 $M = \{|a_1|, |a_2|, |a_3|, \cdots |a_n|, |\alpha| + \epsilon\}$ 라고 하면, 모든 자연수 n 에 대하여 $|a_n| \le M$이다. 따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 유계이다.

수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ (α , β 는 실수)일 때, 다음이 성립한다.

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$

(2) $\lim_{n\to\infty} ka_n = k\alpha$ (단, k 는 상수)

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$

(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$ (단, $b_n \neq 0$, $\beta \neq 0$)

(증명)

(1) 임의의 양수 ϵ 에 대하여 적당한 자연수 N_1 , N_2 가 존재하여 다음이 성립한다.

$$n > N_1 \text{ 이면 } |a_n - \alpha| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$n > N_2 \text{ 이면 } |b_n - \beta| < \frac{\epsilon}{2}$$

이제 $N = \mathrm{Max}\{N_1, N_2\}$ 라고 하면, $n > N$일 때 다음이 성립한다.

$$|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| = |(a_n - \alpha) - (b_n - \beta)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha + \beta$ 이다.

같은 방법으로 차에 관한 결과를 증명할 수 있다.

(2) 이 결과는 (3)에서 수열 $\{b_n\}$ 의 모든 항이 k 인 경우로 생각할 수 있다.

(3) 수열 $\{a_n\}$ 은 유계이므로

$|a_n| \le M(\ n = 1, 2, \cdots\ )$, $|\beta| \le M$인 양수 M을 잡을 수 있다. 이때

$|a_n b_n - \alpha\beta| = |a_n(b_n - \beta) + \beta(a_n - \alpha)| \ \le |a_n||b_n - \beta| + |\beta||a_n - \alpha|$

$\le M(|b_n - \beta| + |a_n - \alpha|)$

여기서 $a_n \to \alpha$, $b_n \to \beta$ 이므로 임의의 양수 ϵ 에 대하여 $n > N$일 때

$$|a_n - \alpha| < \frac{\epsilon}{2M}\ ,\ \ |b_n - \beta| < \frac{\epsilon}{2M}$$

이 되는 양수 N이 정해 진다. 따라서 $n > N$이면

$$|a_n b_n - \alpha\beta| < M\left(\frac{\epsilon}{2M} + \frac{\epsilon}{2M}\right) = \epsilon$$

따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$ 이다.

(4) 먼저 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n} = \frac{1}{\beta}$ 임을 증명하고 (3)의 결과를 적용한다.

예시답안

풀어보기

문제 1

(1)

$$\frac{1}{m^2n+mn^2+2mn}=\frac{1}{n}\times\frac{1}{m(m+n+2)}=\frac{1}{n}\times\frac{1}{n+2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+n+2}\right)$$

(2) $$S=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2n+mn^2+2mn}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+n+2}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}\left[\left(1-\frac{1}{n+3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+5}\right)+\cdots\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+2}\right]$$

[참고]

$\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+n+2}\right)=\lim_{l\to\infty}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+n+2}\right)$ 이므로

$l>n+2$ 를 만족하는 충분히 큰 자연수 l 에 대하여 $\displaystyle\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+n+2}\right)$ 을 구해도 일반성을 잃지 않는다.

$$\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+n+2}\right)$$

$$=\left[\left(1-\frac{1}{n+3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{2n+4}\right)+\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{2n+5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{l+n+2}\right)\right]$$

$$=\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{l}\right)-\left(\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}+\cdots+\frac{1}{l}+\cdots+\frac{1}{l+n+2}\right)\right]$$

$$=\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+2}\right)-\left(\frac{1}{l+1}+\cdots+\frac{1}{l+n+2}\right)\right]$$

이다. 따라서

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+n+2}\right)=\lim_{l\to\infty}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+n+2}\right)$$

$$=\lim_{l\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+2}\right)-\left(\frac{1}{l+1}+\cdots+\frac{1}{l+n+2}\right)\right]=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+2}$$

(3) $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+2}\right]$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+2}\right]$

$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+2}\right]$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right]+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right]+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right]+\cdots\right\}$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right]-\frac{1}{3}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right]\right)+\left(\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right]-\frac{1}{4}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right]\right)+\right.$

$\left.\left(\frac{1}{3}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right]-\frac{1}{5}\left[1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right]\right)+\cdots\right\}$

$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right]+\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right]+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right]+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right]+\cdots\right\}$

$=\frac{1}{2}\left\{\frac{11}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{25}{12}+\left(\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{4\times6}+\frac{1}{5\times7}+\cdots\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left\{\frac{11}{6}+\frac{25}{24}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\right\}=\frac{7}{4}$

문제 2 정답 ②

$F'(x)=f(x)$ 이므로 $\int f(x)dx=F(x)+C$ 이다.

따라서 $\mathrm{A}(a,\ F(a))$, $\mathrm{B}(a+c,\ F(a+c))$ 를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{F(a+c)-F(a)}{(a+c)-a}=\frac{1}{c}\{F(a+c)-F(a)\}=\frac{1}{c}\int_a^{a+c}f(x)dx$

$=\frac{1}{c}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{ck}{n}\right)\frac{c}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{ck}{n}\right)\frac{1}{n}$

문제 3 정답 ②

$(x+1)f(x)=0$ 에서 $g(x)=(x+1)f(x)$ 라 하면 함수 $g(x)$ 는 삼차함수이므로 모든 실수에서 연속이다. 방정식 $g(x)=0$ 이 세 개의 열린 구간 $(-2,\ 0)$, $(0,\ 2)$, $(2,\ 4)$ 에서 각각 한 개의 실근을 가지므로 중간값의 정리에 의하여

$g(-2)g(0)=-f(-2)\cdot f(0)<0 \quad \therefore\ f(-2)f(0)>0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$g(0)g(2)=f(0)\cdot 3f(2)<0 \quad \therefore\ f(0)f(2)<0 \quad \cdots\cdots$ ㉡

$g(2)g(4)=3f(2)\cdot 5f(4)<0 \quad \therefore\ f(2)f(4)<0 \quad \cdots\cdots$ ㉢

ㄱ. ㉠, ㉡에서 변끼리 곱하면 $f(-2)\{f(0)\}^2f(2)<0 \quad \therefore\ f(-2)f(2)<0$ (참)

ㄴ. ㉡, ㉢에서 변끼리 곱하면 $f(0)\{f(2)\}^2 f(4)>0$ $\therefore\ f(0)f(4)>0$ (참)
ㄷ. 위의 ㉠, ㉡, ㉢을 만족시키는 경우는 다음의 두 가지이다.
(ⅰ) $f(-2)<0$, $f(0)<0$, $f(2)>0$, $f(4)<0$
(ⅱ) $f(-2)>0$, $f(0)>0$, $f(2)<0$, $f(4)>0$
(ⅰ)의 경우는 $f(0)f(2)f(4)>0$ (ⅱ)의 경우는 $f(0)f(2)f(4)<0$
이므로 항상 $f(0)f(2)f(4)<0$ 이라 할 수 없다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

문제 4 정답 ④

$\int_1^{\frac{3}{2}} f(2x)dx=7$ 에서 $\int_2^3 f(x)dx=14$ $\int_1^{\frac{4}{3}} f(3x)dx=1$ 에서 $\int_3^4 f(x)dx=3$

$f(x)$ 는 주기가 2 인 함수이므로

$\int_2^3 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx$, $\int_3^4 f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx$ 이고

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx=14+3=17$$

$$\int_{2001}^{2012} f(x)dx=\int_1^{12} f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+5\int_2^4 f(x)dx$$

$$=\int_1^2 f(x)dx+5\int_0^2 f(x)dx=3+17\times5=88$$

논제 Ⅰ-1*

k 번째 항은 $\dfrac{2k+1}{k(k+1)(k+2)}=\dfrac{A}{k}+\dfrac{B}{k+1}+\dfrac{C}{k+2}$ 이므로 $A=\dfrac{1}{2}$, $B=1$, $C=-\dfrac{3}{2}$ 이다.

논제 Ⅰ-2

$$S_n=\left[\frac{\frac{1}{2}}{1}+\frac{1}{2}-\frac{\frac{3}{2}}{3}\right]+\left[\frac{\frac{1}{2}}{2}+\frac{1}{3}-\frac{\frac{3}{2}}{4}\right]+\left[\frac{\frac{1}{2}}{3}+\frac{1}{4}-\frac{\frac{3}{2}}{5}\right]+\cdots$$
$$+\left[\frac{\frac{1}{2}}{n-2}+\frac{1}{n-1}-\frac{\frac{3}{2}}{n}\right]+\left[\frac{\frac{1}{2}}{n-1}+\frac{1}{n}-\frac{\frac{3}{2}}{n+1}\right]+\left[\frac{\frac{1}{2}}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{\frac{3}{2}}{n+2}\right]$$

부분 항들 중 $-\dfrac{\frac{3}{2}}{k}+\dfrac{1}{k}+\dfrac{\frac{1}{2}}{k}=0\ (k\geq3)$ 을 만족하는 세 짝을 찾을 수 있으므로 이것을 상쇄하면

* 이하 풀이는 대학 발표 예시답안

$$S_n=\left[\frac{\frac{1}{2}}{1}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{\frac{1}{2}}{2}\right]+\left[-\frac{\frac{3}{2}}{n+1}\right]+\left[\frac{1}{n+1}-\frac{\frac{3}{2}}{n+2}\right]$$
$$=\frac{5}{4}-\frac{\frac{1}{2}}{n+1}-\frac{\frac{3}{2}}{n+2}=\frac{5}{4}-\frac{1}{n^2+3n+2}\left(2n+\frac{5}{2}\right)$$

논제 Ⅰ-3

$$S=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\cdots\right]$$
$$\begin{aligned}2S=&\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\\&-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\\&-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+\cdots\end{aligned}$$
$$2S=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\cdots$$

$E=2S-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$ 이므로

$$\begin{aligned}E&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\cdots\\&=\left[\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\frac{1}{5\cdot6}+\cdots\right]+\left[\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{4\cdot6}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots\right]\\&=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{3}+\frac{4}{27}=\frac{15}{24}=\frac{5}{8}\end{aligned}$$

논제 Ⅱ-1

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k+n}{n}\right)^{13}$ 에서 $\frac{2k+n}{n}=1+k\frac{2}{n}=1+k\frac{3-1}{n}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k+n}{n}\right)^{13}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{3-1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+k\frac{3-1}{n}\right)^{13}=\frac{1}{2}\int_1^3 x^{13}dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{14}x^{14}\right]_1^3=\frac{1}{28}(3^{14}-1)$$

논제 Ⅱ-2

정적분의 기본정리를 사용하고 있는데 이 정리를 사용하려면 피적분함수는 적분구간에서 연속이어야 한다. 그런데 함수 $\frac{1}{x}$ 는 $x=0$ 에서 연속이 아니고 0 은 적분구간 $\left[-\frac{1}{e},\ e\right]$ 에 속한다. 따라서 정적분의 기본정리를 사용할 수 없다.

논제 Ⅱ-3

$f(x)=\int_0^x \ln(\sin t+2)dt+C$ (C는 상수)이다. $f(0)=C$이므로 $C=3$.

그러므로 $f(x)=\int_0^x \ln(\sin t+2)dt+3$

논제 Ⅱ-4

$f(x)=\int_0^x \ln(\sin t+a)dt$ 라 놓아도 일반성을 잃지 않는다. 어떤 정수 n에 대해 $x=2n\pi+y$, $0\le y<2\pi$ 라 쓸 수 있다. 그러면

$$f(x)=\int_0^{2n\pi+y}\ln(\sin t+a)dt=\int_0^{2n\pi}\ln(\sin t+a)dt+\int_{2n\pi}^{2n\pi+y}\ln(\sin t+a)dt$$

이고 $\ln(\sin x+a)$ 는 x 대신 $x+2n\pi$ 를 대입해도 변함없는 함수이므로

$$f(x)=n\int_0^{2\pi}\ln(\sin t+a)dt+\int_0^y \ln(\sin t+a)dt$$

라 쓸 수 있다. 그런데 $\int_0^y \ln(\sin t+a)dt$ 는 y 에 대해 닫힌 구간 $[0,\ 2\pi]$ 에서 연속이므로 최댓값과 최솟값을 갖는다. 따라서 $0\le y<2\pi$ 인 범위에서 $\int_0^y \ln(\sin t+a)dt$ 는 유한한 범위의 값을 갖는다. 만약 $\int_0^{2\pi}\ln(\sin x+a)dx>0$ 이면 $n\int_0^{2\pi}\ln(\sin t+a)dt$ 는 정수 n이 커지면 무한히 커지고 n이 무한히 작은 음수로 되면 무한히 작은 음수가 된다. $\int_0^{2\pi}\ln(\sin x+a)dx<0$ 이면 $n\int_0^{2\pi}\ln(\sin t+a)dt$ 는 n에 대해 반대로 움직인다. 따라서 $\int_0^{2\pi}\ln(\sin x+a)dx\ne 0$ 이면 $f(x)$ 는 최댓값과 최솟값을 가질 수 없다.

즉, $\int_0^{2\pi}\ln(\sin x+a)dx=0$ 인 것은 $f(x)$ 가 최댓값과 최솟값을 가질 필요조건이다.

만약 $\int_0^{2\pi}\ln(\sin x+a)dx=0$ 이면

$$f(x+2\pi)=\int_0^{x+2\pi}\ln(\sin t+a)dt=\int_0^{2\pi}\ln(\sin t+a)dt+\int_{2\pi}^{x+2\pi}\ln(\sin t+a)dt$$
$$=\int_0^x \ln(\sin t+a)dt=f(x)$$

이므로 $f(x)$ 는 x 대신 $x+2n\pi$ 를 대입해도 변함없는 함수이다. 따라서 $[0,\ 2\pi]$ 에서 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값이 실수전체에서의 최댓값과 최솟값이 된다. 그런데 $f(x)$ 는 $[0,\ 2\pi]$ 에서 연속이므로 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

즉, $\int_0^{2\pi} \ln(\sin x + a)dx = 0$ 인 것은 $f(x)$ 가 실수전체에서 최댓값과 최솟값을 가질 충분조건이다.

논제 Ⅱ-5

$1 < a < b$ 이면 $\ln(\sin x + a) < \ln(\sin x + b)$ 가 모든 x 에 대해 성립한다.

따라서 $\int_0^{2\pi} \ln(\sin x + a)dx < \int_0^{2\pi} \ln(\sin x + b)dx$ 가 성립한다.

그러므로 $\int_0^{2\pi} \ln(\sin x + a)dx = 0$ 인 a 가 있다면 그것은 오직 하나이다. 또한 $\ln(\sin x + 3) > 0$ 이 모든 x 에 대해 성립하므로 $\int_0^{2\pi} \ln(\sin x + 3)dx > 0$ 이 성립한다.

한편 ㉯의 조건에 의해 a_0 ($a_0 > 1$)에 대해 $\int_0^{\pi} \ln\left(a_0^2 - \sin^2 x\right)dx < 0$ 이 성립한다고 하자.

그런데

$$\int_0^{2\pi} \ln\left(\sin x + a_0\right)dx = \int_0^{\pi} \ln\left(\sin x + a_0\right)dx + \int_{\pi}^{2\pi} \ln\left(\sin x + a_0\right)dx$$

이고 $x = y + \pi$ 로 치환하면

$$\int_{\pi}^{2\pi} \ln\left(\sin x + a_0\right)dx = \int_0^{\pi} \ln\left(-\sin y + a_0\right)dy = \int_0^{\pi} \ln\left(a_0 - \sin x\right)dx \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \ln\left(\sin x + a_0\right)dx &= \int_0^{\pi} \ln\left(\sin x + a_0\right)dx + \int_{\pi}^{2\pi} \ln\left(\sin x + a_0\right)dx \\ &= \int_0^{\pi} \ln\left(a_0 + \sin x\right)dx + \int_0^{\pi} \ln\left(a_0 - \sin x\right)dx \\ &= \int_0^{\pi} \ln\left\{\left(a_0 + \sin x\right) \times \left(a_0 - \sin x\right)\right\}dx = \int_0^{\pi} \ln\left(a_0^2 - \sin^2 x\right)dx < 0\end{aligned}$$

이제 ㉮의 조건에 의해 중간값의 정리를 적용하면 $\int_0^{2\pi} \ln(\sin x + a)dx = 0$ 이 성립하게 하는 a 가 a_0 과 3 사이에 존재한다. 위에서 관찰한 것을 함께 고려하면 $\int_0^{2\pi} \ln(\sin x + a)dx = 0$ 이 성립하게 하는 a 가 오직 하나 있다는 것을 알 수 있다.

34 한양대학교 수시(오전)

제시문 1 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)*

실수 a, b가 0보다 클 때, a^b과 b^a의 크기를 비교해 보고자 한다. a값을 고정하고 b값을 변화시킬 때, a^b과 b^a의 대소 관계가 어떻게 변하는지 살펴보는 것이다. 가령 $a=3$으로 하고 b값을 변화시켜 보자. $b=2, 3, 4$이면, 다음이 성립함을 쉽게 알 수 있다.

$$3^2 > 2^3,\ 3^3 = 3^3,\ 3^4 > 4^3$$

그렇다면 $2<b<3$ 또는 $3<b<4$인 경우는 어떠할까? b가 자연수가 아닐 때 3^b과 b^3의 크기를 어떻게 비교할 수 있을까?

문제 1

1. $3^{2.5}$과 2.5^3의 크기를 비교하시오.

2. $3^{2.4}$과 2.4^3의 크기를 비교하시오. (단, $\log 2 = 0.30102\cdots$, $\log 3 = 0.47712\cdots$)

3. $x>0$일 때 함수 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$의 증감을 조사하시오.

4. 물음 3의 결과를 이용하여 3^{π}과 π^3의 크기를 비교하시오.

5. 양의 실수 a에 대하여 $a^x = x^a$을 만족하고 $x \neq a$인 양의 실수 x는 몇 개인지 조사하시오.
(단, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$)

* 한양대학교 입학처

제시문 2 **다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)***

[가] 어떤 학생이 점화식으로 주어진 수열의 극한은 쉽게 결정할 수 있다고 생각했다. 다음은 이 학생이 예를 들어 설명한 방법이다.

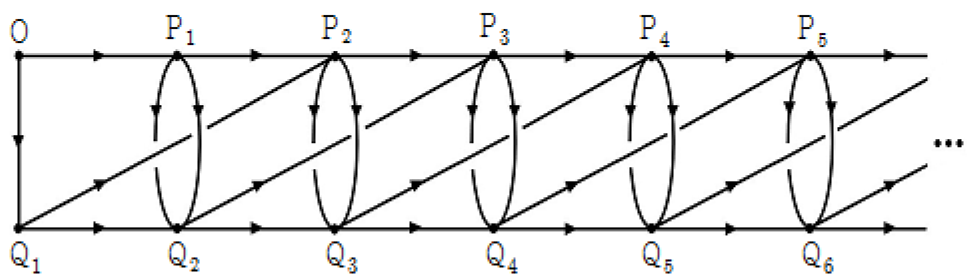
▪ 점화식 $a_1=\frac{1}{3}$, $a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 으로 주어진 수열 $\{a_n\}$ 이 수렴한다고 가정하고, 그 극한값을 α라 하자. $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\alpha$ 이므로,

$$\alpha=\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2a_n+1}=\frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{2\lim_{n\to\infty} a_n+1}=\frac{\alpha}{2\alpha+1}$$ 이고, 따라서 $\alpha=0$ 이다.

▪ 점화식 $b_1=2$, $b_{n+1}=\frac{b_n^2+1}{b_n-1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 으로 주어진 수열 $\{b_n\}$ 이 수렴한다고 가정하고, 그 극한값을 β라 하자. $\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty} b_{n+1}=\beta$ 이므로,

$$\beta=\lim_{n\to\infty} b_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n^2+1}{b_n-1}=\frac{\lim_{n\to\infty} b_n^2+1}{\lim_{n\to\infty} b_n-1}=\frac{\beta^2+1}{\beta-1}$$ 이고, 따라서 $\beta=-1$ 이다.

[나] 아래 그림에서 점 O로부터 화살표를 따라 점 P_n, Q_n $(n=1,2,3,\cdots)$ 으로 갈 수 있는 경로의 수를 각각 x_n, y_n 이라 하자.



예를 들면, $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=5$, $y_1=1$, $y_2=3$, $y_3=7$ 이다.

[다] 위 [나]에 주어진 수열 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 에 대해, 수열 $\{z_n\}$ 은 $z_n=\frac{y_n}{x_n}$ 으로 정의된다.

문제 2

1. 제시문 [가]에 주어진 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 실제로 α, β 로 수렴하는지 판정하고, 이 학생이 제시한 방법이 타당한지 설명하시오.

* 한양대학교 입학처

2. 제시문 [나]에 주어진 경로의 수 x_n, y_n 에 대해, 수열 $\{y_n + \sqrt{2}\,x_n\}$, $\{y_n - \sqrt{2}\,x_n\}$ 의 일반항을 각각 구하시오.

3. 제시문 [다]에 주어진 수열 $\{z_n\}$ 의 일반항을 구하시오. 이를 이용해 이 수열의 극한값을 구하시오.

4. 물음 2~3의 과정을 관찰하면, 같은 방법으로 임의의 자연수 c 에 대해 $\sqrt{c}$ 로 수렴하는 유리수들의 수열을 구할 수 있다. 이 방법으로 $\sqrt{5}$ 로 수렴하는 수열을 구했을 때, 이 수열의 첫 다섯 항을 쓰시오.

논술유형분석

문항 수	수학 2문항	시간	120분
연관 개념	지수함수와 로그함수, 도함수의 활용, 점화식, 수열의 극한,		

제시문분석

제시문 1

수학Ⅰ의 '지수함수' 단원과 수학 Ⅱ의 '미분법' 단원에서 출제한 문제로서 지수로 표현된 두 수의 크기를 비교하는 것에 대해 묻고 있다.

제시문 2

수학Ⅰ의 '수열의 극한' 단원에서 출제하였는데, 교과서에 수록된 한 연습문제를 그 출발점으로 하여 자연수의 제곱근에 수렴하는 어떤 수열을 다루고 있다.

논제분석

문제 1

1~2. 지수가 유리수일 때 두 거듭제곱의 크기를 비교하는 문제이다. 로그를 활용하여 크기를 비교할 줄 알아야 한다.

3. 로그함수와 그 도함수를 활용하여 $x^{\frac{1}{x}}$ 의 증감을 조사하는 문제이다.

4. 지수가 무리수일 때, 두 거듭제곱의 크기를 비교하는 문제이다.

5. 함수 $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ 의 그래프를 활용하여 주어진 방정식의 해를 묻는 문제이다.

문제 2

1. 점화식으로 주어진 수열의 극한에 대한 판정이 옳고 그른지를 판정하는 문제이다.

2. 그래프가 주어진 연립점화식의 일반항을 구할 수 있는지를 묻고 있다.

3. 수열의 일반항과 극한값을 구하는 문제이다.

4. 제곱근을 극한값으로 하는 유리수들의 수열의 일반항을 구하는 문제이다.

배경지식쌓기

유형별 점화식

(1) $a_{n+1}=a_n+f(n)$ 꼴의 점화식

[방법 1] n 대신 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$ 을 대입하여 변변 더한다.
[방법 2] 공식을 이용한다.

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)$$

▶ 수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열이 $\{f(n)\}$ 이다.

(2) $a_{n+1}=a_nf(n)$ 꼴의 점화식

(1) $f(n)$ 이 **상수**이면 수열 $\{a_n\}$ 은 **(공비)=$f(n)$인 등비수열**이다.
(2) $f(n)$ 이 **변수**이면
  [방법 1] n 대신 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$ 을 대입하여 변변 곱한다.
  [방법 2] 공식을 이용한다.

$$a_n=a_1f(1)f(2)f(3)\cdots f(n-1)$$

(3) $a_{n+1}=pa_n+q$ ($p\neq 1$, $q\neq 0$) 꼴의 점화식

[방법 1] $(a_{n+1}-\alpha)=p(a_n-\alpha)$ $\left(\alpha=\dfrac{q}{1-p}\right)$ 로 변형한다.

⇨ 수열 $\{a_n-\alpha\}$ 는 첫째항이 $a_1-\alpha$, 공비가 p 인 등비수열이다.

[방법 2] $a_{n+2}-a_{n+1}=p\,(a_{n+1}-a_n)$ 으로 변형한다.

⇨ 수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열은 첫째항이 a_2-a_1, 공비가 p 인 등비수열이다.

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_2-a_1)p^{k-1}$$

▶ $a_{n+1}=pa_n+q$ 꼴에서

① $p=1$ 이면 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 a_1, 공차가 q 인 등차수열

⇨ $a_n=a_1+(n-1)q$

② $q=0$ 이면 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 a_1, 공비가 p 인 등비수열

⇨ $a_n=a_1\,p^{n-1}$

(4) $pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0$ $(p+q+r=0,\ pqr\neq 0)$ 꼴의 점화식

⇨ 이웃한 세 항 사이의 관계식

$a_{n+2}-a_{n+1}=\dfrac{r}{p}(a_{n+1}-a_n)$으로 변형 후 계차수열이 공비가 $\dfrac{r}{p}$ 인 등비수열임을 이용한다.

⇨ $a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(a_2-a_1)\cdot\left(\frac{r}{p}\right)^{k-1}$ $\left(\dfrac{r}{p}\neq 1\right)$

▶ 수열 $\{a_{n+1}-a_n\}$은 첫째항이 a_2-a_1, 공비가 $\dfrac{r}{p}$인 등비수열이다.

(5) $a_{n+1}=\dfrac{pa_n}{qa_n+r}$ 꼴의 점화식

양변의 **역수**를 취하여 $\dfrac{1}{a_n}=b_n$으로 놓고 b_n을 구한 다음 a_n을 구한다.

⇨ (1) 또는 (3)의 방법으로 푼다.

(6) 거듭제곱근 꼴의 점화식

$a_{n+1}=qa_n{}^{p}$ $(q>0,\ q\neq 1)$ 의 꼴

첫째 : 양변에 **q를 밑으로 하는 로그**를 취한다.

둘째 : $\log_q a_n=b_n$ 으로 놓고 b_n 을 구한다.

셋째 : a_n 을 구한다.

(7) $pa_n \cdot a_{n+1} = qa_n - ra_{n+1}$ 꼴의 점화식

이웃하는 두 항 a_n, a_{n+1}의 곱의 꼴 ⇨ 각 항을 $a_n a_{n+1}$로 나눈다.

[참고]

축차대입법: a_n, a_{n+1}의 관계식에서 n 대신 $1, 2, 3, \cdots$ 을 대입하여 일반항 a_n을 구하는 방법으로 점화식에서 일반항을 구하는 기본적인 방법이다.

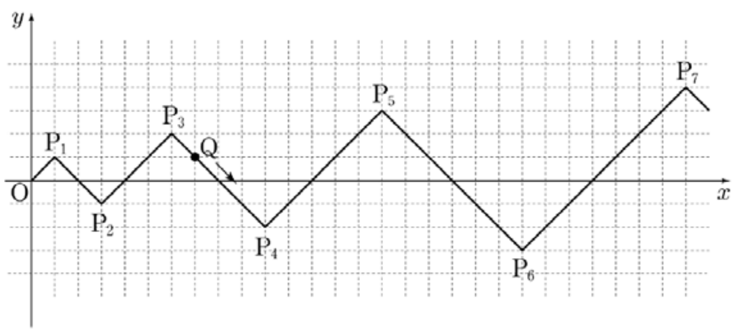
풀어보기

문제 1 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}_n(x_n, y_n)$을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) $x_1 = y_1 = 1$

(나) $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + (n+1) \\ y_{n+1} = y_n + (-1)^2(n+1) \end{cases} \quad (n \geq 1)$

점 Q는 원점 O를 출발하여 $\overline{\mathrm{OP}_1}$을 따라 점 P_1에 도착한다.
자연수 n에 대하여 점 P_n에 도착한 점 Q는 점 P_{n+1}을 향하여 $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$을 따라 이동한다.
점 Q는 한 번에 $\sqrt{2}$ 만큼 이동한다. 예를 들어, 원점에서 출발하여 7번 이동한 점 Q의 좌표는 (7, 1)이다. 원점에서 출발하여 55번 이동한 점 Q의 y좌표는? [4점](2013년 6월 평가원)



① -5 ② -6 ③ -7 ④ -8 ⑤ -9

문제 2 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 10$이고 $(a_{n+1})^n = 10(a_n)^{n+1}$ $(n \geq 1)$을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

주어진 식의 양변에 상용로그를 취하면 $n\log a_{n+1}=(n+1)\log a_n+1$ 이다. 양변을 $n(n+1)$ 로 나누면 $\frac{\log a_{n+1}}{n+1}=\frac{\log a_n}{n}+\boxed{(가)}$ 이다.
$b_n=\frac{\log a_n}{n}$ 이라 하면 $b_1=1$ 이고 $b_{n+1}=b_n+\boxed{(가)}$ 이다.
수열 $\{b_n\}$ 의 일반항을 구하면 $b_n=\boxed{(나)}$ 이므로 $\log a_n=n\times\boxed{(나)}$ 이다.
그러므로 $a_n=10^{n\times\boxed{(나)}}$ 이다.

위의 (가)와 (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$ 과 $g(n)$ 이라 할 때, $\frac{g(10)}{f(4)}$ 의 값은? (2013년 대수능)

① 38 ② 40 ③ 42 ④ 44 ⑤ 46

예시답안

풀어보기

문제 1

점 Q 는 직선을 따라 한 번에 $\sqrt{2}$ 만큼 이동하기 때문에 x 방향으로 $+1$ 만큼, y 축 방향으로 ±1 만큼씩 이동한다. $\overline{OP_1}$ 에서 1 회, $\overline{P_1P_2}$ 에서 2 회, $\cdots$, $\overline{P_nP_{n+1}}$ 에서 $n+1$ 회 이동한다. 따라서 원점에서 출발하여 55 번 이동한 점 Q 의 y 좌표는 $1+2+3\cdots+10$ 합에 의해 P_{10} 의 위치로 이동하게 된다.
$y_{n+1}=y_n+(-1)^n\times(n+1)$ 에 의해

$$y_{10}=y_1+\sum_{k=1}^{9}(-1)^k\times(k+1)=1+\{(-2)+3+\cdots+(-10)\}=-5$$

문제 2

주어진 식의 양변에 상용로그를 취하면 $n\log a_{n+1}=(n+1)\log a_n+1$ 이다. 양변을 $n(n+1)$ 로 나누면

$$\frac{\log a_{n+1}}{n+1}=\frac{\log a_n}{n}+\frac{1}{n(n+1)}$$

$b_n=\frac{\log a_n}{n}$ 이라 하면 $b_1=1$ 이고 $b_{n+1}=b_n+\frac{1}{n(n+1)}$ 이다.
수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}=1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1+\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$=\left(2-\frac{1}{n}\right) \text{ 이므로 } \log a_n = n\times\left(2-\frac{1}{n}\right) \text{ 이다.}$$

$$\therefore\ f(n)=\frac{1}{n(n+1)} \text{ 이고 } g(n)=2-\frac{1}{n} \text{ 이므로 } \frac{g(10)}{f(4)}=\frac{2-\frac{1}{10}}{\frac{1}{4\times5}}=38$$

문제 1-1

양변을 제곱하면 $(3^{2.5})^2=3^5=243$ 이고 $(2.5^3)^2=2.5^6=\frac{5^6}{2^6}>243$ 이다. 따라서

$$3^{2.5}<2.5^3$$

문제 1-2

2.4^3 과 $3^{2.4}$ 의 비를 계산해 보자. 먼저 $y=\frac{2.4^3}{3^{2.4}}$ 라 하면

$$\log y=3\log2.4-2.4\log3=3(\log3+3\log2-1)-2.4\log3=0.6\log3+9\log2-3$$

이다. 한편, $\log2<0.3011$, $\log3<0.4772$ 이므로,

$$\begin{aligned}\log y &= 0.6\log3+9\log2-3\\ &<(0.6)(0.4772)+9(0.3011)-3\\ &=0.28632+2.7099-3=2.99622-3<0\end{aligned}$$

$\therefore y=\frac{2.4^3}{3^{2.4}}<1$ 이므로 $3^{2.4}>2.4^3$ 이다.

문제 1-3

함수 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ 의 양변에 ln 로그를 걸면 $\ln f(x)=\frac{1}{x}\ln x$ 이다.

양변을 x에 대해 미분하면,

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{1}{x^2}\cdot\ln x+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1-\ln x}{x^2} \qquad \therefore\ f'(x)=x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)$$

한편, $x>0$ 이므로 $\frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2}>0$ 이다.

따라서 $0<x<e$ 이면 $f'(x)>0$ 이므로 $f(x)$ 는 증가하고, $x>e$ 이면 $f'(x)<0$ 이므로 $f(x)$ 는 감소한다.

문제 1-4

$e<3<\pi$ 이므로 이 구간에서 $f(x)$ 는 감소한다.(문제1-3의 결과를 이용)

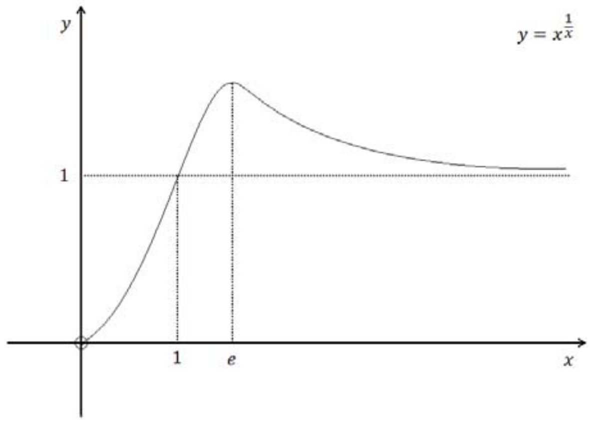
따라서 $f(3)>f(\pi)$, 즉 $3^{\frac{1}{3}}>\pi^{\frac{1}{\pi}}$ 이다. $\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{3\pi}>\left(\pi^{\frac{1}{\pi}}\right)^{3\pi}$ $\therefore\ 3^{\pi}>\pi^{3}$

문제 1-5

$f(x)=x^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow \ln f(x)=\dfrac{\ln x}{x} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty$ 이므로 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$ 이다.

또한 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ 이므로 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$ 이다.

따라서 $y=f(x)$의 그래프 개형을 그려보면 다음과 같다.(증감상태는 문제1-3의 결과를 활용)



$b^{\frac{1}{b}}=a^{\frac{1}{a}}$ 이면 $(b^{\frac{1}{b}})^{ab}=(a^{\frac{1}{a}})^{ab}$, $b^a=a^b$ 이다.

따라서, $a^x=x^a$ 을 만족하고 $x\neq a$ 인 양의 실수 x 는 $0<a\leq 1$ 또는 $a=e$ 일 때는 존재하지 않고, $1<a<e$ 또는 $a>e$ 이면 1 개 존재한다.

문제 2-1

양변에 역수를 취하면 $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{2a_n+1}{a_n}=2+\dfrac{1}{a_n}$ 이므로, 수열 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$은 공차가 2, 첫째항이 $\dfrac{1}{a_1}=3$ 인 등차수열이다.

따라서 $\dfrac{1}{a_n}=3+(n-1)2=2n+1$ 이고 $\{a_n\}$의 일반항 $a_n=\dfrac{1}{2n+1}$ 이다.

이때, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 실제로 $\alpha=0$ 에 수렴한다.

$b_1=2$ 이고, $b_{n+1}-b_n=\dfrac{b_n^2+1}{b_n-1}-b_n=\dfrac{b_n+1}{b_n-1}=1+\dfrac{2}{b_n-1}>0$ 이므로, 수열 $\{b_n\}$ 은 ∞로 발산한다. 따라서 $\beta=-1$ 은 수열 $\{b_n\}$ 의 극한값이 아니다.

따라서 이 학생의 방법이 항상 타당한 것은 아니다.

문제 2-2

(1) 점 O 로부터 화살표를 따라 점 P_{n+1} 으로 갈 수 있는 경로의 수(x_{n+1})

= 점 O 에서 점 P_n 으로 갈 수 있는 경로의 수(x_n) + 점 O 에서 점 Q_n 으로 갈 수 있는 경로의 수(y_n)

따라서 $x_{n+1}=x_n+y_n \cdots$ ①

점 O 로부터 화살표를 따라 점 Q_{n+1} 로 갈 수 있는 경로의 수(y_{n+1})

= 점 O 에서 점 P_n 으로 갈 수 있는 경로의 수(x_n)×2 + 점 O 에서 점 Q_n 으로 갈 수 있는 경로의 수(y_n)

따라서 $y_{n+1}=2x_n+y_n \cdots$ ②

①과 ②에 의해

$$\begin{aligned} y_n+\sqrt{2}x_n &= 2x_{n-1}+y_{n-1}+\sqrt{2}(x_{n-1}+y_{n-1})=(1+\sqrt{2})y_{n-1}+\sqrt{2}(1+\sqrt{2})x_{n-1} \\ &= (1+\sqrt{2})(y_{n-1}+\sqrt{2}x_{n-1})=(1+\sqrt{2})^2(y_{n-2}+\sqrt{2}x_{n-2})=\cdots \\ &= (1+\sqrt{2})^{n-1}(y_1+\sqrt{2}x_1)=(1+\sqrt{2})^n \end{aligned}$$

(2) 같은 방법으로,

$$\begin{aligned} y_n-\sqrt{2}x_n &= 2x_{n-1}+y_{n-1}-\sqrt{2}(x_{n-1}+y_{n-1}) \\ &= (1-\sqrt{2})y_{n-1}-\sqrt{2}(1-\sqrt{2})x_{n-1} = (1-\sqrt{2})(y_{n-1}-\sqrt{2}x_{n-1}) \\ &= (1-\sqrt{2})^2(y_{n-2}-\sqrt{2}x_{n-2})=\cdots = (1-\sqrt{2})^{n-1}(y_1-\sqrt{2}x_1) \\ &= (1-\sqrt{2})^n \end{aligned}$$

문제 2-3

문제 2-2에서 구한 두 식 $y_n+\sqrt{2}x_n=(1+\sqrt{2})^n$ 와 $y_n-\sqrt{2}x_n=(1-\sqrt{2})^n$ 을 연립하여 풀면 $x_n=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}((1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n)$, $y_n=\dfrac{1}{2}((1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n)$ 이다.

따라서 수열 $\{z_n\}$의 일반항은 $z_n=\dfrac{y_n}{x_n}=\dfrac{\sqrt{2}((1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n)}{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n}$ 이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty} z_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}((1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n)}{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2}\left(\frac{1+\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n}{1-\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n}\right)=\sqrt{2}$$

문제 2-4

$x_1=y_1=1$, $x_{n+1}=x_n+y_n$, $y_{n+1}=5x_n+y_n$ 이라 하자.

위와 같이 정의된 수열 $\{x_n\}$ 과 $\{y_n\}$ 에 대해 수열 $\left\{\dfrac{y_n}{x_n}\right\}$ 은 문제 2-2, 2-3의 과정과 같은 방법으로 $\sqrt{5}$ 로 수렴함을 알 수 있다.

따라서 이 수열의 첫 다섯 항은 $\dfrac{y_1}{x_1}=1$, $\dfrac{y_2}{x_2}=3$, $\dfrac{y_3}{x_3}=2$, $\dfrac{y_4}{x_4}=\dfrac{7}{3}$, $\dfrac{y_5}{x_5}=\dfrac{11}{5}$ 이다.

35 한양대학교 수시(오후)

제시문 1 **다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.(50점)***

[가] 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$을 다음과 같이 귀납적으로 정의하고 각각의 극한값을 α, β 라 하자.

$$a_1 = 4,\ 4a_{n+1} = 3a_n + 2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

$$b_1 = 0,\ b_2 = 1,\ 2b_{n+2} = 3b_{n+1} - b_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

[나] 함수 $f(x)$ 를 $f(x) = |x - d|$ 로 정의하자. 단, d 는 실수인 상수이다.

[다] 위 [가]와 [나]의 $\alpha, \beta, f(x)$ 와 다항함수 $P(x)$ 에 대한 다음 두 등식을 살펴보자.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P(f(a_n)) - P(f(\alpha))}{a_n - \alpha} = \lim_{n\to\infty}\frac{P(f(b_n)) - P(f(\beta))}{b_n - \beta} \quad \text{----------} ①$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(P(a_n)) - f(P(\alpha))}{a_n - \alpha} = \lim_{n\to\infty}\frac{f(P(b_n)) - f(P(\beta))}{b_n - \beta} \quad \text{----------} ②$$

문제 1

1. 모든 자연수 n 에 대하여 $b_n < b_{n+1} < 2 < a_{n+1} < a_n$ 이 성립함을 설명하고 $\alpha,\ \beta$ 를 구하시오.

2. 등식 ①이 모든 다항함수 $P(x)$ 에 대하여 성립하게 하는 d 값의 집합을 구하시오.

3. 물음 2에서 구한 집합의 원소가 아닌 실수 d 에 대하여 등식 ①이 성립한다면, 다항함수 $P(x)$ 는 어떤 조건을 만족하는지 설명하시오.

4. 등식 ②가 성립하지 않으려면 다항함수 $P(x)$ 가 어떤 조건을 만족해야 되는지 설명하시오.

5. 등식 ②가 성립할 때 양변의 극한값은 무엇인가?

---

* 이후 제시문 한양대학교 입학처

제시문 2 **다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.(50점)**

[가] 두 벡터 $\vec{v}$ 와 $\vec{w}$가 이루는 각을 θ 라 할 때, $\vec{v}$ 와 $\vec{w}$ 의 내적 $\vec{v} \cdot \vec{w}$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}|\,|\vec{w}|\cos\theta$$

[나] 삼각형의 코사인법칙을 이용하면 두 평면벡터 $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ 와 두 공간벡터 $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$, $\vec{d} = (d_1, d_2, d_3)$ 에 대하여 각각 다음을 보일 수 있다.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 \quad \text{----------} \ ①$$

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = c_1d_1 + c_2d_2 + c_3d_3$$

[다] 위 [나]의 결과로부터 평면벡터와 공간벡터에 대해 다음이 성립한다는 것을 알 수 있다.

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

(2) $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (단, k 는 실수)

(3) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$, $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

[라] $\triangle \mathrm{ABC}$ 에서 다음과 같은 코사인법칙이 성립한다.

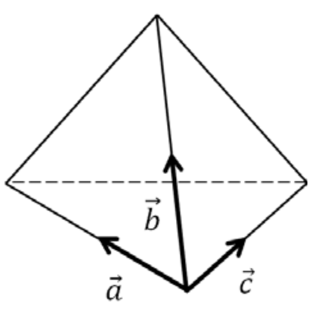
$$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - 2|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\,|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\theta \ (\text{단, } \theta = \angle \mathrm{BAC})$$

문제 2

1. $\vec{a} \cdot \vec{c} = 2$, $\vec{a} \cdot \vec{d} = -1$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = 3$, $\vec{b} \cdot \vec{d} = 2$ 일 때 $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{c} - \vec{d})$ 의 값을 구하시오.

2. 삼각형의 코사인법칙을 이용해서 제시문에 주어진 등식 ①이 성립함을 보이시오.

3. 오른쪽 그림과 같이 정사면체의 한 꼭짓점을 시점으로 하는 세 개의 단위 벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 라 하자. $\vec{v} = \vec{a} + k\vec{b} + l\vec{c}$ 가 $\vec{a}$ 와 $\vec{b}$ 에 모두 수직이 되도록 하는 실수 k 와 l 을 구하시오.



4. 정십이면체는 정오각형들로 이루어져 있고, 한 꼭짓점에서 세 개의 면이 만난다. 정십이면체의 인접한 두 면이 이루는 각을 θ 라 할 때 $\cos\theta$ 를 구하시오. (단, $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$)

논술유형분석

문항 수	수학 2문항(하위 9문항)	시간	120분
연관 개념	수열의 귀납적 정의, 수열의 극한, 미분가능성, 벡터의 내적		

제시문분석

제시문[1]

수열의 귀납적 정의, 수열의 극한과 다항함수의 미분의 정의 및 의미를 잘 이해하고 있고 종합적으로 사고할 수 있는지를 판단할 수 있도록 고등학교 수학교과의 기본적이고 핵심적인 분야에서 출제한 종합적인 문제이다.

제시문[2]

벡터의 내적의 정의로부터 시작하여 내적의 성질을 밝히는 제시문을 제공하고 이러한 사실을 잘 활용하는가를 평가하고자 하였다.

논제분석

문제 I-1

수열의 귀납적 정의를 통해 일반항을 찾고 수열의 극한을 이해하는가를 묻는 문제이다.

문제 I-2

다항함수를 포함한 연속함수의 미분의 정의를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

문제 I-3

다항함수 중 절댓값 함수는 어떤 조건일 때 미분가능한가를 묻는 문제이다.

문제 I-4

인수분해를 다항함수의 미분에 잘 활용할 수 있는가를 묻는 문제이다.

문제 I-5

다항함수를 경우에 따라 잘 분류하여 미분에 어떻게 적용하는가를 묻는 문제이다.

문제 2-1

내적의 성질을 잘 활용할 수 있는가를 묻는 문제이다.

문제 2-2

성분으로 표현된 벡터의 내적 공식을 증명하기를 요구하는 문제로, 문제에서 삼각형의 코사인법칙을 제공하고 또한 그것을 이용할 것을 안내하여 학생들이 어렵지 않게 문제를 해결할 수 있도록 하였다.

문제 2-3

내적의 성질을 이용하여 정사면체의 한 면에 수직한 벡터를 모서리에 평행한 세 벡터로 표현할 수 있는가를 묻는 문제이다.

문제 2-4

문제 2-3의 발상을 이용하여 정십이면체의 인접한 두 면이 이루는 각을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

배경지식쌓기

1. 미분가능

함수 $y=f(x)$ 에 대하여 $x=a$ 에서의 미분계수 $f'(a)$가 존재할 때, 함수 $y=f(x)$ 는 $x=a$ 에서 미분가능하다고 한다.

미분가능성의 조사 방법

미분계수 $f'(a)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 가 존재하면 다음이 성립한다.

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

➡ 즉, 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능한지를 조사하려면
($x=a$ 에서의 평균변화율의 우극한) = ($x=a$ 에서의 평균변화율의 좌극한)임을 확인해야 한다.

2. 미분가능성과 연속성

함수 $y=f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하면 미분계수 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 가 존재한다.

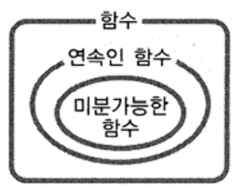
이때 $f'(a)$ 는 일정한 값이므로

$$\lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\}=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times(x-a)\right\}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}(x-a)=f'(a)\cdot 0=0$$

$\therefore \lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$ ➡ 함수 $y=f(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속

※ 함수 $f(x)$ 에 대하여 (ⅰ) $x=a$ 에서의 함숫값 $f(a)$ 가 존재하고 (ⅱ) $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 가 존재하며
(ⅲ) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이라 한다.

함수 $y=f(x)$ 가 **$x=a$ 에서 미분가능하면**
함수 $y=f(x)$ 는 **$x=a$ 에서 연속**이다.
그러나 그 역은 성립하지 않는다.



이때 위의 결론의 역이 성립하지 않는 이유는 다음의 (예)에서 알 수 있다.

(예) 함수 $f(x)=|x|=\begin{cases} x & (x\ge 0) \\ -x & (x<0)\end{cases}$ 에서 (ⅰ) 연속성과 (ⅱ) 미분가능성을 조사해 보자.

(ⅰ) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$ 이고, $f(0)=0$ 이므로 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ⅱ) $x=0$ 에서의 평균변화율의 우극한 ➡ $\lim\limits_{\Delta x\to+0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to+0}\dfrac{\Delta x}{\Delta x}=1$

$x=0$ 에서의 평균변화율의 좌극한 ➡ $\lim\limits_{\Delta x\to-0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to-0}\dfrac{\Delta x}{\Delta x}=-1$

따라서 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$ 은 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 함수 $f(x)=|x|$ 는 $x=0$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않으므로
함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이라고 해서 반드시 미분가능하다고 할 수 없다.

※ 뾰족점(첨점)

함수 $f(x)=|x|$ 와 같이 $x=a$ 에서 연속이지만 $x=a$ 에서 곡선이 꺾이면 $x=a$ 에서 미분가능하지 않다. 이러한 점을 뾰족점 또는 첨점이라 한다.

풀어보기

문제 1 함수 $f(x)=kx^2e^{-x}$ $(k>0)$과 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서 x축까지의 거리와 y축까지의 거리 중 크지 않은 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 한 점에서만 미분가능하지 않도록 하는 k의 최댓값은? (2013년 대수능)

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ③ $\frac{e}{2}$ ④ $\sqrt{e}$ ⑤ e

문제 2 좌표공간에서 네 점 $\mathrm{A_0},\ \mathrm{A_1},\ \mathrm{A_2},\ \mathrm{A_3}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|\overrightarrow{\mathrm{A_0A_2}}|=|\overrightarrow{\mathrm{A_1A_3}}|=2$

(나) $\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{A_0A_k}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}\right)=\cos\frac{3-k}{3}\pi\ (k=1,\ 2,\ 3)$

$|\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}|$의 최댓값을 M이라 할 때, M^2의 값을 구하시오. (2012년 9월 평가원)

읽기자료

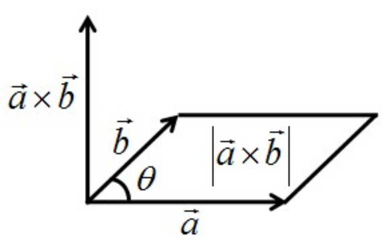
고등학교 기하와 벡터 과목에서의 벡터의 외적의 다양한 활용*

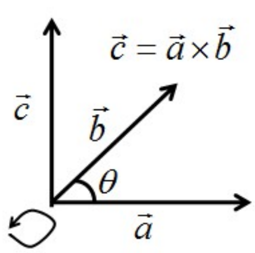
1. 들어가며

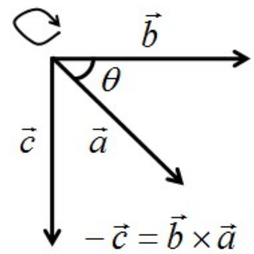
벡터의 외적은 2007 개정 교육과정이나 앞으로 적용될 새로운 교육과정의 내용은 아니지만 기하와 벡터 단원의 뒷부분인 공간에서의 직선의 방정식과 평면의 방정식에서 매우 유용하게 활용될 수 있음을 알아보자.

먼저 두 벡터 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$의 외적 $\vec{a}\times\vec{b}$는 다음과 같이 정의된다.

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_2a_3-a_3b_2,\ -(a_1a_3-a_3b_1),\ a_1a_2-a_2b_1)$$







정의로부터 $\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{a}\times\vec{b})$ 가 성립하고 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\begin{aligned}
|\vec{a}\times\vec{b}| &= \sqrt{(a_2a_3-a_3b_2)^2+(a_1a_3-a_3b_1)^2+(a_1a_2-a_2b_1)^2} \\
&= \sqrt{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2} \\
&= \sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2} \\
&= |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sqrt{1-\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2}} \\
&= |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sqrt{1-\cos^2\theta} \\
&= |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\theta
\end{aligned}$$

이다.

따라서 두 벡터의 외적의 크기 $|\vec{a}\times\vec{b}|$ 은 두 벡터가 이루는 평행사변형의 넓이와 같다. 또한

$$\begin{aligned}
(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a} &= (a_2a_3-a_3b_2,\ -(a_1a_3-a_3b_1),\ a_1a_2-a_2b_1)\cdot(a_1, a_2, a_3) \\
&= (a_2a_3-a_3b_2)a_1-(a_1a_3-a_3b_1)a_2+(a_1a_2-a_2b_1)a_3 \\
&= a_1a_2a_3-a_1a_3b_2-a_1a_2a_3+a_2a_3b_1+a_1a_2a_3-a_2b_1a_3 \\
&= 0
\end{aligned}$$

이고 마찬가지 방법으로 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{b}=0$ 임을 보일 수 있다. 즉, 벡터의 외적 $\vec{a}\times\vec{b}$ 는 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 와 모두 수직이다.

2. 벡터의 외적의 활용

1) 좌표공간에서 평면의 법선벡터 구하기

두 벡터의 외적은 두 벡터와 수직인 벡터를 얻을 수 있으므로 좌표공간에서 일직선 상에 있지 않는 세 점이 결정하는 평면의 법선벡터를 쉽게 얻을 수 있다. 즉 세 점 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ 을 지나는 평면의 방정식을 구할 때, 이 평면의 법선벡터는 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ 라 할 수 있다.

<예제1>

원점을 지나고 두 평면 $x+2y-z+1=0$, $3x-4y+3z-1=0$ 에 수직인 평면의 방정식은?

(풀이) 구하는 평면의 법선벡터는 두 평면의 법선벡터 $\vec{u}=(1, 2, -1)$, $\vec{v}=(3, -4, 3)$ 의 외적을 하면 구할 수 있다. $\vec{u}\times\vec{v}=(2, -6, -10)$ 이므로 구하는 평면의 방정식은 $x-3y-5z=0$ 이다.

2) 두 평면의 교선의 방향벡터 구하기

좌표공간에서 두 평면의 교선을 구할 때는 두 평면의 방정식을 연립해서 풀어야 한다. 그런데 두 평면의 교선의 방향벡터만 구하면 되는 문제의 경우 외적을 이용하여 쉽게 교선의 방정식을 구할 수 있다. 즉, 두 평면의 교선은 각각 두 평면의 법선벡터와 수직이므로 두 평

면의 법선벡터의 외적을 구함으로써 직선의 방향벡터를 구할 수 있다.
두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$ 라 하면 이 두 평면의 교선의 방향벡터 $\vec{u}$ 는 $\vec{u} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$ 이다.

<예제2>
두 평면 $x+y+2z=0$, $x-y-3z=1$ 의 교선을 l 이라 하자. 직선 l 과 x 축이 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos\theta$ 의 값은?
(풀이) 두 평면의 법선벡터가 각각 $\overrightarrow{n_1}=(1, 1, 2)$, $\overrightarrow{n_2}=(1, -1, -3)$ 이므로 교선의 방향벡터 $\vec{u}$ 는 $\vec{u} = (1, 1, 1)\times(1, -1, -3)=(-1, 5, -2)$ 이다. 따라서 직선 l 과 x 축이 이루는 예각의 크기를 θ 라 하면

$$\cos\theta = \frac{|(-1, 5, -2)\cdot(1, 0, 0)|}{\sqrt{(-1)^2+5^2+(-2)^2}\sqrt{1^2+0^2+0^2}} = \frac{1}{\sqrt{30}}$$

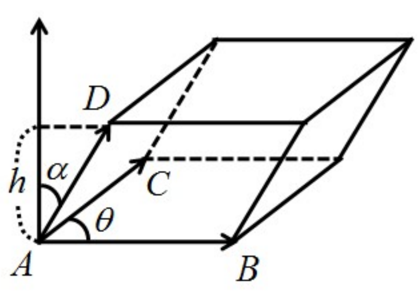
이다.

3) 사면체의 부피 구하기

좌표공간에서 한 평면에 있지 않은 네 점 A, B, C, D 가 이루는 사면체의 부피 V 는 다음과 같이 계산된다.

$$V = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|$$

증명) 그림의 평행육면체의 부피 V' 은
$V' = |\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}|\,\mathrm{h} = |\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}|\,|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|\cos\alpha = |(\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}|$ 이고
사면체의 부피는 평행육면체의 부피의 $\frac{1}{6}$ 이므로 $V = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}|$ 이다.



<예제3>
공간에서 네 점 $\mathrm{A}(1, 2, ,3)$, $\mathrm{B}(2, 1, ,-1)$, $\mathrm{C}(3, 0, 2)$, $\mathrm{D}(-2, 1, 3)$ 을 네 꼭짓점으로 갖는 사면체 ABCD 의 부피를 구하시오.
(풀이) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1, -1, -4)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(2, -2, -1)$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(-3, -1, 0)$ 이고
$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-7, -7, 0)$ 이므로 구하는 부피 V 는

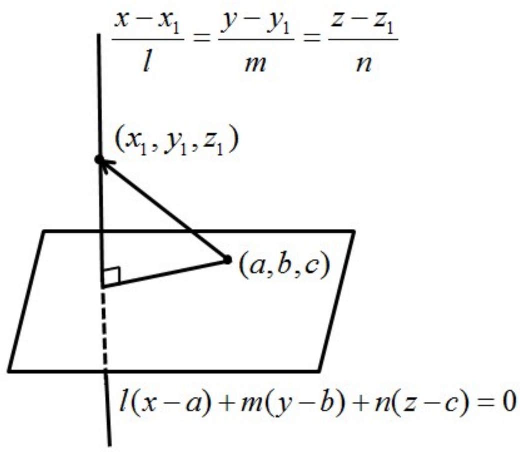
$$V = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}| = \frac{1}{6}\{(-7)(-3)+(-7)(-1)\} = \frac{14}{3}$$

4) 좌표공간에서 직선과 직선 밖의 한 점 사이의 거리 구하기

직선 $\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$ 과 이 직선 밖의 점 (a, b, c)와의 거리 구하는 공식을 구해보자.

$\vec{u}=(l,\ m,\ n)$, $\vec{v}=(x_1-a,\ y_1-b,\ z_1-c)$ 라 하고 $\vec{u}$ 를 법선벡터로 하고 점 (a, b, c) 를 지나는 평면의 방정식은 $l(x-a)+m(y-b)+n(z-c)=0$ 이다. 이제 이 평면과 점 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ 과의 거리는 $\dfrac{|l(x_1-a)+m(y_1-b)+n(z_1-c)|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}=\dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|u|}$ 이다. 피타고라스 정리에 의해 구하는 거리는

$$\sqrt{|\vec{v}|^2-\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|^2}{|u|^2}}=\sqrt{\frac{|\vec{v}|^2|\vec{u}|^2-|\vec{u}\cdot\vec{v}|^2}{|u|^2}}=\frac{|\vec{u}\times\vec{v}|}{|u|}\ \text{이다.}$$



<예제4>

구 $(x-3)^2+(y-6)^2+(z-2)^2=4$ 위의 점 P 에서 직선 $l:\dfrac{x}{2}=y+1=\dfrac{z}{4}$ 에 이르는 거리의 최댓값과 최솟값의 곱을 구하시오.

(풀이) 구하는 최댓값과 최솟값은 각각 구의 중심 $(3, 6, 2)$ 에서 직선 l 과의 거리에 구의 반지름을 더한 값과 뺀 값과 같다. 직선의 방향벡터는 $\vec{u}=(2, 1, 4)$ 이고 직선이 점 $(0,\ -1,\ 0)$ 을 지나므로 $\vec{w}=(3, 7, 2)$ 이다. 원의 중심과 직선과의 거리는

$$\sqrt{(3^2+7^2+2^2)-\frac{(3\cdot 2+7\cdot 1+2\cdot 4)^2}{\sqrt{2^2+1^2+4^2}}}=\sqrt{41}$$

이다. 따라서 구하는 값은 $(\sqrt{41}+2)(\sqrt{41}-2)=41-4=37$ 이다.

5. 두 직선 $\dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}$, $\dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{n_2}$ 의 최단거리 구하기

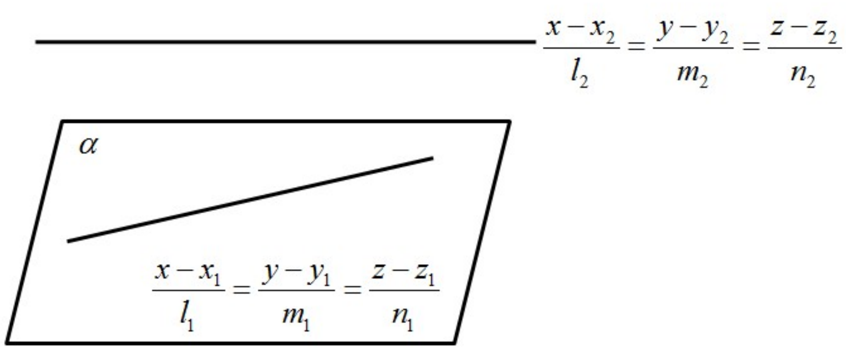
두 직선의 방향벡터 $\vec{u}=(l_1,\ m_1,\ n_1)$, $\vec{v}=(l_2,\ m_2,\ n_2)$ 라 하고

$\overrightarrow{w}=(x_2-x_1,\, y_2-y_1,\, z_2-z_1)$ 라 하면 두 직선 위의 점들 중 최단거리 d 는 $d=\dfrac{|(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})\cdot\overrightarrow{w}|}{|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}|}$ 이다.

증명) 그림에서 평면 α 는 직선 $\dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}$ 을 포함하고 직선 $\dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{n_2}$ 와 평행한 평면이라 하자. 이 평면의 법선벡터 $\overrightarrow{h}$ 는 $\overrightarrow{h}=\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}$ 라 할 수 있고 따라서 평면 α 의 방정식은 $(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})\cdot\overrightarrow{x}=0$ (단, $\overrightarrow{x}=(x-x_1,\, y-y_1,\, z-z_1)$)이다. 이제 점 $(x_2,\ y_2,\ z_2)$ 와 평면 α 와의 거리가 두 직선 위의 점들 중 최단거리 d 와 같다. $\overrightarrow{p}=\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=(a,\, b,\, c)$ 라 하면 평면 α 의 방정식은 $a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$ 이고 이 평면과 점 $(x_2,\ y_2,\ z_2)$ 와의 거리 d 는

$$d=\frac{|a(x_2-x_1)+b(y_2-y_2)+c(z_2-z_1)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})\cdot\overrightarrow{w}|}{|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}|}$$

이다.



<예제5>

좌표공간에서 두 점 A, B 가 $\overline{AB}=8$ 을 만족시키면서 직선 $\dfrac{x+2}{2}=y-2=4-z$ 위를 움직이고, 점 C 는 직선 $x+2=\dfrac{y-2}{-2},\ z=3$ 위를 움직이고 있다. 삼각형 ABC 의 넓이의 최솟값은?

(풀이) 삼각형 ABC 의 넓이가 최소가 되도록 하는 점 C 는 두 직선 위의 점들 중 거리가 최소일 때의 점이므로 구하는 최솟값은 밑변의 길이가 8 이고 높이는 두 직선 사이의 거리인 삼각형의 넓이이다. 두 직선 사이의 거리를 구하는 공식을 이용하여 거리를 구하면 $\dfrac{5}{\sqrt{30}}$ 이고 구하는 넓이의 최솟값은 $\dfrac{1}{2}\times 8\times\dfrac{5}{\sqrt{30}}=\dfrac{2\sqrt{30}}{3}$ 이다.

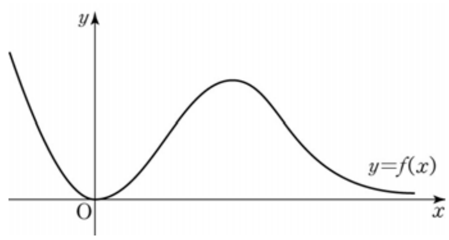
예시답안

풀어보기

문제 1 정답 ⑤

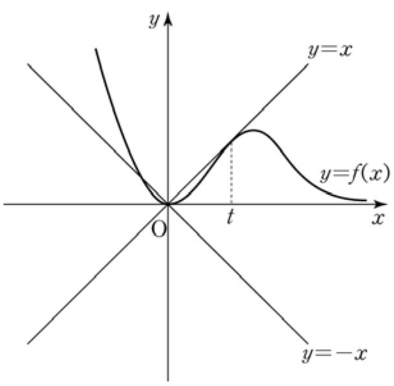
$f(x)=kx^2e^{-x}\,(k>0)$ 에서 $f'(x)=2kxe^{-x}-kx^2e^{-x}=kx(2-x)e^{-x}$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=2$



x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	$\dfrac{4k}{e^2}$	↘

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$ 에서 x 축까지의 거리와 y 축까지의 거리 중 크지 않은 값을 $g(t)$ 라 하므로 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$, $y=-x$ 와 만나는 교점을 찾는다.



이때, 미분가능하지 않은 점이 한 곳만 있으려면 $x>0$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 가 만나지 않거나 접해야 한다.

접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$ 라 하면 $kt^2e^{-t}=t$ ⋯⋯ ㉠이고

$x=t$ 에서 접선의 기울기가 1 이므로 $kt(2-t)e^{-t}=1$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $2-t=1$ $\therefore\ t=1$

$\therefore\ k=e$, 따라서 k 의 최댓값은 e 이다.

문제 2 정답 8

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}\cdot\left(\overrightarrow{A_0A_1}-\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}\right)=\cos\frac{2}{3}\pi,\quad \overrightarrow{A_0A_3}\cdot\overrightarrow{A_0A_1}-\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_0A_3}\right|^2=-1\cdots㉠$$

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}\cdot\left(\overrightarrow{A_0A_2}-\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}\right)=\cos\frac{\pi}{3},\quad \overrightarrow{A_0A_3}\cdot\overrightarrow{A_0A_2}-\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_0A_3}\right|^2=1\cdots㉡$$

* 한국수학교육학회 뉴스레터 제29권 제3호 통권 제145호(2013.5) 유익승(전주고등학교)

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}\cdot(\overrightarrow{A_0A_3}-\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3})=1 \quad \therefore\ |\overrightarrow{A_0A_3}|=2$$

이때, ㉠, ㉡에 대입하면

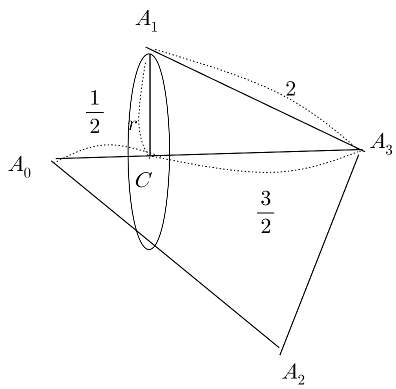
$$\overrightarrow{A_0A_3}\cdot\overrightarrow{A_0A_1}=1,\ \overrightarrow{A_0A_3}\cdot\overrightarrow{A_0A_2}=3$$

이고 $\overrightarrow{A_0A_3}$ 과 $\overrightarrow{A_0A_1}$ 이 이루는 각의 크기를 θ_1, $\overrightarrow{A_0A_3}$과 $\overrightarrow{A_0A_2}$ 가 이루는 각의 크기를 θ_2라 하면 $\overrightarrow{A_0A_3}\cdot\overrightarrow{A_0A_1}=2|\overrightarrow{A_0A_1}|\cos\theta_1=1 \ \therefore\ |\overrightarrow{A_0A_1}|\cos\theta_1=\frac{1}{2}$

$$\overrightarrow{A_0A_3}\cdot\overrightarrow{A_0A_2}=4\cos\theta_2=3 \ \therefore\ \cos\theta_2=\frac{3}{4}$$

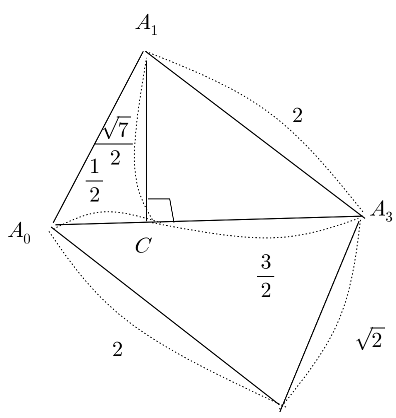
이때, $|\overrightarrow{A_2A_3}|^2=2^2+2^2-2\times2\times2\times\frac{3}{4}=2 \ \therefore\ |\overrightarrow{A_2A_3}|=\sqrt{2}$

따라서, $|\overrightarrow{A_1A_3}|=2$ 이고 $|\overrightarrow{A_0A_1}|\cos\theta=\frac{1}{2}$ 이므로 점 A_1 이 나타내는 도형은 선분 A_0A_3 을 $1:3$ 으로 내분하는 점을 C 라 할 때, 점 C 를 중심으로 하는 원이다.



따라서, 반지름의 길이를 r 라 하면 $r^2=2^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{7}{4} \ \therefore\ r=\frac{\sqrt{7}}{2}$

이때, $|\overrightarrow{A_1A_2}|$ 가 최대가 되려면 즉, 선분 $\overline{A_1A_2}$ 가 가장 긴 경우는 점 A_1 이 평면 $A_0A_2A_3$ 과 같은 평면에 있을 때이다.



그런데, $\overline{A_0A_1}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{2}$ 이므로 두 삼각형 $A_0A_1A_3$, $A_0A_2A_3$ 은 합동이므로 $\angle A_1A_0A_3=\theta_3$ 이라 하면

$$M^2=2^2+(\sqrt{2})^2-2\times2\times\sqrt{2}\cos(\theta_2+\theta_3)=6-4\sqrt{2}(\cos\theta_2\cos\theta_3-\sin\theta_2\sin\theta_3)$$

$$=6-4\sqrt{2}\left(\frac{3}{4}\times\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{7}}{4}\times\frac{\sqrt{14}}{4}\right)=6-\left(\frac{3}{2}-\frac{7}{2}\right)=8$$

문제 1-1*

$a_n=2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}+2$ 이고 $b_n=2-\frac{1}{2^{n-2}}$ 이므로 $b_n<b_{n+1}<\cdots<2<\cdots<a_{n+1}<a_n$ 이 성립하고 $\alpha=\beta=2$ 이다.

※ **

1. $a_{n+1}=pa_n+q$ $(p\neq1,\ q\neq0)$ 꼴의 점화식에서 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n 구하기 점화식을 $(a_{n+1}-\alpha)=p(a_n-\alpha)$ $(\alpha=\frac{q}{1-p})$의 꼴로 변형한다. 이때 수열 $\{a_n-\alpha\}$ 는 첫째항이 $a_1-\alpha$, 공비가 p 인 등비수열이므로 $a_n-\alpha=(a_1-\alpha)p^{n-1}$ $\therefore\ a_n=\alpha+(a_1-\alpha)p^{n-1}$ $\left(\text{단, }\alpha=\frac{q}{1-p}\right)$ 2. $pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0$ $(p+r+q=0,\ pqr\neq0)$ 꼴의 점화식에서 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n 구하기 점화식을 $a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{r}{p}(a_{n+1}-a_n)$의 꼴로 변형한 후 $a_{n+1}-a_n=b_n$으로 놓으면 $b_{n+1}=\frac{r}{p}b_n$ 이때 수열 $\{a_n\}$의 계차수열인 수열$\{b_n\}$은 첫째항이 $a_2-a_1=b_1$, 공비가 $\frac{r}{p}$인 등비수열임이므로 $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_2-a_1)\cdot\left(\frac{r}{p}\right)^{k-1}$ $\left(\text{단, }\frac{r}{p}\neq1\right)$

문제 1-2

(i) $d>2$ 인 경우: 개구간 $(-\infty,d)$ 에서 $P(f(x))$ 는 다항함수이고 $x=2$ 에서 미분가능하다.

* 이후 논제해설은 한양대학교 논술예시답안
** 개념 플러스 유형 수학 I 개념편, 비상

a_n, b_n 은 모두 d 보다 작은 2 로 수렴하므로, 등식 ①의 우변과 좌변은 같고 그 극한값은 $P(f(x))$ 의 $x=2$ 에서 미분계수이다.

(ⅱ) $d<2$ 인 경우: 개구간 (d, ∞)에서 $P(f(x))$ 는 다항함수이고 $x=2$ 에서 미분가능하다. a_n, b_n 은 모두 d 보다 큰 2 로 수렴하므로, 등식 ①의 우변과 좌변은 같고 그 극한값은 $P(f(x))$ 의 $x=2$ 에서 미분계수이다.

(ⅲ) $d=2$ 인 경우: $P(x)=x$ 라 하면 등식 ①의 좌변은 -1, 우변은 1 로 서로 다르므로, 등식 ①은 성립하지 않는다.

따라서 구하는 집합은 $\{d \in R \mid d \neq 2\}$이다.

문제 1-3

$d=2$ 인 경우: $\dfrac{P(f(x))-P(f(2))}{x-2}=\dfrac{P(|x-2|)-P(0)}{x-2}$ 이고 $P(x)$ 의 일차항의 계수 $\gamma_1 \neq 0$ 이면, 극한 $\lim\limits_{x \to +2}\dfrac{\gamma_1|x-2|}{x-2}=\gamma_1 \neq -\gamma_1=\lim\limits_{x \to -2}\dfrac{\gamma_1|x-2|}{x-2}$ 이다.

그리고 1 보다 큰 자연수 k에 대하여 극한 $\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{\gamma_k|x-2|^k}{x-2}$ 는 존재하므로 일차항의 계수가 0 인 다항함수 $P(x)$ 는 등식 ①의 양변의 극한이 존재하고 그 극한값은 같다.

문제 1-4

(ⅰ) $P(2)-d=0$ 인 경우: $P(x)-d=(x-2)Q(x)$ ($Q(x)$는 다항식) 이고,
이때

$$\lim_{n \to \infty}\frac{f(P(a_n))-f(P(2))}{a_n-2}=\lim_{n \to \infty}\frac{|a_n-2| \cdot |Q(a_n)|}{a_n-2}=|Q(2)| \text{ 이고}$$

$$\lim_{n \to \infty}\frac{f(P(b_n))-f(P(2))}{b_n-2}=\lim_{n \to \infty}\frac{|b_n-2| \cdot |Q(b_n)|}{b_n-2}=-|Q(2)| \text{ 이다.}$$

(ⅱ) $P(2)-d \neq 0$인 경우:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2}\frac{|P(x)-d|-|P(2)-d|}{x-2}&=\lim_{x \to 2}\frac{(P(x)-d)^2-(P(2)-d)^2}{(x-2)(|P(x)-d|+|P(2)-d|)}\\&=\lim_{x \to 2}\frac{(P(x)-d)-(P(2)-d)}{(x-2)}\cdot\frac{(P(x)-d)+(P(2)-d)}{(|P(x)-d|+|P(2)-d|)}\\&=P'(2)\frac{P(2)-d}{|P(2)-d|}\end{aligned}$$

따라서, $P(2)-d=0$ 인 경우 $P(x)-d=(x-2)Q(x)$ ($Q(x)$ 는 다항식) 이고 $Q(2) \neq 0$ 이면, 등식 ②의 등호는 성립하지 않는다.

문제 1-5

(i) $P(2)-d=0$ 인 경우: $P(x)-d=(x-2)Q(x)$ ($Q(x)$는 다항식)이고 $Q(2)=0$ 이면, 문항 4의 풀이에 의해, 등식 ②의 양변의 극한값은 0 이다.
(ii) $P(2)-d>0$ 인 경우: 문항 4의 풀이에 의해, 등식 ②의 양변의 극한값은 $P'(2)$ 이다.
(iii) $P(2)-d<0$ 인 경우: 문항 4의 풀이에 의해, 등식 ②의 양변의 극한값은 $-P'(2)$ 이다.

문제 2-1

$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{d})=\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{d}+2\vec{b}\cdot\vec{c}-2\vec{b}\cdot\vec{d}=2-(-1)+2\cdot3-2\cdot2=5$

문제 2-2

좌표평면에서 점 $A(a_1, a_2)$와 $B(b_1, b_2)$ 를 택하면 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ 가 성립하고 $\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1, b_2-a_2)$ 이다. $\triangle OAB$ 에 코사인법칙을 적용하고 정리하면

$$|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\angle AOB=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2)$$

그런데 $|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\angle AOB=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\vec{a}\cdot\vec{b}$ 이고
$|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2=(a_1^2+a_2^2)+(b_1^2+b_2^2)-\{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2\}=2(a_1b_1+a_2b_2)$
따라서 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$ 이 성립한다.

문제 2-3

정삼각형의 한 내각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$ 이므로 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ 이다.

마찬가지로 $\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{1}{2}$ 이다. 그리고 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 는 단위벡터이므로

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{b}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{c}=1$$

그러므로 $\vec{v}\cdot\vec{a}=0$ 과 $\vec{v}\cdot\vec{b}=0$ 에서

$$1+\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}l=0$$

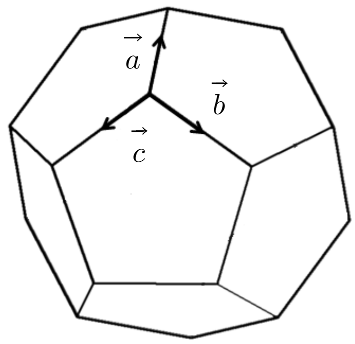
$$\frac{1}{2}+k+\frac{1}{2}l=0$$

따라서 $k=1$, $l=-3$이다.

문제 2-4

$\cos\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1)=\alpha$ 라 두자.

그림과 같이 정십이면체의 한 꼭짓점을 시점으로 하는 세 개의 단위벡터를 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 라 두고 $\vec{v}=\vec{a}+k\vec{b}+l\vec{c}$ 가 $\vec{a}$와 $\vec{b}$ 에 모두 수직인 벡터라고 하자.



정오각형의 한 내각의 크기는 $\dfrac{3\pi}{5}$ 이므로

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{3\pi}{5}=\cos\frac{3\pi}{5}=-\cos\frac{2\pi}{5}=-\alpha$$

이고 마찬가지로 $\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=-\alpha$ 이다. 그리고 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$는 단위벡터이므로

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{b}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{c}=1$$

이다. 그러므로 $\vec{v}\cdot\vec{a}=0$ 과 $\vec{v}\cdot\vec{b}=0$ 에서

$$\begin{aligned}1-\alpha k-\alpha l&=0\\ -\alpha+k-\alpha l&=0\end{aligned}$$

따라서 $k=1,\ l=\dfrac{1-\alpha}{\alpha}$ 이다. 그러므로 $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}+\dfrac{1-\alpha}{\alpha}\vec{c}$ $(\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}+\sqrt{5}\,\vec{c})$가 $\vec{a}$ 와 $\vec{b}$ 에 모두 수직인 벡터, 즉, $\vec{a}$ 와 $\vec{b}$ 에 모두 평행한 오각형에 수직인 벡터임을 알았다. 이 오각형에 인접한 면으로 $\vec{a}$ 와 $\vec{c}$ 에 모두 평행한 오각형이 있다. 이 오각형에 수직인 벡터 $\vec{w}$ 를 위와 마찬가지로 구하면 $\vec{w}=\vec{a}+\dfrac{1-\alpha}{\alpha}\vec{b}+\vec{c}$ $(\vec{w}=\vec{a}+\sqrt{5}\,\vec{b}+\vec{c})$이다.

이로부터 $\vec{v}\cdot\vec{w}=\dfrac{1}{\alpha^2}(-2\alpha^3-\alpha^2+\alpha)=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 이고

$$|\vec{v}|^2=|\vec{w}|^2=\frac{1}{\alpha^2}(2\alpha^3-\alpha^2-2\alpha+1)=\frac{\sqrt{5}+5}{2}$$

이므로 다음을 알 수 있다.

$$\cos\theta=\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|}=\frac{-2\alpha^3-\alpha^2+\alpha}{2\alpha^2-\alpha^2-2\alpha+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\ \ \left(\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{5}}\text{ 도 가능한 값}\right)$$

다른 풀이

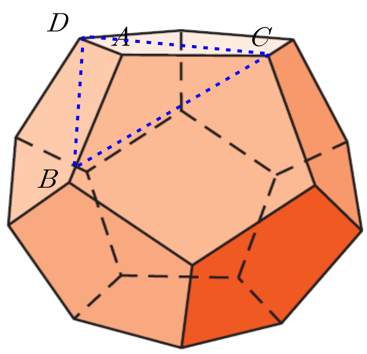
정이십면체의 한 변의 길이를 1이라 하자. 한 면이 정오각형이므로 코사인 제2법칙에서

$$BD=\sqrt{1+1-2\cos\frac{3\pi}{5}}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=BC=CD$$

(여기서 $\cos\frac{3\pi}{5}=-\cos\frac{2\pi}{5}=-\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ 을 이용)

이다. 삼각뿔 ABCD 에서 AB의 연장선위에 C, D에서 내린 수선의 발을 A' 라 하면 $A'C=A'D=AC\sin\left(\pi-\frac{3\pi}{5}\right)=\sqrt{1-\cos^2\frac{2\pi}{5}}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$ 이다. 이면각을 θ 라 하면 $\theta=\angle DA'C$ 이므로 $\triangle DA'C$ 에서 코사인 제2법칙을 사용하면

$$\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$



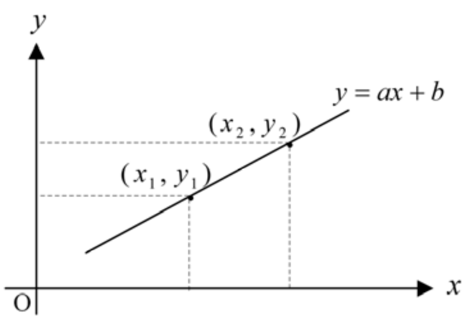
36 홍익대학교 수시

제시문1

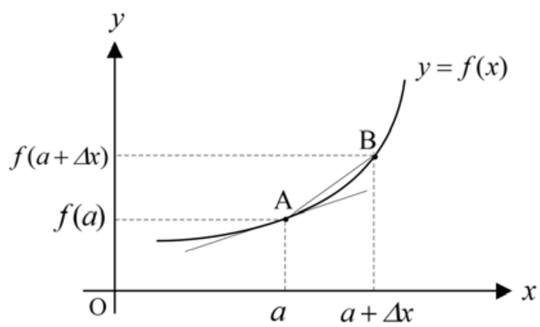
직선 위의 임의의 두 점을 이용하면 직선의 기울기 m 을 구할 수 있다. 즉 [그림 1]에서 직선 $y=ax+b$ 의 기울기 m 은

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{(ax_2+b)-(ax_1+b)}{x_2-x_1}=a$$

이다. 그런데 홍익이는 [그림 2]와 같은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A 에서의 접선의 기울기를 구할 때는 접점이 하나이므로 위와 같은 방법으로 기울기를 계산할 수 없다는 사실을 깨달았다.



[그림 1]



[그림 2]

논제 1-(가)

[그림 2]와 같은 함수 $y=f(x)$ 에 대해 그래프 위의 두 점 A, B 를 지나는 직선 AB 의 기울기를 이용하여 점 A 에서 접선의 기울기를 구하는 식을 적어라.

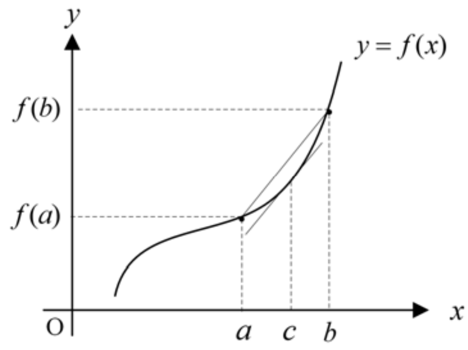
논제 1-(나)

위의 (가)에서 구한 식을 이용하여 $y=x^2$ 의 $x=a$ 에서의 접선의 기울기를 구하라.

함수 $y=f(x)$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 구간 (a, b) 에서 미분가능할 때

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

를 만족하는 점 c 가 a 와 b 사이에 적어도 하나 존재한다는 것이 '평균값 정리'이다([그림 3]).

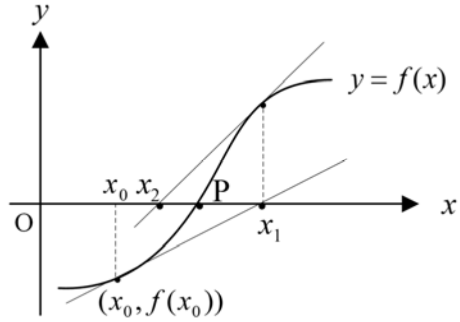


[그림 3]

논제 1-(다)

지난 여름 폭염에 의해 전력 수요가 급증하면서 예비 전력이 낮아졌지만, 국민들의 협조 하에 어려움을 극복할 수 있었다. 정부에서는 에어컨을 켠 채 문을 열고 영업을 하거나 냉방온도 제한을 위반하는 업소를 단속하는 등 강도 높은 대책으로 전력 소비 감소를 유도하였다. 예를 들어 어떤 상점의 전력 소비율을 0.5 KW로 제한하였는데 전기 계량기를 확인하니 10 시간 동안 6 KWh를 사용한 것으로 나타났다. 이 상황에 대해 평균값 정리를 적용할 수 있다고 가정할 때 전기를 사용한 10 시간 사이에 전력 소비율이 0.5 KW를 초과한 시점이 있음을 보여라.(1 KWh는 1 KW로 1 시간 사용한 전력량이다)

함수 $y=f(x)$ 의 접선의 기울기를 이용하여 방정식 $f(x)=0$ 의 근을 근사적으로 구할 수 있다. [그림 4]에서 $f(x)=0$ 의 하나의 근은 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축과의 교점 P 의 x 좌표이다.



[그림 4]

먼저 구하려는 방정식의 근을 x_0 로 가정하여 $x=x_0$ 에서 $y=f(x)$ 의 접선의 방정식을 구하면

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

이고, 이 접선과 x 축과의 교점을 x_1 이라고 하면

$$0-f(x_0)=f'(x_0)(x_1-x_0)$$

이 성립하므로 $f'(x_0)\neq 0$ 일 때

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

이다. 즉 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ 에 대해

$$x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

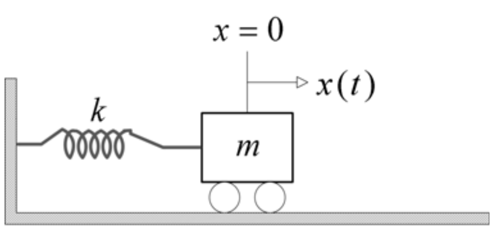
과 같은 계산을 반복하여 원하는 정확도까지 방정식의 근을 구할 수 있다.

논제 1-(라)

방정식 $f(x)=x^2-2=0$의 양의 근을 위에서 설명한 방법으로 구하여라. $x_0=2$ 로 놓고 2회 반복 계산하여 x_2 를 소숫점 아래 넷째 자리에서 반올림하여 소숫점 아래 셋째 자리까지 구한다.

제시문2

고층 건물의 12 층에 위치한 에어로빅센터에서 십여명의 사람이 박자에 맞춰 발을 구르며 운동을 한다. 그러자 건물 상층부가 심하게 흔들린다. 이것은 2011 년 여름 서울의 한 건물에서 실제로 벌어진 일이다. 대한건축학회는 진동이 증폭되어 일어나는 ‘공진(resonance)’ 현상으로 이를 설명했다. 1831 년 영국의 브로스턴 다리도 군인들이 발맞춰 행군하면서 생긴 진동이 하필이면 다리의 고유진동수와 같았기 때문에 무너졌다고 알려져 있다. 홍익이는 이러한 현상에 대해 좀 더 알아보려 한다.



질량 m 인 물체가 용수철 상수 k 인 용수철에 연결된 '질량-용수철계'를 생각하자. 여기서 $x(t)$ 는 시간 t 에서 물체의 원래 위치($x=0$)로부터의 변위를 나타내며, 물체와 바닥 사이의 마찰은 무시한다. 물체를 당겼다 놓으면 물체가 진동하는데 이와 같이 계에 외부힘이 작용하지 않는 진동을 '자유진동'이라고 한다. 자유진동을 기술하기 위해 뉴턴의 제2법칙 $F=ma$ 를 적용하면 용수철의 복원력은 $F=-kx$ 이고 물체의 가속도는 $a=\dfrac{d^2x}{dt^2}$ 이므로 $-kx=m\dfrac{d^2x}{dt^2}$, 즉 $m\dfrac{d^2x}{dt^2}+kx=0$ 이며 마지막 식의 양변을 m 으로 나누면

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x=0 \qquad \text{--- ①}$$

이다. 여기서

$$\omega^2=\frac{k}{m} \qquad \text{--- ②}$$

이다. $t=0$ 에서 물체를 오른쪽으로 x_0 만큼 당긴 후 정지상태에서 놓으면 시간 t 에서 물체의 위치는

$$x(t)=x_0\cos\omega t \qquad \text{--- ③}$$

이다. 여기서 ω 는 ③으로 표현되는 진동의 진동수를 나타내는 요인이며 특정한 질량-용수철계의 ω 에 의해 결정되는 진동수를 그 질량-용수철계의 '고유진동수'라고 한다.

논제 2-(가)

③에 대해 ①이 성립함을 보이고 ③이 위의 설명을 통해 알 수 있는 조건 $x(0)=x_0$ 과 $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0}=0$ 도 만족함을 보여라. ($\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0}=0$ 는 $x'(0)=0$ 을 의미한다.)

논제 2-(나)

위의 설명에 의하면 질량-용수철계마다 특정한 고유진동수를 가짐을 알 수 있다.

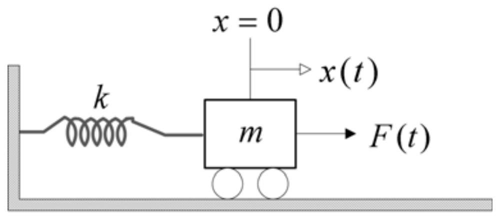
i) ③의 진동수를 구하고, ②를 이용하여 진동수를 m 과 k 의 식으로 나타내어라. 단, 진동수는 주기의 역수이다.

ii) m 이 2 배로 증가할 때 진동수는 몇 배가 되는가?

iii) k 가 2 배로 증가할 때 진동수는 몇 배가 되는가?

iv) x_0 가 2 배로 증가할 때 진동수는 몇 배가 되는가?

이번에는 질량-용수철계에 외부힘이 더해지는 '강제진동'에 대해 알아보자.



이 경우에도 자유진동에서와 같이 뉴턴의 제2법칙을 사용하면 힘은 복원력 $-kx$ 와 외부힘 $F(t)$ 의 합이므로 운동방정식은 $-kx+F(t)=m\dfrac{d^2x}{dt^2}$, 즉

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x=f(t) \quad \text{---} \ ④$$

가 된다. 여기서 $f(t)=\dfrac{F(t)}{m}$ 는 단위 질량당 작용되는 외부힘이다. ④의 ω 가 ①의 ω 와 같음에 유의해야 한다. $t=0$ 에서 진동하지 않던 질량-용수철계에 Ω 에 의해 결정되는 진동수를 갖는 외부힘 $f(t)=f_0\sin\Omega t$ $(\Omega\neq\omega$, f_0 는 상수)가 작용하는 경우 ④의 해는

$$x(t)=\frac{f_0(\omega\sin\Omega t-\Omega\sin\omega t)}{\omega(\omega^2-\Omega^2)} \quad \text{---} \ ⑤$$

가 되어 서로 진동수가 다른 두 개의 진동 $\sin\Omega t$ 와 $\sin\omega t$ 가 중첩되어 나타난다. 그런데 만약 외부힘의 진동수와 질량-용수철계의 고유진동수가 같다면, 즉 $\Omega=\omega$ 일 때 어떤 현상이 일어날까? 이러한 경우 진동의 진폭이 시간에 따라 증가하는 공진이 발생한다. 공진을 수학적으로 설명하기 위해서는 $f(t)=f_0\sin\omega t$ 로 놓고 ④를 다시 풀어야 하지만, ⑤에서 Ω 를 ω 로 근접시킨 $x(t)$ 의 극한을 구하여 같은 결과를 얻을 수도 있다.

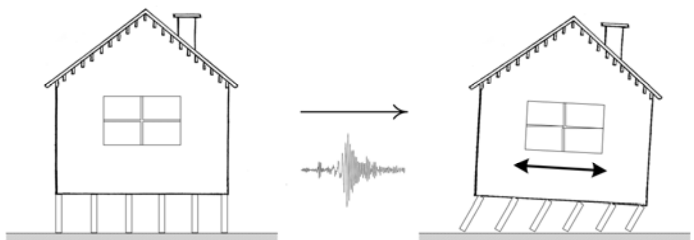
논제 2-(다)

⑤와 다음 로피탈의 정리를 이용하여 $\lim_{\Omega\to\omega} x(t)$ 를 구하여라. Ω 가 변하는 값임에 유의한다.

$f(x)$, $g(x)$ 가 a 에서 미분가능하고 $f(a)=g(a)=0$ 일 때 $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(a)}{g'(a)}$ 이다
(단, $g'(a)\neq 0$).

논제 2-(라)

삼각함수 $A\sin(\omega t+\alpha)$ 에서 $|A|$ 를 진폭이라고 한다. 문제 (다)의 결과를 삼각함수의 합성을 이용하여 하나의 사인함수로 나타내고 진폭이 시간에 따라 증가하는 공진이 발생함을 보여라.



앞에서 살펴 본 강제진동은 지진이나 바람과 같은 외부힘에 의해 건물이 진동하는 경우에도 적용된다. 실제 건물에도 탄성이 존재하므로 진동의 특성을 질량 m 과 용수철 상수 k 로 나타낼 수 있다. 특정한 진동수를 가지고 좌우로 진동하는 지진력은 건물에 좌우 진동을 유발하는데 만약 공진이 발생하는 경우에는 작은 지진력에도 건물이 붕괴될 수 있다.

논제 2-(마)

특정한 진동수의 지진에 대해 공진이 발생하는 건물이 있을 때, 건물의 공진을 감소시키기 위한 방안을 간단히 제시하여라.

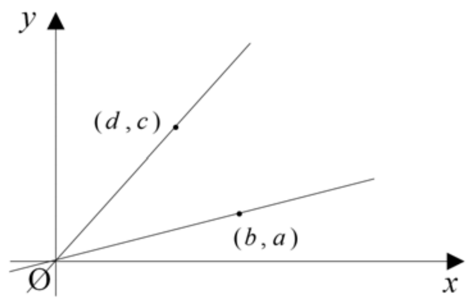
제시문3

홍익이는 초등학교에서 분수의 덧셈을 처음 배웠을 때 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ 을 $\frac{1+1}{2+3}=\frac{2}{5}$ 로 잘못 계산하곤 하였다. 그러나 선생님은 홍익이에게 비록 덧셈은 잘못되었지만 이런 연산도 흥미로운 성질을 가질 수 있다고 말씀하셨다. 이제 대입 논술 시험을 앞둔 홍익이는 이런 연산이 어떤 성질을 갖는지 살펴보기로 했다.

유리수는 두 정수의 비 $\frac{p}{q}$ $(q\neq 0)$로 표현할 수 있다. 분모 q 는 항상 양수라고 가정하자.

논제 3-(가)

유리수 $\frac{p}{q}$ 는 좌표평면에서 원점과 점 (q, p) 를 지나는 직선의 기울기로 볼 수 있다. 두 유리수 $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ $\left(\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\right)$ 를 [그림 1]과 같이 나타내자. 여기에 기울기가 $\frac{a+c}{b+d}$ 인 직선을 그리고 이를 이용하여 부등식 $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$ 가 성립함을 보여라.



[그림 1]

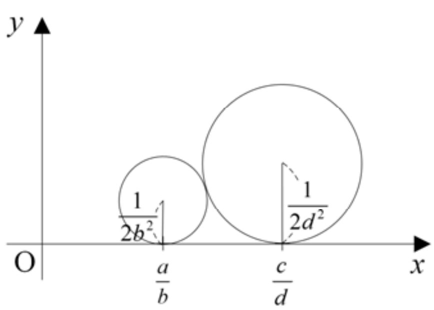
논제 3-(나)

[그림 2]와 같이 x 축 위의 서로 다른 두 유리수 $\frac{a}{b}$ 와 $\frac{c}{d}$ 에서 x 축과 접하고 각각의 반지름의 길이가 $\frac{1}{2b^2}$ 과 $\frac{1}{2d^2}$ 인 두 원이 있다.

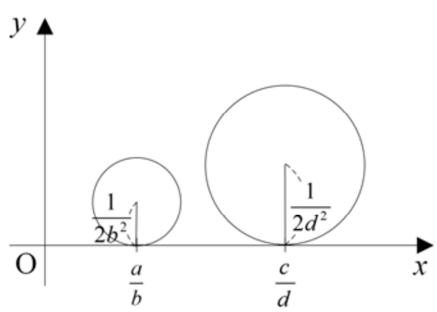
i) [그림 2-a]와 같이 두 원이 서로 접할 필요충분조건은 $|ad-bc|=1$ 임을 보여라.

ii) $|ad-bc|=1$ 일 때, $\frac{a}{b}$ 와 $\frac{c}{d}$ 는 기약분수임을 보여라. $\frac{p}{q}$ 가 기약분수임을 보이기 위해서는 양수 k 를 p, q 의 공약수라 할 때 $k=1$ 임을 보이면 된다.

iii) $|ad-bc|\neq 1$ 일 때 [그림 2-b]와 같이 두 원은 서로 만나지 않음을 보여라.



[그림 2-a]



[그림 2-b]

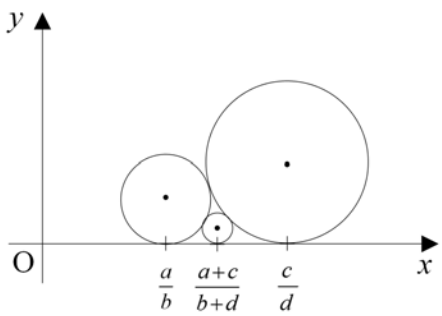
논제 3-(다)

x 축 위의 서로 다른 세 유리수 $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{a+c}{b+d}$ 에서 x 축과 접하며 반지름의 길이가 각각

$\dfrac{1}{2b^2}$, $\dfrac{1}{2d^2}$, $\dfrac{1}{2(b+d)^2}$ 인 세 원이 있다. 이때, $|ad-bc|=1$ 이라고 하자.

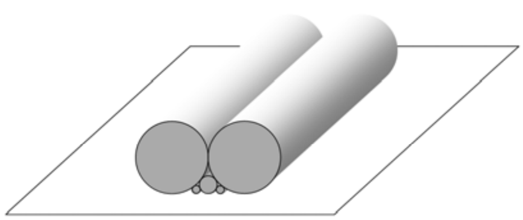
i) [그림 3]과 같이 세 개의 원이 서로 접함을 보여라.

ii) $\dfrac{a+c}{b+d}$ 가 기약분수임을 보여라.

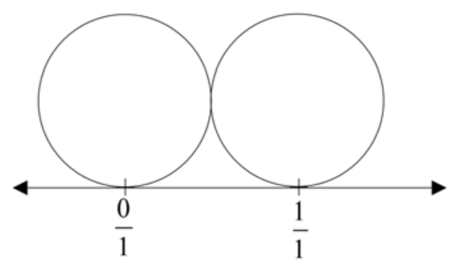


[그림 3]

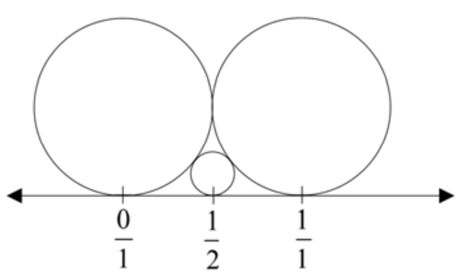
홍익이는 원기둥 모양의 파이프들을 지면 위에 배치하는데 [그림 4-a]와 같이 이웃하는 두 개의 파이프와 지면 사이에 생기는 공간을 줄이기 위해 계속해서 더 작은 파이프를 집어넣는다. 이를 단순화하기 위해 직선 위에 원을 그리는 문제로 바꾸어 생각하였다. [그림 4-b]와 같이 x 축의 0 과 1 에 그려진 크기가 같은 두 원이 서로 접한다. 1 단계인 [그림 4-c]에서는 두 원과 x 축 사이에 생긴 1 개의 틈에 두 원에 접하는 원을 x 축 위에 그린다. 2 단계인 [그림 4-d]에서는 원들과 x 축 사이에 생긴 2 개의 틈에 원들과 접하는 2 개의 원을 x 축 위에 그린다. 3 단계에서는 새로 생긴 4 개의 틈에 4 개의 원을 그리게 될 것이다. 이런 과정을 계속 반복한다.



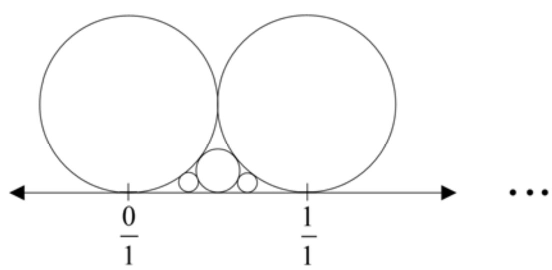
[그림 4-a]



[그림 4-b]



[그림 4-c]



[그림 4-d]

논제 3-(라)

위의 과정에서 반지름의 길이가 $\frac{1}{50}$ 인 원은 몇 개를 그리게 되는가?

논제 3-(마)

홍익이는 위와 같이 원을 그릴 때 x 축 위의 0 과 1 사이의 임의의 유리수, 예를 들어 $\frac{256}{365}$ 에 접하는 원을 그리게 될지 궁금했다. 복잡한 계산을 거치지 않고 이를 알아낼 수는 없을까? 홍익이는 $\frac{256}{365}$ 에 접하는 원을 그리는 단계가 존재한다는 성질을 다음과 같이 보이려 한다.

> 어떤 단계에서도 $\frac{256}{365}$ 에 접하는 원이 그려지지 않는다고 하자. 원을 그리는 단계가 반복될수록 원들과 x 축 사이의 틈이 작아지므로, 결국 어느 단계에 이르면 반지름의 길이가 $\frac{1}{2 \cdot 365^2} = \frac{1}{266450}$ 인 원을 0 과 1 사이의 어디에도 접하도록 그릴 수 없다. ………

위에서는 보이고자 하는 성질을 부정함으로써 모순을 이끌어내는 방법을 사용하였다. 앞의 (나)의 결과를 이용하여 이 증명의 나머지 부분을 완성하여라.

논술유형분석

문항 수	수학 2문항(소문항 9문항), 수학과학 통합 1문항(소문항 4문항)	**시간**	120분
연관 개념	미분, 평균값의 정리, 이계도함수, 벡터의 덧셈, 두 원의 위치 관계		

제시문분석

제시문[1]

함수의 그래프에서 두 점을 지나는 직선의 기울기를 통해 접선의 기울기를 정의하게 하고 평균값의 정리를 소개하고 있으며 접선의 기울기를 이용하여 방정식의 근을 근사적으로 구할 수 있음을 설명하고 있다.

제시문[2]

삼각함수의 미분, 삼각함수의 주기 및 진동수, 삼각함수의 합성 등을 ‘질량-용수철계’에 적용하고 있으며, 공진이 일어나는 원리를 수학적으로 설명하기 위하여 극한의 개념을 도입하고 있다.

제시문[3]

정수 및 유리수의 성질을 기하학적 도형을 통해 이해하게 하고 있고 귀납적 추론을 통해 논리적인 증명을 도출해내도록 유도하고 있다.

논제분석*

논제 1

(가) 함수의 그래프에서 할선의 극한을 통한 접선의 기울기의 정의를 묻고 있다.
(나) 미분계수가 접선의 기울기임을 이해하고 있는지 확인하는 문제이다.
(다) 주어진 전력 소비 상황을 평균값 정리를 이용하여 해석하는 문제이다.
(라) 접선을 그어감으로써 방정식의 근을 구하는 방법을 설명한 후 이를 적용하여 방정식 $x^2-2=0$ 의 양의 근을 소수 셋째 자리까지 계산하게 하고 있다.

논제 2

(가) 삼각함수를 미분하게 하고 있다.
(나) 주어진 삼각함수를 이용하여 진동하는 물체의 진동수를 계산하고, 진동수와 주기의 상관관계에 대해 생각하도록 하고 있다.
(다) 외부 힘이 작용하는 경우의 진동을 함수의 극한을 이용하여 구하는 문제인데 이때 로피탈 정리가 사용된다.
(라) (다)의 결과를 삼각함수 합성을 이용하여 간단한 하나의 삼각함수로 나타내어 진동의 진폭을 구하도록 하고 있다.
(마) 지진의 수평진동에 의해 유발되는 건물의 수평진동을 줄일 수 있는 방안을 제시하도록 하여 수학적 지식이 실생활에 응용되고 있음을 경험하게 하고 있다.

논제 3

(가) 주어진 두 유리수를 벡터 형태로 표현함으로써 제시문의 연산이 벡터의 합이 된다는 관점의 변화를 이해할 수 있는지 묻는 문제이다.
(나) 문제 해결에 필요한 기초적인 몇 가지 사실들을 피타고라스의 정리 및 공약수와 정수의 성질로부터 이끌어낼 수 있는지 평가하는 문제이다.
(다) (나)를 사용하여 처음에 제시된 세 유리수의 관계를 세 개의 원이 만족하는 기하학적 관계와 연관시키는 문제이다.
(라) 주어진 도형의 개수를 (다)에 주어진 관계를 여러 번 적용하여 알아내도록 하는 문제이다.
(마) 앞의 문제들을 통해 알게 된 사실을 논리적으로 조합하여 새로운 결론을 얻어낼 수 있는지 확인하는 문제이다.

* 홍익대 해설 참조

배경지식쌓기

1. 접선의 방정식

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(a,\ f(a))$ 에서의 접선의 방정식은

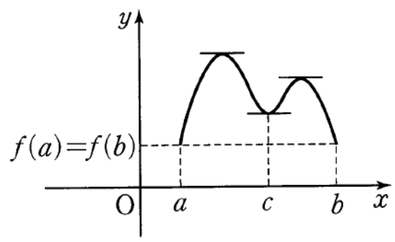
$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

참고) 기울기가 $f'(a)$ 이고, 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ 를 지나는 직선의 방정식과 같다.

2. 평균값의 정리

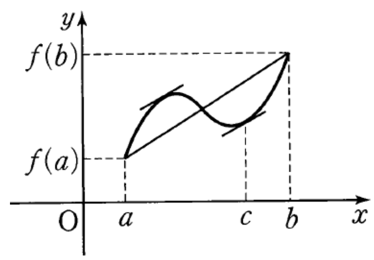
가. 롤의 정리

함수 $y=f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a,\ b]$ 에서 연속이고, 열린 구간 $(a,\ b)$ 에서 미분가능할 때, $f(a)=f(b)$ 이면 $f'(c)=0$ 인 c 가 a 와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.



나. 평균값의 정리

함수 $y=f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a,\ b]$ 에서 연속이고, 열린 구간 $(a,\ b)$ 에서 미분가능할 때, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ 가 되는 c 가 a 와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.



3. 삼각함수의 합성

$a\sin\theta+b\cos\theta$ 의 꼴의 삼각함수를 $r\sin(\theta+\alpha)$ 또는 $r\cos(\theta-\alpha)$ 의 꼴로 변형하는 것은 **삼각함수의 합성**이라고 한다.

① $a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

$$\left(\text{단, } \cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

② $a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\beta)$

$$\left(\text{단, } \cos\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\beta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

풀어보기

문제 1 좌표평면에서 곡선 $y=4x^3$ 위의 점 $(1, 4)$ 에서의 접선과 x 축의 교점을 $(a_1, 0)$ 이라 하고 점 $(a_1, 4{a_1}^3)$ 에서의 접선과 x 축의 교점을 $(a_2, 0)$, 점 $(a_2, 4{a_2}^3)$ 에서의 접선과 x 축의 교점을 $(a_3, 0)$ 이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 얻어지는 수열을 $\{a_n\}$ 이라 할 때, a_{10} 의 값은? (2013년 EBS 수능완성)

① $\left(\frac{1}{3}\right)^9$ ② $\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$ ③ $\left(\frac{2}{3}\right)^9$ ④ $\left(\frac{2}{3}\right)^{10}$ ⑤ $\left(\frac{2}{3}\right)^{11}$

문제 2 함수 $f(x)=2\cos^2 x+k\sin 2x-1$ 의 최댓값이 $\sqrt{10}$ 일 때, 양수 k 의 값은? (2014년 대수능)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

문제 3 함수 $f(x)=x+\sin x$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=(f \circ f)(x)$$

로 정의할 때, [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (2007년 대수능)

[보 기]

ㄱ. 함수 $f(x)$ 의 그래프는 개구간 $(0, \pi)$ 에서 위로 볼록하다.
ㄴ. 함수 $g(x)$ 는 개구간 $(0, \pi)$ 에서 증가한다.
ㄷ. $g'(x)=1$ 인 실수 x 가 개구간 $(0, \pi)$ 에 존재한다.

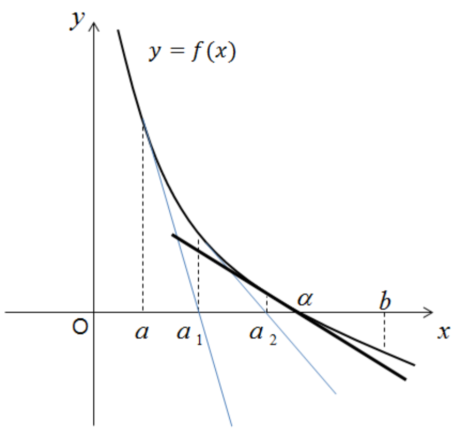
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

읽기자료

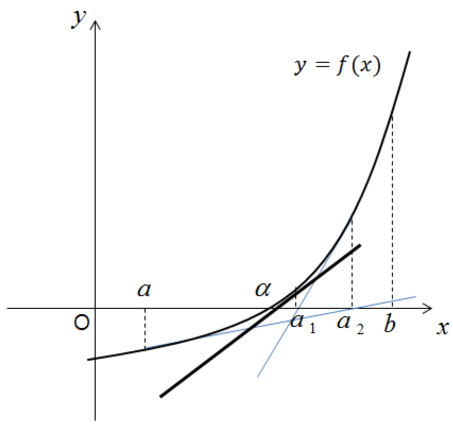
방정식 해의 근삿값과 뉴턴의 방법

삼차함수 $y=f(x)$ 의 그래프로부터 삼차방정식 $f(x)=0$ 은 적어도 하나의 실근을 가짐을 알 수 있다. 이 실근을 구하기 어려울 때에는 다음과 같이 접선을 이용하여 근삿값을 구할 수 있다.

구간 $[a, b]$ 에서 $f(a)f(b)<0$ 이고 이 구간 안에 실근 α 가 있다고 하고 그 근삿값을 구하여 보자.(단, $f(x)\neq 0$, $x \in (a, b)$)



$f(a)>0$, $f(b)<0$ 인 경우



$f(a)<0$, $f(b)>0$ 인 경우

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

이다. 이 접선과 x 축과의 교점을 a_1 이라 하면,

$$a_1=a-\frac{f(a)}{f'(a)}$$

이다. 이 값을 α 의 제1차 근삿값이라고 한다. 또, 점 $(a_1, f(a_1))$ 에서의 접선의 방정식이

$$y-f(a_1)=f'(a_1)(x-a_1)$$

이므로 이 접선과 x 축과의 교점을 a_1 라 하면

$$a_2=a_1-\frac{f(a_1)}{f'(a_1)}$$

이고 이 값을 제2차 근삿값이라고 한다. 같은 방법으로 제3차, 제4차 근삿값, 즉,

$$a_3=a_2-\frac{f(a_2)}{f'(a_2)}$$

$$a_4=a_3-\frac{f(a_3)}{f'(a_3)}$$

$$\vdots$$

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}$$

을 구할 수 있다. 이때, a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n, $\cdots$ 은 α 에 가까워진다. 이와 같은 방법으로 근의 근삿값을 구하는 방법을 뉴턴의 방법이라고 한다.*
뉴턴의 방법은 여러 가지 무리수의 근삿값을 구하는데 사용될 뿐 아니라, 고차방정식이나 초월함수 방정식의 해의 근삿값을 구하는 데에도 사용될 수 있다.

[예제] 뉴턴의 방법을 이용하여 $\sqrt{2}$ 의 근삿값을 구해보자.(단, 사칙연산에 대해서는 계산기를 사용해도 좋다.)

위 예제를 풀기 위해 $\sqrt{2}$ 를 근으로 하는 $x^2-2=0$ 라는 방정식과 함수 $y=x^2-2$ 를 생각한다. $y'=2x$ 이므로

$$x_{n+1} = \frac{{x_n}^2-2}{2x_n}$$

이 성립하고 x_1 을 2 로 잡고 계산해보면

$$x_2 = x_1 - \frac{{x_1}^2-2}{2x_1} = 1.5$$

$$x_3 = x_2 - \frac{{x_2}^2-2}{2x_2} = 1.41666666666\cdots$$

$$x_4 = x_3 - \frac{{x_3}^2-2}{x_3} = 1.41421568627\cdots$$

$$x_5 = x_4 - \frac{{x_4}^2-2}{2x_4} = 1.41421356237\cdots$$

따라서, $\sqrt{2}$ 의 근삿값 1.4142 를 얻을 수 있다.

* 안재천, 수학거미, 2005

예시답안

풀어보기

문제 1 정답 ④

$y' = 12x^2$ 이므로 점 $(1, 4)$ 에서의 접선의 방정식은 $y-4=12(x-1)$ 이다. 따라서 $a_1 = \frac{2}{3}$ 이고

점 $(a_n, 4a_n^{\ 3})$ 에서의 접선의 방정식은 $y-4a_n^{\ 3} = 12a_n^{\ 2}(x-a_n)$ 이므로 $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n$ 이다. 따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{2}{3}$, 공비가 $\frac{2}{3}$ 인 등비수열이고

$$a_n = \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\therefore\ a_{10} = \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$$

문제 2 정답 ③

반각 공식에 의해 $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\cos^2 x + k\sin 2x - 1 \\ &= 2\times\frac{1+\cos 2x}{2} + k\sin 2x - 1 \\ &= \cos 2x + k\sin 2x = \sqrt{1+k^2}\sin(2x+a) \end{aligned}$$

$$\left(\text{단, } \sin a = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}},\ \cos a = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $\sqrt{1+k^2}$ 이므로 $\sqrt{1+k^2} = \sqrt{10}$ 이다. $\therefore\ k=3$

문제 3 정답 ⑤

ㄱ. $f'(x) = 1+\cos x$, $f''(x) = -\sin x$

개구간 $(0, \pi)$ 에서 $f''(x) < 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 그래프는 위로 볼록이다. $\therefore$ 참

ㄴ. $g'(x) = f'(f(x))\cdot f'(x) = \{1+\cos(x+\sin x)\}(1+\cos x)$

개구간 $(0, \pi)$ 에서 $g'(x) > 0$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 증가한다. $\therefore$ 참

ㄷ. $g(0)=f(f(0))=f(0)=0$, $g(\pi)=f(f(\pi))=f(\pi)=\pi$

$\dfrac{g(\pi)-g(0)}{\pi-0}=1$ 이고 $g(x)$ 는 미분가능이므로 평균값 정리에 의해 $g'(x)=1$ 인 x 가 구간 $(0,\ \pi)$ 에 존재한다. $\therefore$ 참

논제1-(가)*

점 $\mathrm{A}(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기를 m 이라 하면, m 의 값은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$m=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{(a+\Delta x)-a}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

이것은 $x=a$ 에서의 미분계수 $f'(a)$ 와 같다.

논제1-(나)

$f(x)=x^2$ 일 때,

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(a+\Delta x)^2-a^2}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^2+2a\Delta x+\Delta x^2-a^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2a+\Delta x)=2a$$

논제1-(다)

시간 t 에서 전력 사용량을 $f(t)$ 라고 하면 전력 소비율은 $f'(t)$ 이다. 평균값 정리를 적용하면

$$\frac{f(10)-f(0)}{10-0}=\frac{6-0}{10-0}=0.6=f'(c)$$

를 만족하는 시점 c 가 전기를 사용한 10 시간 사이에 적어도 한 번 존재한다. 따라서 전력 소비율이 0.6KW 인 시점이 적어도 한 번 존재하고 이는 제한값인 0.5KW 를 초과한다.

논제1-(라)

$f(x)=x^2-2$, $f'(x)=2x$ 이므로

$$x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}=x_{n-1}-\frac{x_{n-1}^2-2}{2x_{n-1}}$$

이다. $x_0=2$ 이므로

$$n=1\ :\ x_1=x_0-\frac{{x_0}^2-2}{2x_0}=2-\frac{2^2-2}{2\cdot 2}=\frac{3}{2}=1.500$$

$$n=2\ :\ x_2=x_1-\frac{{x_1}^2-2}{2x_1}=\frac{3}{2}-\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2-2}{2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)}=\frac{17}{12}=1.4166\cdots=1.417$$

---

* 이후 홍익대 예시답안 참조

즉 $f(x)=x^2-2=0$ 의 양의 근은 $\sqrt{2}$ 이고, 위의 방법으로 계산한 값은 1.417 이다.

논제2-(가)

$x(t)=x_0\cos\omega t$ 이므로 $\dfrac{dx}{dt}=-\omega x_0\sin\omega t$, $\dfrac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2x_0\cos\omega t$ 이다. 이것을 ①에 대입

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=-\omega^2x_0\cos\omega t+\omega^2x_0\cos\omega t=0 \quad \cdots \ (1)$$

이고

$$x(0)=x_0\cos(\omega\cdot 0)=x_0 \quad \cdots \ (2)$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=-\omega x_0\sin(\omega\cdot 0)=0 \quad \cdots \ (3)$$

이다.

논제2-(나)

i) ③의 진동수는 $f=\dfrac{\omega}{2\pi}$ 이고 ②에서 $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ 이므로 $f=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ 이다.

ii) m 이 두 배 증가하면 진동수는 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 배가 된다.

iii) k 가 두 배 증가하면 진동수는 $\sqrt{2}$ 배가 된다.

iv) 진동수는 질량 m 과 용수철 상수 k 로만 표현되어 초기변위 x_0 와 무관하므로 x_0 가 두 배로 증가해도 진동수에는 변화가 없다.

논제2-(다)

여기서는 $x(t)$ 를 Ω 의 함수로 보고 Ω 에 대해 로피탈의 정리를 이용하면

$$\lim_{\Omega\to\omega}x(t)=\lim_{\Omega\to\omega}\frac{f_0(\omega\sin\Omega t-\Omega\sin\omega t)}{\omega(\omega^2-\Omega^2)}=\left.\frac{f_0(\omega t\cos\Omega t-\sin\omega t)}{-2\omega\Omega}\right|_{\Omega=\omega}$$

$$=\frac{f_0}{2\omega^2}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t)$$

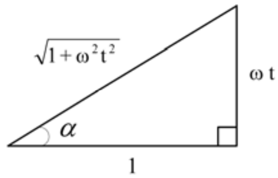
이다.

논제2-(라)

(다)의 결과에서

$$x(t)=\frac{f_0}{2\omega^2}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t)$$

$$= \frac{f_0}{2\omega^2}\sqrt{1+\omega^2t^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2t^2}}\sin\omega t - \frac{\omega t}{\sqrt{1+\omega^2t^2}}\cos\omega t\right)$$
$$= \frac{f_0}{2\omega^2}\sqrt{1+\omega^2t^2}\,(\cos\alpha\sin\omega t - \sin\alpha\cos\omega t)$$
$$= \frac{f_0}{2\omega^2}\sqrt{1+\omega^2t^2}\,\sin(\omega t - \alpha)$$



[참고] $\sin(x \pm y) = \sin x\cos y \pm \cos x\sin y$

이고, 여기서 $\tan\alpha = \omega t$ 이다. 따라서 $x(t)$ 의 진폭은 시간의 함수 $\frac{f_0}{2\omega^2}\sqrt{1+\omega^2t^2}$ 이고 이는 시간에 대한 증가함수이므로 공진이 발생한다.

논제2-(마)

i) 특정한 진동수의 지진에 의한 건물의 공진을 감소시키기 위해서는 건물의 고유진동수가 지진의 진동수로부터 멀어져야 한다. 그런데 건물의 고유진동수는 질량 m 과 건물의 강성 또는 탄성을 나타내는 용수철 상수 k 와 관계되므로($k = F/x$ 에서 k 는 단위 변형당 가해지는 힘이므로 건물의 탄성을 줄이거나 강성을 증가시키면 k 값이 증가한다.) 건물의 질량 m과 k 로 나타나는 탄성 또는 강성을 변화시켜 공진을 줄일 수 있다.

ii) 따라서 건물의 질량을 변화시키거나 건물의 탄성 또는 강성을 변화시키는 합리적인 행위를 모두 답으로 간주한다. 보조재를 추가하여 기둥을 보강하고, 바닥판과 건물의 결합을 강화하고, 트러스(truss), 브레이싱(bracing) 등의 공법으로 구조물의 결합력을 높이는 것 등이 예가 될 것이다.

논제3-(가)

구하는 직선은 점 $(b+d,\, a+c) = (b,\, a) + (d,\, c)$ 를 지난다. 따라서 두 벡터 $(b,\, a)$ 와 $(d,\, c)$ 의 합에 해당하는 점을 지나는 직선이다. 이 점은 벡터 $(b,\, a)$, $(d,\, c)$ 를 변으로 갖는 평행사변형의 꼭짓점이다. 평행사변형의 대각선은 양 변 사이에 위치하므로 기울기는 $\frac{a}{b}$ 와 $\frac{c}{d}$ 사이의 값이다.

(별해) 기울기가 $\frac{a+c}{b+d}$ 인 직선은 원점과 점 $\left(\frac{b+d}{2},\, \frac{a+c}{2}\right)$ 를 지난다. 이때 점 $\left(\frac{b+d}{2},\, \frac{a+c}{2}\right)$ 는 주어진 두 점 $(b,\, a)$ 와 $(d,\, c)$ 를 잇는 선분의 중점이므로 이 직선의 기울기는 $\frac{a}{b}$ 와 $\frac{c}{d}$ 사이의 값임을 알 수 있다.

논제3-(나)

i) 두 원이 접하기 위해서는 두 원의 중심 사이의 거리와 두 반지름의 합이 같아야 하므로

$$\sqrt{\left(\frac{c}{d}-\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{2d^2}-\frac{1}{2b^2}\right)^2}=\frac{1}{2b^2}+\frac{1}{2d^2}$$

이고 이것을 정리하면,

$$\left(\frac{bc-ad}{bd}\right)^2=4\cdot\frac{1}{2b^2\cdot 2d^2},\ (ad-bc)^2=1$$

이고 따라서, 두 원이 접하는 필요충분조건은 $|ad-bc|=1$ 이다.

ii) 양수 k가 a, b의 공약수라 하고 $a=mk$, $b=nk$라 두면

$$ad-bc=mkd-nkc=(md-nc)k=\pm 1$$

로부터, 정수의 곱이 ± 1 이 되는 경우 $k=1$ 이어야 하므로 $\frac{a}{b}$ 는 기약분수이고, 동일한 방법으로 $\frac{c}{d}$ 도 기약분수임을 알 수 있다.

iii) $\frac{a}{b}\neq\frac{c}{d}$ 에 의해 $ad-bc\neq 0$ 이며, $ad-bc$는 정수이므로 두 원의 중심 사이의 거리를 D라 하고 두 원의 반지름을 각각 r, R이라 하면, i)의 식으로부터 항상 $D^2\geq(r+R)^2$ 이다 ($\because (ad-bc)^2\geq 1$). 즉, 만약 $|ad-bc|\neq 1$ 이라면 $D^2>(r+R)^2$ 이므로 두 원은 만나지 않는다.

논제3-(다)

i) (나)의 결과에 의해 $|a(b+d)-b(a+c)|=1$ 과 $|c(b+d)-d(a+c)|=1$ 임을 보이면 된다. 주어진 가정에 의해 $|a(b+d)-b(a+c)|=|ad-bc|=1$ 이며 동일하게 두 번째 등식도 성립한다.

ii) 역시 (나)의 방법으로 $|a(b+d)-b(a+c)|=1$ 는 $\frac{a+c}{b+d}$ 가 기약분수임을 의미한다.(이 식은 (나)에서 c, d 대신 $a+c, b+d$가 쓰인 것만 다를 뿐 나머지는 동일하다.)

논제3-(라)

(다)의 결과를 계속 적용해 가면 처음 $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}$ 에서 시작해서 인접하는 두 분수 $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ 사이의 새로 생기는 원의 위치는 $\frac{a+c}{b+d}$ 이고 일반적으로 $\frac{a}{b}$ 에 위치한 원의 반지름이 $\frac{1}{2b^2}$ 가 된다.

$\frac{1}{50}=\frac{1}{2\cdot 5^2}$ 이므로 위 과정에서 분모가 5 인 분수를 찾으면 된다.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
\frac{0}{1} & & & & & & & & & & & & & & & & \frac{1}{1} \\
\frac{0}{1} & & & & & & & & \frac{1}{2} & & & & & & & & \frac{1}{1} \\
\frac{0}{1} & & & & \frac{1}{3} & & & & \frac{1}{2} & & & & \frac{2}{3} & & & & \frac{1}{1} \\
\frac{0}{1} & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{3} & & \frac{2}{5} & & \frac{1}{2} & & \frac{3}{5} & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{4} & & \frac{1}{1} \\
\frac{0}{1} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{2}{7} & \frac{1}{3} & \frac{3}{8} & \frac{2}{5} & \frac{3}{7} & \frac{1}{2} & \frac{4}{7} & \frac{3}{5} & \frac{5}{8} & \frac{2}{3} & \frac{5}{7} & \frac{3}{4} & \frac{4}{5} & \frac{1}{1}
\end{array}
$$

이며 이후에는 분모가 5 보다 큰 분수만 새로 등장하므로 $b=5$ 인 위치는 위에서 $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ 이다. 총 4 개의 원을 그리게 된다.

논제3-(마)

원을 그리는 단계를 충분히 거치면 반지름의 길이가 $\frac{1}{266450}$ 인 원을 어디에도 그릴 곳이 없는 도형을 얻게 됨을 문제에서 이미 설명하였다. 또한 가정에 의해 이 도형에는 $\frac{256}{365}$ 위에 반지름의 길이가 $\frac{1}{266450}$ 인 원은 존재하지 않는다. 그러므로 $\frac{256}{365}$ 위에 반지름의 길이가 $\frac{1}{266450}$ 인 원 C를 그리면 이 도형의 원 중에 원 C와 두 점에서 만나는 것이 있어야 한다. 문제 (나)의 결과에 의해, C와 이 도형의 임의의 원은 서로 접하거나 또는 만나지 않기 때문에 이는 모순이다. 따라서 $\frac{256}{365}$ 에 접하는 원을 그리는 단계가 존재한다.

발간을 도와주신 분들

기 획

천정국	부산광역시교육청 교육국장
김승수	부산광역시교육청 교수학습기획과장
이수한	부산광역시교육청 교수학습기획과 학력지원담당장학관
강여순	부산광역시교육청 교수학습기획과 장학사

집필위원

최기원	동래고등학교
백미선	부산남고등학교
강진희	동래고등학교
전현수	부산국제외국어고등학교
양석진	혜화여자고등학교
위성미	남산고등학교
김정수	부산과학고등학교
김무진	부산과학고등학교
원태경	부산일과학고등학교
김기현	부산동고등학교
임승윤	금정고등학교
조준혁	동천고등학교
김태형	부산과학고등학교

수리논술나침반 Ⅵ

발 행 일	2014. 5. 30.
편집 · 발행	부산광역시교육청