FINAL 이해원 모의고사 0회 문제지

제 2 교시

수학 영역(A형)

홀수형

5지선다형

1. $4^{\frac{1}{2}} \times 27^{\frac{1}{3}}$의 값은? [2점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

2. $\lim_{x \to 0}(x^2+x+4)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. 두 행렬 A, B에 대하여 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$이고 $AB=A-\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ 일 때 행렬 B의 모든 성분의 합은? [2점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

4. 상수 a에 대하여 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(3-\frac{an^2+1}{5n^2}\right)$이 수렴할 때, a의 값은? [3점]

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

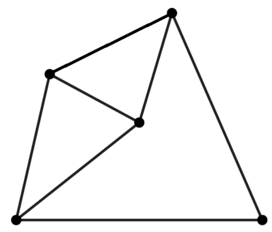
5. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 3이고 공차가 2일 때, a_3+a_4의 값은? [3점]

① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

6. 곡선 $y=x^3+a$ 위의 점 $(1, 1+a)$에서의 접선의 y절편이 $(0, 5)$이다. a의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

7. 다음 그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬의 성분 중 1의 개수는? [3점]



① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

8. $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n}-n}{\sqrt{4n^2+n}-2n}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

9. $(x+1)(x+a)^5$의 전개식에서 x^4의 계수가 50이 되도록 하는 양수 a의 값은? [3점]

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

10. 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	a	b	1

$a-b=\frac{1}{6}$일 때, $\mathrm{E}(3X-1)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

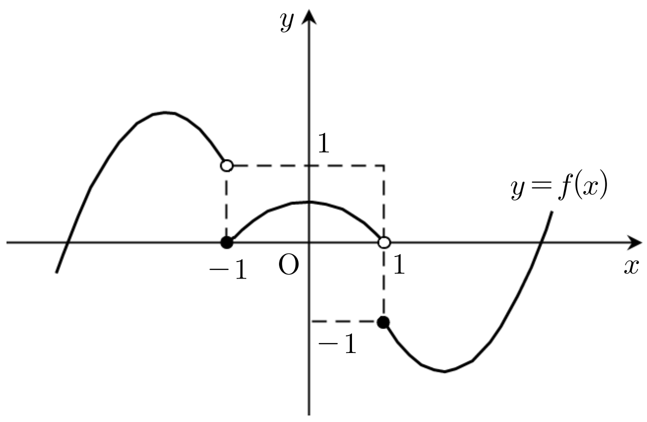
11. 좌표평면에서 y축에 대하여 대칭인 곡선 $y=f(x)$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=5$$

일 때, $\int_{-1}^{1}f(x)dx$의 값은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

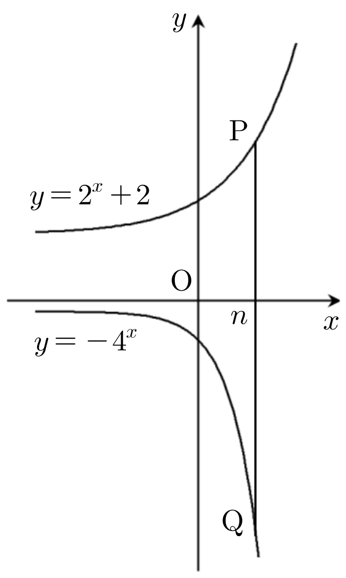
12. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 1+0}f(x)+\lim_{x\to -1+0}f(x)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

[13~14] 그림과 같이 두 곡선 $y=2^x+2$, $y=-4^x$이 직선 $x=n$과 만나는 점을 각각 P, Q 라 할 때, 13번과 14번의 두 물음에 답하시오. (단, n은 자연수이다.)



13. 자연수 n에 대하여, $\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{4^n+2^{n+1}}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

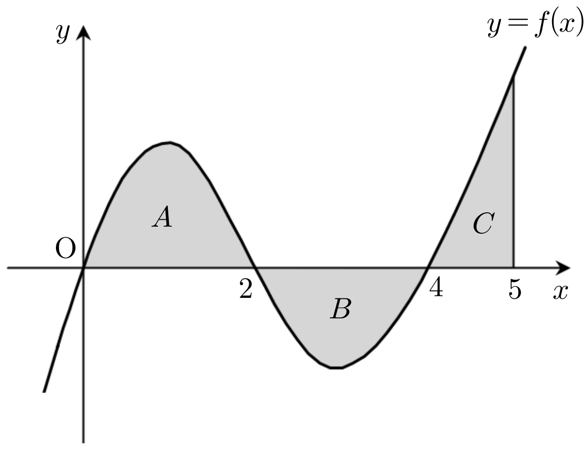
14. 주사위를 던져 나온 눈의 수를 n이라 하고, 직선 $x=n$이 x축과 만나는 점을 A라 하자. 주사위를 180번 던졌을 때, $\overline{\mathrm{AQ}}>\overline{\mathrm{AP}}$를 만족시키는 횟수를 X라 하자. $\mathrm{E}(X)+\mathrm{V}(X)$의 값은? [4점]

① 115 ② 130 ③ 145 ④ 160 ⑤ 175

15. 서로 다른 세 주사위를 동시에 던져서 나온 눈의 수의 최댓값과 최솟값의 차이가 4이상일 확률은? [4점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{13}{36}$ ③ $\frac{7}{18}$ ④ $\frac{15}{36}$ ⑤ $\frac{4}{9}$

16. 그림과 같이 함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$과 x축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이를 각각 A, B라 하고, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 $x=5$로 둘러싸인 부분의 넓이를 C라 할 때, $\int_0^5 f(x)dx+\int_5^4 f(x)dx$의 값을 A, B, C로 표현한 것은? (단, $f(0)=f(2)=f(4)=0$) [4점]



① $A+B$ ② $A-B$ ③ $A+C$
④ $A+B+C$ ⑤ $A-B+C$

17. 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ a^2)$ $(a>0)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기 9인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$, 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z에 대하여 양수 b가 $\mathrm{P}(|Z|<b)=0.4$을 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\mathrm{V}(X)=9\mathrm{V}(\overline{X})$

ㄴ. $\mathrm{P}(\overline{X}>10+a)<\mathrm{P}(X>10+2a)$

ㄷ. $\mathrm{P}(\overline{X}>p)+\mathrm{P}(\overline{X}<q)=0.6$이면 $p-q=ab$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고,

$$na_{n+1}-(n+1)a_n=(3n+5)\left(\frac{2}{5}\right)^n \quad (n\geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

주어진 식의 양변을 $n(n+1)$으로 나누면

$$\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}=\frac{3n+5}{n(n+1)}\left(\frac{2}{5}\right)^n \ (n\geq 1)$$

이므로 $n\geq 2$인 자연수 n에 대하여

$$\frac{a_n}{n}=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{3k+5}{k(k+1)}\left(\frac{2}{5}\right)^k \cdots\cdots (*)$$

이다. 한편

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{3k+5}{k(k+1)}\left(\frac{2}{5}\right)^k=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{5}{k}-\boxed{(가)}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^k$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2^k}{k\times 5^{k-1}}-\boxed{(가)}\left(\frac{2}{5}\right)^k\right)=2-\frac{2^n}{n\times 5^{n-1}}$$

이므로 $(*)$에 의하여

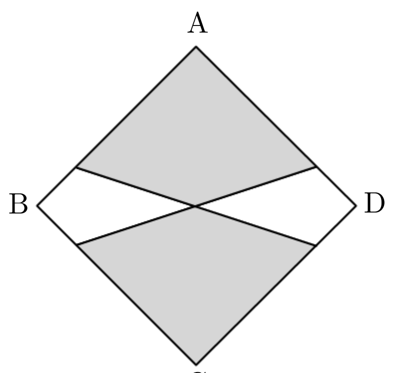
$$a_n=\boxed{(나)} \ (n\geq 1)$$

이다.

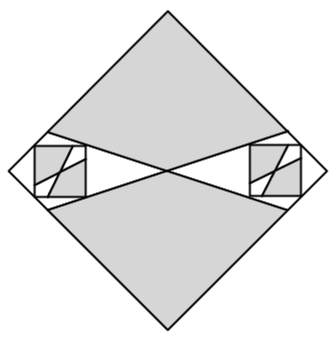
위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(n)$이라 할 때, $\frac{g(3)}{f(24)}$의 값은? [4점]

① $\frac{217}{2}$ ② 109 ③ $\frac{219}{2}$ ④ 110 ⑤ $\frac{221}{2}$

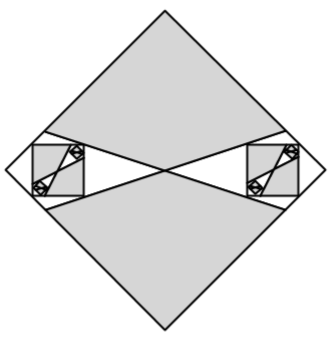
19. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD가 있다. 선분 AB의 3:1 내분점과 선분 CD의 3:1 내분점을 연결하고 선분 BC의 1:3 내분점과 선분 DA의 1:3 내분점을 연결하자. 두 선분과 정사각형으로 둘러싸인 부분 중 넓이가 큰 두 부분을 색칠한 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 색칠되지 않은 두 부분에 선분 AC, BD와 모서리가 평행한 정사각형을 내접하도록 그린 후 그림 R_1을 얻은 것과 마찬가지로 두 정사각형에 색칠한 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림을 R_n이라 할 때, R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 하자. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1



R_2



R_3

⋯

① $\frac{27}{2}$　② $\frac{55}{4}$　③ 14　④ $\frac{57}{4}$　⑤ $\frac{29}{2}$

20. 두 이차정사각행렬 A, B가

$$AB^2+A=E,\ \ (A+B)^2-B^2=O$$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>
ㄱ. A의 역행렬이 존재한다.
ㄴ. $AB=BA$
ㄷ. $A^2B+E=2A$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 좌표평면에서 실수 t에 대하여 직선 $y=1$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$, $\mathrm{P}(t,\ 1)$이 있다. x축 위의 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{AQ}}$이 최소가 되도록 하는 점 Q의 x좌표를 $f(t)$라 할 때, $\int_0^1 f(t)dt$의 값은? [4점]

① $-\frac{1}{8}$　② $-\frac{1}{7}$　③ $-\frac{1}{6}$　④ $-\frac{1}{5}$　⑤ $-\frac{1}{4}$

단답형

22. 방정식 $4^x=2$의 실근을 a라 할 때, $60a$의 값을 구하시오. [3점]

23. 함수 $f(x)=x^2+20x$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오. [3점]

24. x, y에 대한 연립일차방정식

$$\begin{pmatrix} 4 & a \\ a & 28 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

이 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 갖도록 하는 양수 a의 값을 구하시오. [3점]

25. 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이고

$$\mathrm{P}(A|B^c)=\frac{3}{4},\ \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}$$

일 때, $60\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\}$의 값을 구하시오. (단, $\mathrm{P}(A)>\mathrm{P}(B)$) [3점]

26. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=\frac{1}{8}$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=2a_n$$

을 만족시킬 때, $a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_m=1$이 되는 자연수 m의 값을 구하시오. [4점]

27. 어떤 지역에서 하나의 소문이 퍼져나갈 때 t 시간 후 이 소문을 들은 이 지역 사람의 비율을 $\mathrm{P}(t)$ $(0 < \mathrm{P}(t) \le 1)$라 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 하자.

$$\mathrm{P}(t) = \frac{1}{1 + a \times 2^{-\frac{t}{3}}}$$

이 지역 사람의 $\frac{1}{17}$이 어떤 소문을 듣게 될 때까지 걸린 시간이 3시간이라 할 때, 이 지역 사람의 $\frac{4}{5}$ 이상이 이 소문을 듣게 될 때까지 걸리는 시간의 최솟값을 구하시오. [4점]

28. 함수 $f(x) = x^2$에 대하여 함수

$$g(x) = \frac{f(x-a)}{f(x)-b}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to 2} g(x) = 0$

(나) $\lim_{x \to -2} g(x)$이 존재하지 않는다.

$a+b$의 값을 구하시오. [4점]

29. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)-(n-1)h}{h^n} = n \quad (n=1,\ 2)$$

일 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소를 가진다. $90a^2$의 값을 구하시오. [4점]

30. 자연수 n에 대하여 $\log n$의 지표와 가수를 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하고, 집합 A_n, B_n을

$$A_n = \{g(2^k) \mid k\text{는 자연수},\ f(2^k)=n\}$$

$$B_n = \{a+b \mid a \in A_n,\ b \in A_n\}$$

라 하자. 20이하인 자연수 m에 대하여

$$A_m \subset B_n$$

을 만족시키는 순서쌍을 (m, n)이라 할 때, 모든 $m+n$의 값의 합을 구하시오. (단, $\log 2 = 0.3010$으로 계산한다.) [4점]