01. [방심하세요]

sol)

$\therefore\ 3(2+1-1+3)=15$

02. [방심하세요]

sol)

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2-(n^2-6n)}{n+1+\sqrt{n^2-6n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{8n+1}{n+1+\sqrt{n^2-6n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{8}{1+1}=4$$

03. [방심하세요]

sol)

$$\therefore\ \cos2\theta=2\cos^2\theta-1=2\cdot\frac{1}{4}-1=-\frac{1}{2}$$

04. [방심하세요]

sol)

$\frac{x-3-2x+12}{x-6}\ge\frac{-(x-9)}{x-6}\ge0\ \to\ 6<x\le9$ 로 3개

05. [방심하세요]

sol)

$\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+4\\3a+10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\b\end{pmatrix}\ \to\ a+b=0+10=10$

06. [방심하세요]

sol)

두 점 A,B 의 $2:1$ 내분점의 좌표는 $(-2,2,3)$이므로 이를 직선 l에 대입하면 $-2=2-a=\frac{3-b}{2}\ \to\ a+b=4+7=11$

07. [방심하세요]

sol)

$$\begin{cases} k\log_2 M_1 = 20^2-10\log20 \\ k\log_2 M_2 = 10^2-10\log10 \end{cases}\ \to\ k\log_2\frac{M_1}{M_2}=300-10\log2$$

그리고 $\frac{M_1}{M_2}=2^{30-\log2}$를 대입하면

$k(30-\log2)=300-10\log2$가 되어 $k=10$이 답입니다.

08. [낚시]

$sol.1$) 잘못된 풀이

1로 같을 확률 $p_1=\frac{\boxed{1}+\boxed{1}}{6}\times\frac{1}{2}$ 주사위 $\boxed{1}$ 또는 $\boxed{4}$, 동전 앞면

2로 같을 확률 $p_2=\frac{\boxed{1}+\boxed{1}}{6}\times\frac{1}{2}$ 주사위 $\boxed{2}$ 또는 $\boxed{5}$, 동전 뒷면

따라서 구하고자 하는 확률은 $\frac{p_2}{p_1+p_2}=\frac{1}{2}$ 물론 답도 아닙니다.

$sol.2$) 올바른 풀이

주사위의 눈으로서의 수와, 주사위의 눈을 3으로 나눈 나머지로서의 수와, 동전의 앞면과 뒷면에 적혀진 수들을 잘 구분하여야 합니다. 그러면

$\frac{\boxed{1}}{\boxed{1}+\boxed{1}+\boxed{1}+\boxed{1}}=\frac{1}{4}$ 이 답이 됩니다.

09. [이항분포에서의 분산]

sol)

여기서는 주사위의 눈을 3으로 나눈 수가 아닌, 주사위의 눈을 그대로 읽은 수를 말하고 있습니다! 이때, 주사위의 눈의 수와 동전에 적혀있는 수가 같을 확률이 1로 같을 때와 2로 같을 때의 확률 $\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$ 이고, 매 시행이 독립이므로 X는 이항분포를 따른다고 볼 수 있습니다. 즉, $X\sim B\left(n,\frac{1}{6}\right)$라 할 수 있습니다. 따라서 $V(X)=n\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)=\frac{5}{36}n$이고, $V(6X)=36V(X)$로부터 $\left(\frac{n}{\cancel{6}}\right)^2=36\left(\frac{5}{\cancel{36}}n\right)\ \to\ n=180$이 답이 됩니다.

[2009년 06월 평가원 수리(가형) 13번] - 유사 기출

13. 어느 창고에 부품 S가 3개, 부품 T가 2개 있는 상태에서 부품 2개를 추가로 들여왔다. 추가된 부품은 S 또는 T이고, 추가된 부품 중 S의 개수는 이항분포 $\mathrm{B}\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다. 이 7개의 부품 중 임의로 1개를 선택한 것이 T일 때, 추가된 부품이 모두 S였을 확률은? [4점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

※ n이 충분히 크지 않은데도 이항분포에서 $V(X)=npq$로의 계산이 가능한지에 대하여 순간 의문을 가지셨던 분들은 n이 충분히 클 때 이항분포를 정규분포로 근사할 수 있다는 것과 헷갈리신 거에요!

10. [연속함수가 되기 위한 조건]

sol)

$f(x)$는 $x=0$과 $x=1$에서 불연속점을 갖지만, 이차함수 $g(x)$를 곱한 $f(x)g(x)$는 주어진 구간에서 연속함수가 되기 위해서는 $g(0)=0=g(1)$이 되어야 합니다. 따라서 $g(x)=kx(x-1)$이라 둘 수 있고, $g(2)=2k=4$로부터 $g(3)=2\cdot3\cdot2=12$가 답이 됩니다.

[2009년 06월 평가원 수리(가형) 23번] - 서로 다른 두 실근

23. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 두 함수

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}-1}{x^{2n}+1},\quad h(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$와 함수 $f(x)h(x)$가 모두 연속함수일 때, $f(10)$의 값을 구하시오. [4점]

※ 두 개의 불연속점을 갖는 함수에 $f(x)$나 $g(x)$등의 이차함수를 곱하여서 연속함수가 되게 하기 위해선, 각 불연속점에서 $f(x)$나 $g(x)$의 함숫값이 0이어야 합니다. 그런데 $f(x)$나 $g(x)$가 기껏해야 서로 다른 근을 두 개 갖는 상황이니 불연속점에서의 근으로 하나씩 분배하는 경우가 유일하기에 이런 문제가 나올 때마다 기계적으로 풀어도 별 지장이 없습니다. 이제는 다소 일반화된 개념이 되어서 이보다 더 복잡한 상황에 대하여 묻는 문제도 종종 나오기도 합니다.

[2013년 11월 대수능 수학 영역(B형) 12번] - 중근

12. 이차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\ln(x+1)} & (x\neq 0)\\ 8 & (x=0)\end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 구간 $(-1,\ \infty)$에서 연속일 때, $f(3)$의 값은? [3점]

① 6 ② 9 ③ 12 ④ 15 ⑤ 18

11. [Fundamental Theorem of Calculus]

sol)

다항함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$F(f(x))-F(f(0))=\frac{16}{3}x^6$$

가 되고, 양변을 미분하면

$$f(f(x))f'(x)=32x^5$$

이므로 $f(x)$의 차수로 $1, 2, 3, \cdots$ 를 몇 개 가정하여 양변의 차수를 비교해보면 결국 2가 되어야 함을 알 수 있습니다. 따라서

$$f(x)=ax^2+bx+c\ (a>0)$$

여기서 동물적 감각으로 $f(x)=kx^2$로 두고서 풀어도 되긴 합니다.

그런데 $\int_0^{f(0)}f(t)dt=0$이고, $\int_0^{f(x)}f(t)dt=\frac{16}{3}x^6$를 보면 우변의 근은 0으로 유일한데, 주어진 정적분의 위 끝과 아래 끝을 일치시켜서 0이 되게 하는 x값도 유일해야 하므로 $f(0)=0$임을 알 수 있습니다. 즉, $c=0$이 됩니다.

또, $\int_0^{f(x)}f(t)dt=\frac{16}{3}x^6$가

$$\int_0^{f(-x)}f(t)dt=\frac{16}{3}(-x)^6=\frac{16}{3}x^6$$

라는 대칭적 성질을 만족시키므로 $f(-x)=f(x)$로 결국 $b=0$이 됩니다. 끝으로, $f(x)=ax^2$과 $f(f(x))f'(x)=32x^5$를 연립해보면

$$a(ax^2)^2(2ax)=2a^4x^5=32x^5\ \rightarrow\ a=2\ (\because a>0)$$

로 $f(x)=2x^2$이고 답은 $f(2)=8$이 나옵니다.

12. [계륵 같은 모비율]

sol)

작년 수능하고 거의 똑같네요, 심지어 확률 부분 $pq=\frac{4}{25}$ 까지!

[2013년 11월 대수능 수학 영역(B형) 26번]

26. 어느 도시의 중앙공원을 이용한 경험이 있는 주민의 비율을 알아보기 위하여 이 도시의 주민 중 n명을 임의추출하여 조사한 결과 80%가 이 중앙공원을 이용한 경험이 있다고 답하였다. 이 결과를 이용하여 구한 이 도시 주민 전체의 중앙공원을 이용한 경험이 있는 주민의 비율에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $[a,\ b]$이다. $b-a=0.098$일 때, n의 값을 구하시오. (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z|\le 1.96)=0.95$로 계산한다.) [4점]

$sol.1$) 공식을 외우고 있는 경우

$$0.098=2\times1.96\times\sqrt{\frac{pq}{n}}=2\times1.96\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore\ \sqrt{n}=16\ \rightarrow\ n=256$$

$sol.2$) 공식을 안 외우고 있던 경우

중앙공원을 이용한 주민의 수 X에 대하여, 확률변수 X는 이항분포 $B\left(n,\ \frac{4}{5}\right)$를 따르고, n이 크다는 전제 하에 다시 확률변수 X는 정규분포 $N\left(\frac{4n}{5},\ \left(\frac{2\sqrt{n}}{5}\right)^2\right)$을 근사적으로 따른다고 할 수 있습니다. 이때, n과 n^2으로 평균과 분산을 각각 나누면, $\frac{X}{n}$에 관한 평균과 분산이 구하고자 하는 모비율에 관한 식이 됩니다. 이때 표본비율 $\frac{X}{n}$는 근사적으로 정규분포 $N\left(\frac{4}{5},\ \left(\frac{2}{5\sqrt{n}}\right)^2\right)$를 따른다고 할 수 있고, 이때 신뢰구간의 길이 식에 맞춰보면 $0.098=2\times1.96\times\frac{2}{5\sqrt{n}}$로 $n=256$이 나옵니다.

$sol.1$) 공식을 외우고 있는 경우

$0.224 = 2\times 1.96 \times \sqrt{\frac{pq}{n}} = 2\times 1.96 \times \frac{2}{5}\times \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\therefore\ \sqrt{n} = 7 \ \rightarrow\ n = 49$

$sol.2$) 공식을 안 외우고 있던 경우

사이트에서 리듬농구 모의평가  를 알고 있는 학생의 수 X에 대하여, 확률변수 X는 이항분포 $B\left(n, \frac{4}{5}\right)$를 따르고, n이 크다는 전제 하에 다시 확률변수 X는 정규분포 $N\left(\frac{n}{5}, \left(\frac{2\sqrt{n}}{5}\right)^2\right)$을 근사적으로 따른다고 할 수 있습니다. 이때, n과 n^2으로 평균과 분산을 각각 나누면, $\frac{X}{n}$에 관한 평균과 분산이 구하고자 하는 모비율에 관한 식이 됩니다. 이때 표본비율 $\frac{X}{n}$는 근사적으로 정규분포 $N\left(\frac{1}{5}, \left(\frac{2}{5\sqrt{n}}\right)^2\right)$를 따른다고 할 수 있고, 이때 신뢰구간의 길이 식에 맞춰보면 $0.224 = 2\times 1.96 \times \frac{2}{5\sqrt{n}}$로 $n = 49$가 나옵니다.

13. [부분 분수 처리]

sol)

일반항을 구하는 과정에 뚫어둔 빈칸을 채우길 요구하는 전형적인 문제입니다. 그런데 점화식 특성상 치환과 부분 분수 처리로 일반항을 이끌어 낼 수밖에 없고, 스윽 보니 증명 과정도 그것을 따르고 있네요. 그러니까, 속편하게 증명 과정이 없다 하고 쌩으로 유도해보도록 합시다! 증명 과정을 따라가려면 사이사이에 생략된 행간까지 추론해야 하니까요.

우선 주어진 점화식의 양변을 $n^2(n+1)^2$으로 나누면

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{a_n}{n^2} = \frac{1}{n^2-1}\ (n \ge 2)$$

그리고 $b_n = \frac{a_n}{n^2}\ (n\ge 2)$라 치환하면 $(b_1 =)b_2 = 1$이고,

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)\ (n\ge 2)$$

양변에 $n \Rightarrow 2, 3, \cdots, n-2, n-1$을 대입하여 변변 더하면

$$b_n - b_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \cdots (*)$$

즉,

$$b_n = \frac{7}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right)\ (n \ge k)$$

이므로 다시 기존 수열 a_n의 꼴로 바꾸면

$$a_n = n^2\left\{\frac{7}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right)\right\}\ (n\ge k)$$

여기서 (*)식을 관찰했을 때 $n \ge k$의 k값으로 2, 3 중에 무엇이 되어야 하는지가 관건입니다. 이제부터가 기출 문제들에 주구장창 등장했던 점화식들과는 차별되는 까다로운 부분이죠.

$n \ge 2$이면 양변에 $n \Rightarrow 2, 3, \cdots, 2-2, 2-1$, 즉 $n \Rightarrow 2, 1$을 대입한다는 것이니 모순입니다. (첨수가 되는 수열은 증가하여야 함) 연속한 세 항의 처음 항과 마지막 항 부분에서 상쇄가 되는 양상에 위배가 되기도 하구요.

$n \ge 3$이면 양변에 $n \Rightarrow 2, \cdots, 3-2, 3-1$ 즉, $n \Rightarrow 2$을 대입한다는 것이니 다음과 같이 잘 성립합니다.

$$b_2 - b_2 = 0 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) \cdots (*)$$

$n \ge 4$이면, $n \ge 3$임이 성립하므로 자명하게 성립합니다.

그래서 $k = 3$이라 가정하고,

$$b_n = \frac{7}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right)\ (n\ge 3)$$

이라 하면, $b_2 = 1$로 $n = 2$일 때도 성립하므로

$$b_n = \frac{7}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right)\ (n\ge 2)$$

라 할 수 있습니다.

그러면 $f(5) = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{9}{20}$이고,

$g(4) = 16\left\{\frac{7}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right)\right\} = 16\left(\frac{7}{4} - \frac{7}{24}\right) = \frac{70}{3}$이므로

$2f(5)g(4) = 2\cdot\frac{9}{20}\cdot\frac{70}{3} = 21$이 답이 되네요.

14. [회전변환]

sol)

$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$라 하면 $A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$이고,

$A^{16} = E$로부터 $\cos 16\theta = 1, \sin 16\theta = 0$임을 알 수 있습니다. 그러면

$16\theta = 2n\pi \ \rightarrow\ \theta = \frac{n}{8}\pi$와 $0 \le \theta \le 3\pi$에서

$0 + \frac{\pi}{8} + \frac{2\pi}{8} + \cdots + \frac{24\pi}{8} = \frac{\pi}{8}\cdot\frac{24\cdot 25}{2} = \frac{75}{2}\pi$ 가 답이 됩니다.

15. [행렬 퍼즐]

sol)

ㄱ. $B = A^2 - E$로 A(또는 B) 행렬을 B(또는 A) 행렬과 단위행렬만으로 나타낼 수 있으니 마치 통과하는 것처럼 보이죠!

$$AB = A(A^2 - E) = A^3 - A = (A^2 - E)A = BA$$

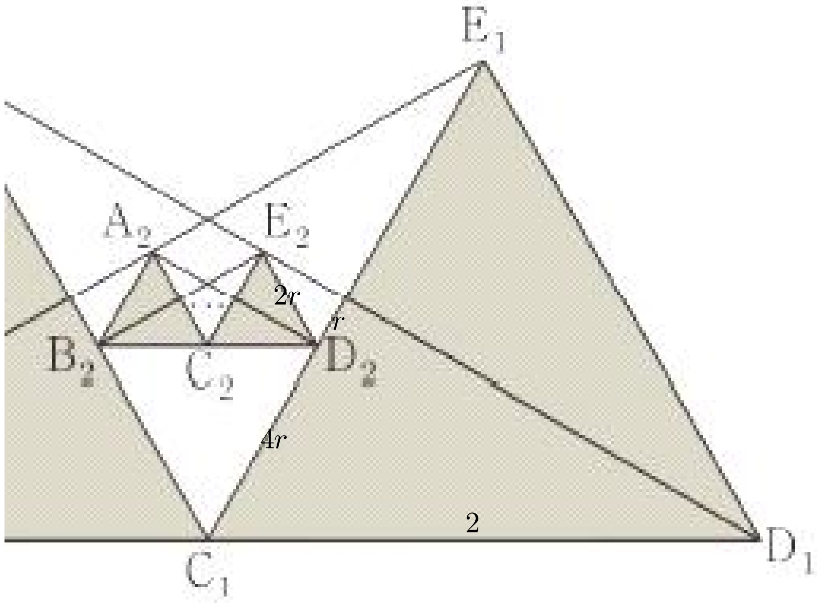
따라서 ㄱ은 참입니다.

ㄴ. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = A^2 + B$이고, $A^2 - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이니 $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$가 되어 거짓.

ㄷ. $(A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\frac{3}{2} - \frac{1}{4}}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$에서 $(1, 2)$ 성분은 $\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{5}$가 되어 참입니다. 따라서 답은 ㄱ, ㄷ이네요.

16. [보물 찾기(X) → 보조선 찾기(O)]

sol)



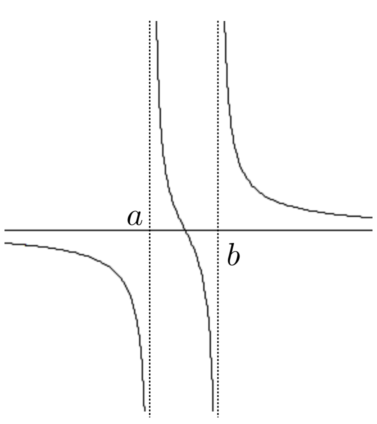
딱히 보조선 그을 것도 없이 바로 보이네요. $1:2:\sqrt{3}$ 길이비의 특수각으로 도배되어 있는 삼각형들 속에서 $5r=1$을 알 수 있고, 닮음비는 정삼각형 하나의 길이비로 $2:2r=1:r$이니 실질적인 공비는 닮음비를 제곱하면 되겠죠? 따라서, 초항과 공비를 다 구한 셈이니 식을 세워 답을 구해내면

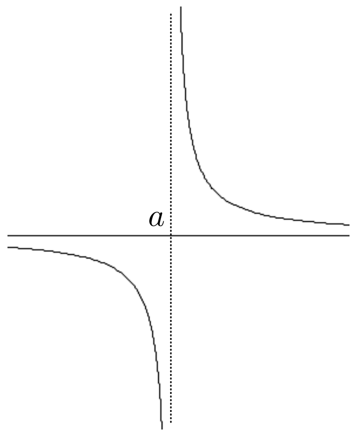
$$\therefore \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2^2\right)\times 2}{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{25}{24}\cdot 2\sqrt{3}=\frac{25}{12}\sqrt{3}$$

17. [기하학적 해법 vs 대수적 해법]

$sol.1$) 그래프 그리기

$y=\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}$의 그래프는 $a\neq b$(편의상 $a<b$)와 $a=b$의 두 경우에 대하여 두 가지 개형이 가능합니다.





그리고 실근이 10으로 유일하게 존재할 수 있는 경우는 후자이고, $\dfrac{2}{10-a}=2$에서 $a=b=9$이므로 답은 18이 됩니다.

$sol.2$) 수식만을 이용한 풀이

준 식 $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}=2$의 양변에 분모의 최소공배수를 곱하여 동치변형을 하면

$$2x-a-b=2\{x^2-(a+b)x+ab\}\ \ (x\neq a,b)$$

$$2x^2-2(a+b+1)x+2ab+a+b=0\ \ (x\neq a,b)$$

그리고 오직 하나의 실근 $x=10$을 가지려면 이차방정식이 중근을 갖거나, 두 실근을 갖는데, 하나가 무연근인 경우 밖에 없습니다. 이를 판단하기 위해 $x=10$을 직접 대입하기 전에 판별식을 보면(이게 더 간단하게 보이니까)

$$D/4=(a+b+1)^2-2(2ab+a+b)=(a-b)^2+1>0$$

로 이차방정식이 중근을 가질 수는 없습니다.

따라서, 만약 이차방정식이 $x=a$를 무연근으로, $x=10$을 근으로 갖는다면 근과 계수와의 관계에 의하여

두 근의 합에서 $a+b+1=a+10\ \rightarrow\ b=9$를

두 근의 곱에서 $\dfrac{2ab+a+b}{2}=10a\ \rightarrow\ \dfrac{19a+9}{2}=10a\ \rightarrow\ a=9$를

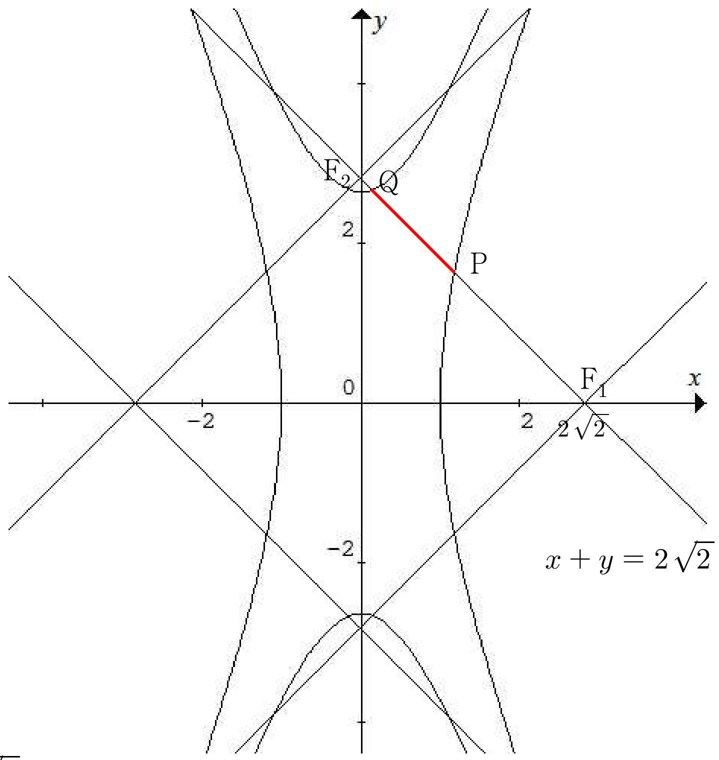
얻게 되어 마찬가지로 $a+b=18$이 답이 됩니다. 이 경우는 이차방정식이

$$2(x^2-19x+90)=2(x-9)(x-10)=0\ \ (x\neq 9)$$

가 되군요.

18. [계산계산계산]

sol)



$x+y=2\sqrt{2}$의 기울기가 -1이기 때문에 두 점 P,Q의 x좌표의 차이에 $\sqrt{2}$를 곱해주면 $\overline{\mathrm{PQ}}$가 나오겠네요. 그러니 $x+y=2\sqrt{2}$와 $x^2-\dfrac{y^2}{7}=\pm 1$을 각각 연립하면

$6x^2+4\sqrt{2}x-15=0\ \rightarrow\ x_{\mathrm{P}}=\dfrac{-2\sqrt{2}+\sqrt{98}}{6}$

$6x^2+4\sqrt{2}x-1=0\ \rightarrow\ x_{\mathrm{Q}}=\dfrac{-2\sqrt{2}+\sqrt{14}}{6}$

가 되어 $\overline{\mathrm{PQ}}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=x_{\mathrm{P}}-x_{\mathrm{Q}}=\dfrac{\sqrt{98}-\sqrt{14}}{6}$의 관계에서

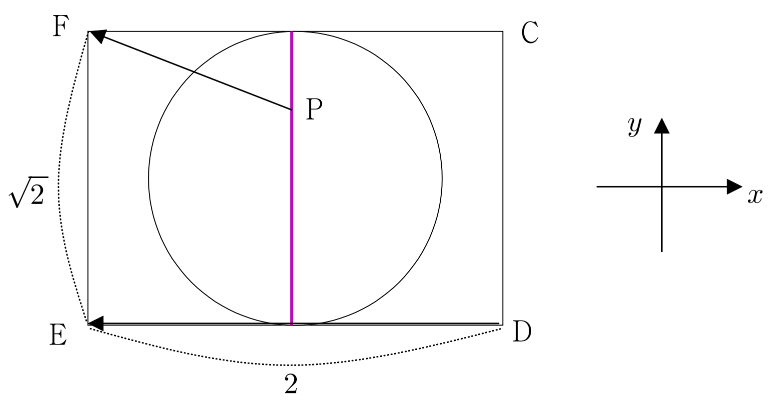
$\overline{\mathrm{PQ}}=\dfrac{14-2\sqrt{7}}{6}=\dfrac{7-\sqrt{7}}{3}$가 나옵니다. 물론 이것 말고도 다양한 풀이들이 존재하고, 그 중에는 분명 얼마든지 이것보다 빠른 풀이도 있을겁니다!

※ 리듬농구님은 쌍곡선의 정의를 이용한 풀이를 의도하셨다 합니다.

19. [보는 것은 2D, 이해하는 것은 3D]

sol)

평면 FEDC 로 자른 단면을 살펴봅시다. (자른 후 또 돌려서 봐야 합니다.)

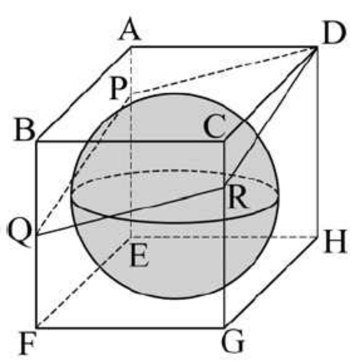


정육면체의 절단면이 항상 정사각형이 아닙니다! 그리고 절단한 평면에서의 적당한 직교좌표를 생각해보면 $\overrightarrow{DE}=(-2,0)$ 인 반면 $\overrightarrow{PF}=(a,b)$ 로 b가 얼마든지 상관없이 $\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{DE}=-2a=2$ 에서 $a=-1$임을 알 수 있습니다. 따라서, 점 P 의 위치는 위 그림에서와 같은 위치에 있어야 하고, 이는 선분처럼 보이지만 사실 평면 ABGH 와 구의 교원입니다. 그러면 해당하는 원의 넓이는 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\pi=\frac{\pi}{2}$ 가 됩니다.

※ 굳이 좌표 안 잡아도 되는데, 혹시나 하는 마음에 여러분들의 이해를 돕기 위해 잡은 것이니 직관적으로 바로 점 P 의 위치가 보이시면 이 풀이에 얽매일 필요 없이 그렇게 푸시면 됩니다.

[2005년 10월 교육청 수리(가형) 15번] - 단면화

15. 그림과 같이 한 변의 길이가 12 인 정육면체 ABCD−EFGH 에 내접하는 구가 있다. 변 AE, CG 를 1 : 3 으로 내분하는 점을 각각 P, R 라 하고 변 BF 의 중점을 Q 라 한다. 네 점 D, P, Q, R 를 지나는 평면으로 내접하는 구를 자를 때 생기는 원의 넓이는? [4점]

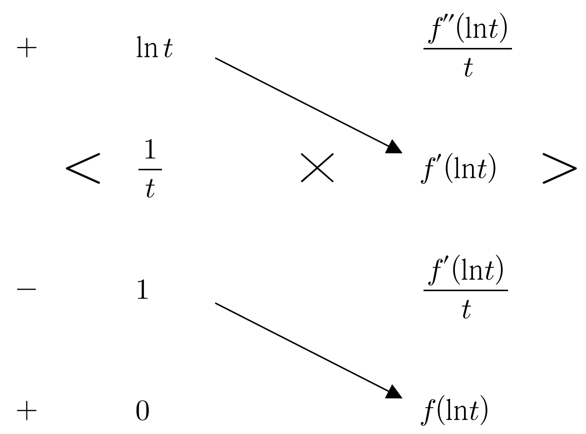


① 26π
② 28π
③ 30π
④ 32π
⑤ 34π

20. [도표 적분법]

sol)

준 식을 보니 합성함수와 부분적분을 섞어둔 것 같고 나중에 쓰일지도 모르니 $(f(\ln x))'=\frac{1}{x}f'(\ln x)$와 $(f'(\ln x))'=\frac{1}{x}f''(\ln x)$ 정도는 미리 써두겠습니다. 그리고 도표 적분법을 이용하려면, 가령 $\int x\ln x\,dx$ 를 계산할 때처럼 미분하는 쪽과 적분하는 쪽을 그대로 미분과 적분만 하기만 하면 안 되고, 어떤 기교가 필요합니다.

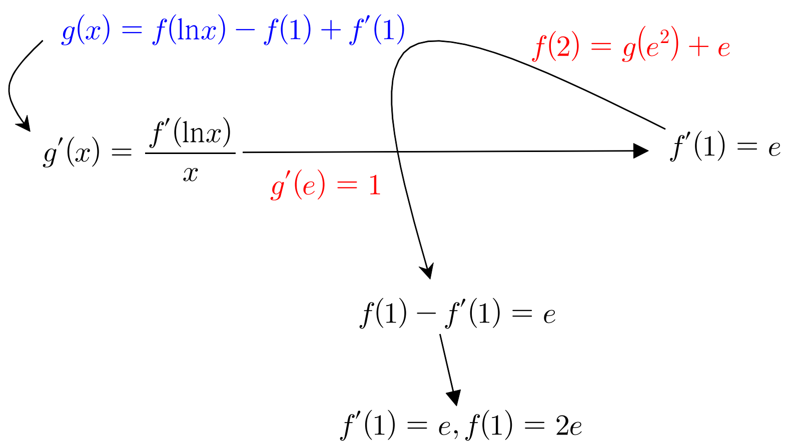


그러면

$$f'(\ln x)\ln x=g(x)+[f'(\ln t)\ln t]_e^x-[f(\ln t)]_e^x$$

$$=g(x)+f'(\ln x)\ln x-f'(1)-f(\ln x)+f(1)$$

에서 $g(x)=f(\ln x)-f(1)+f'(1)$과 $g'(x)=\frac{f'(\ln x)}{x}$ 를 얻고, 문제에서 제시한 $g'(e)=1,\ f(2)=g(e^2)+e$를 추가로 이용하여 $f(1)f'(1)$을 구하면 되겠네요.



복잡하게 흩뿌려진 수치 관계들 속에서 건져낸 답은 $f(1)f'(1)=2e^2$ 입니다.

21. [개형만 그릴 수 있다면]

sol)

상황이 얼마나 복잡하든지 간에 극값이 존재하기 위한 필요충분조건은 불연속이어도 좋으니 도함수의 부호 변화가 일어나야 한다는 것입니다.

$$f'(x)=n(\ln x)^{n-1}\cdot\frac{1}{x}-tn\cdot x^{n-1}=\frac{n}{x}\{(\ln x)^{n-1}-tx^n\}$$

에서 부호변화를 일으킬 수 있는 부분을 $g(x)=(\ln x)^{n-1}-tx^n$라 하면 $g(x)$가 주어진 정의역에서 연속함수이고, 연속함수가 적어도 세 번 부호 변화가 일어나야 하는 상황이므로 중간값의 정리에 의하여 서로 다른 세 양근을 가져야 합니다. 이대로는 관찰하기 힘드니 근은 보존한 채 그래프 개형을 다루기 쉽도록 변형해보면

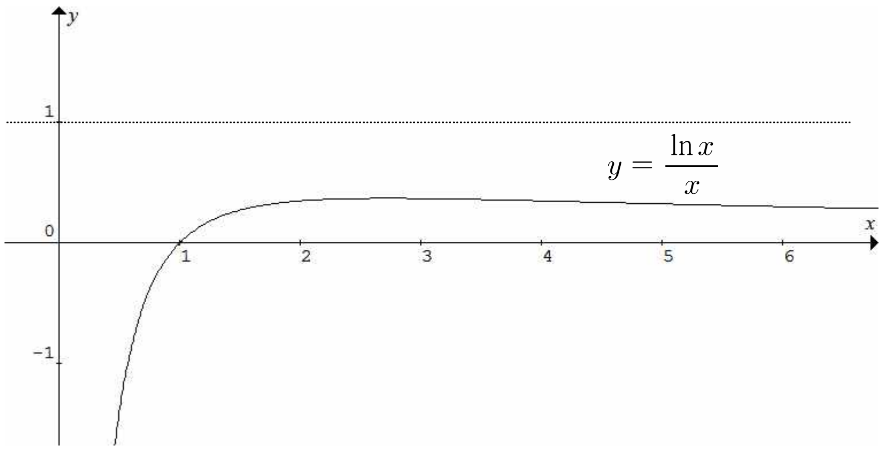
$$g(x)=(\ln x)^{n-1}-tx^n=0\ \rightarrow\ (\ln x)^{n-1}=tx^n\ \rightarrow\ \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{n-1}=tx$$

로 곡선 $y=\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{n-1}$ 그래프와 직선 $y=tx$ 그래프의 교점 관계로 해석하면 되겠네요. 그런데 $y=\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{n-1}$ 는 한 번에 그리기 힘드니까

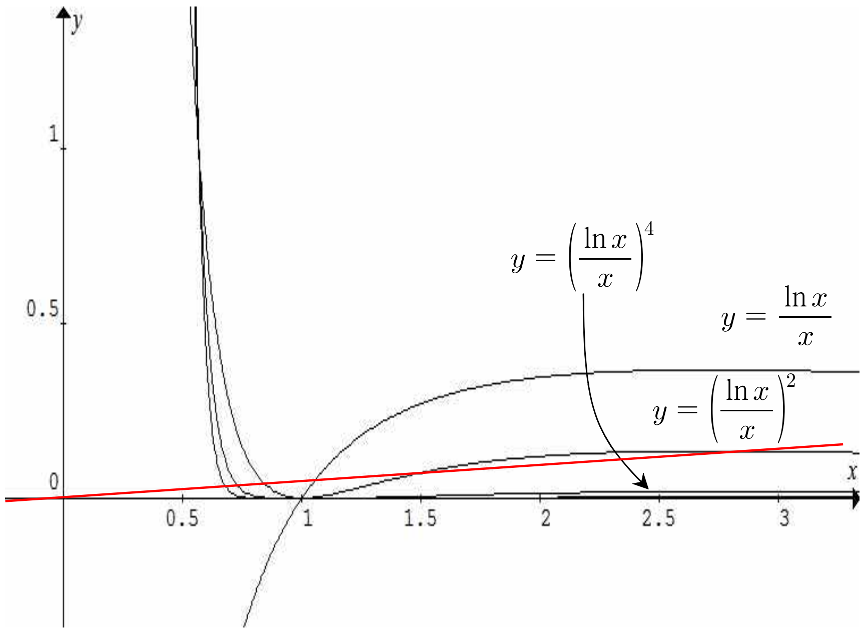
$y=\dfrac{\ln x}{x}$ 를 그린 다음 $(n-1)$제곱 하도록 하겠습니다.

$$y=\frac{\ln x}{x}=x^{-1}\ln x \rightarrow y'=x^{-2}(1-\ln x)$$

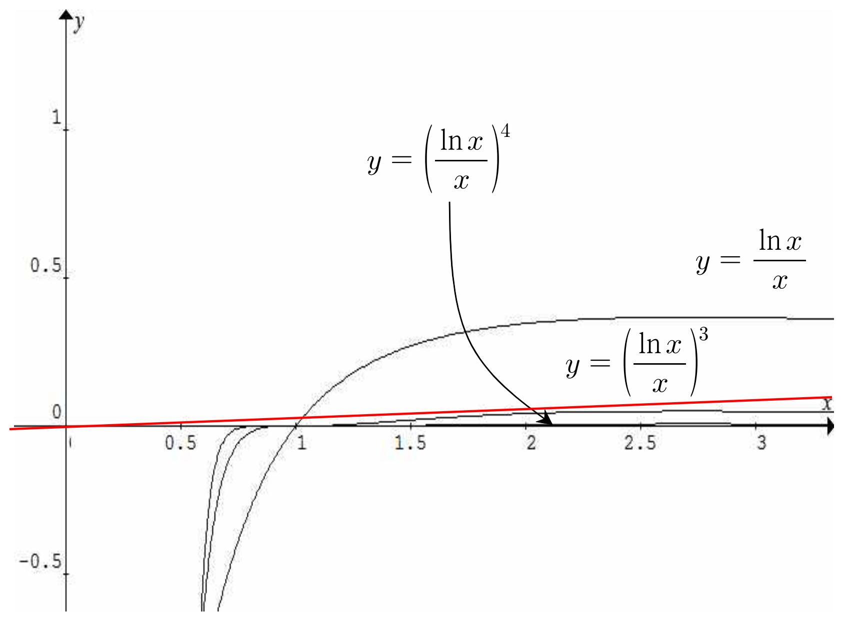
이고 $x\rightarrow\infty$와 $x\rightarrow+0$로부터 x, y축을 각각 점근선으로 가짐에 주의해서



위와 같이 생겼음을 알 수 있습니다. 여러분들 이미 이 개형은 외우고 계시죠^^? 그리고 이제 이걸 $(n-1)$제곱 합시다. 그러면 $n=1, 3, 5, \cdots$ 의 경우는 다음과 같으므로 $n=1$를 제외한 $n=3, 5, \cdots, 99$의 경우에는 어떤 양수 t가 존재해서 $y=tx$와 서로 다른 세 양근을 갖게 되어 주어진 조건을 만족합니다.



또 $n=2, 4, 6, \cdots$ 의 경우는 아래와 같고 기껏해야 $y=tx$와 서로 다른 두 양근을 가질 수 밖에 없기에 주어진 조건을 만족할 수가 없습니다.



고로 만족하는 100이하 자연수 n의 개수는 $50-1=49$입니다.

22. [다시 방심하세요]

sol)

$$\therefore \lim_{x\rightarrow0}\frac{(e^{10x}-1)-\sin 2x}{x}=10-2=8$$

23. [다시 방심하세요]

sol)

$y'=3x^2-2$이므로 접선은 $y+1=1\cdot(x-1)$입니다. 그리고 이 접선이 점 $(a, 13)$을 지나므로 $14=a-1 \rightarrow a=15$가 답이네요.

24. [Counting]

$sol.1$) **중복조합**

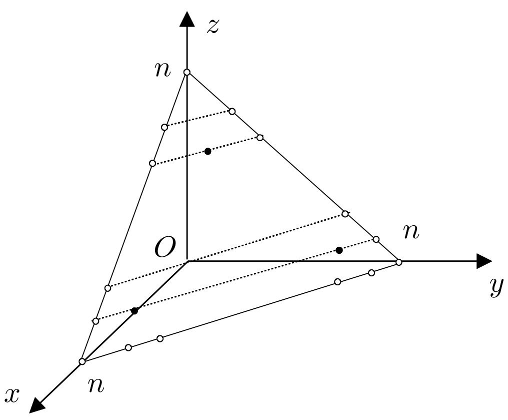
점 P의 좌표가 모두 자연수이므로 그대로 ${}_3H_n$ 해버리면 좌표가 0인 경우가 발생하므로 각 좌표성분에 -1 씩 미리 고려해준 다음 중복조합 식을 세우면

$${}_3H_{n-3}={}_{n-1}C_{n-3}={}_{n-1}C_2=\frac{(n-1)(n-2)}{2}=\frac{10\cdot9}{2}$$

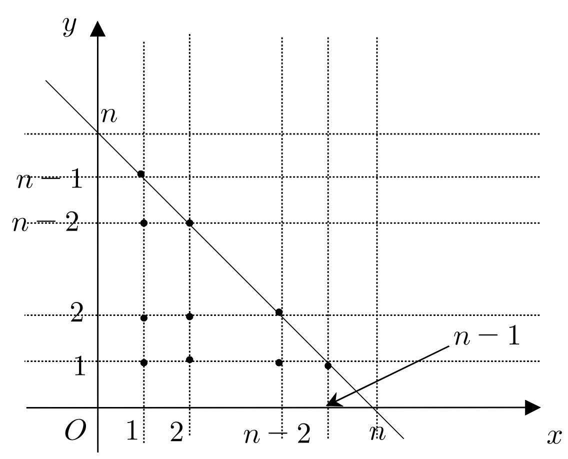
에서 $n=11$

$sol.2$) **공간도형과 공간좌표**

$x+y+z=n$을 $\dfrac{x}{n}+\dfrac{y}{n}+\dfrac{z}{n}=1$으로 보면 다음과 같은 평면 상에서 격자점 개수를 헤아리는 문제로 환원됩니다.



그리고 해당하는 격자점들을 모두 xy평면으로 정사영 내린 다음 개수를 헤아려도 됩니다. 평행이동 한다 해서 점의 개수가 변하지 않으니까요!



그러면 $1+2+\cdots+(n-2)=45$에서 $n=11$이 됩니다.

25. [계차]

sol)

$\{b_n\}$: b_1, b_2, b_3, $\cdots$
$\{a_n\}$: a, $2a$, $4a$, $\cdots$
라 두면 $b_3 = b_2 + 2a = 2a + 2b_2 \rightarrow b_2 = 0$이 되어
$\{b_n\}$: $-a$, 0, $2a$, $\cdots$
$\{a_n\}$: a, $2a$, $4a$, $\cdots$

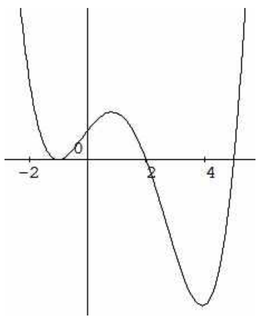
$\therefore 36 \cdot \left(\dfrac{2a}{-a}\right)^2 = 144$

26. [사차함수 개형 추론]

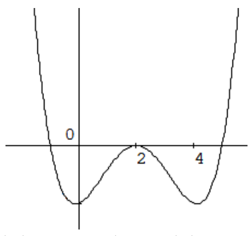
sol)

$$2f + 8 = f^2 \geq 0 \rightarrow (f-4)(f+2) = 0 \rightarrow f = 4$$

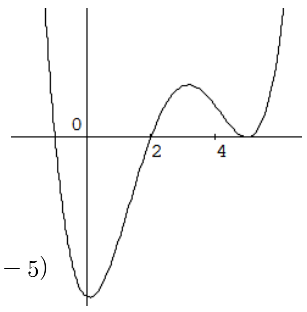
그리고 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f(x) = 2$의 실근이 $-1, 2, 5$뿐이라는 조건으로부터 $-1, 2, 5$중 하나는 중근으로 가져야 함을 추론할 수 있습니다. 만약 실근을 중근으로 갖지 않고 다른 복소근을 갖는다고 하면 실계수인 사차함수 $f(x)$가 나오지 않으므로 모순이죠. 그래서 가능한 개형을 모두 그려보면



$f(x) - 4 = (x+1)^2(x-2)(x-5)$



$f(x) - 4 = (x+1)(x-2)^2(x-5)$



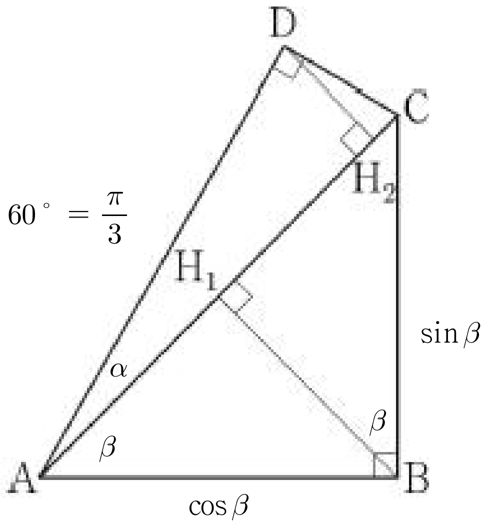
$f(x) - 4 = (x+1)(x-2)(x-5)^2$

이렇게 세 종류가 가능하고 $\dfrac{1}{f(x)-4} \leq 0$을 만족하는 자연수 x의 개수가 2개 뿐인 것은 $f(x) - 4 = (x+1)^2(x-2)(x-5)$인 경우로 $f(0) = 1 \cdot (-2) \cdot (-5) + 4 = 14$가 답이 됩니다.

27. [삼각비 처리]

sol)

$\alpha + \beta = 60^\circ = \dfrac{\pi}{3}$



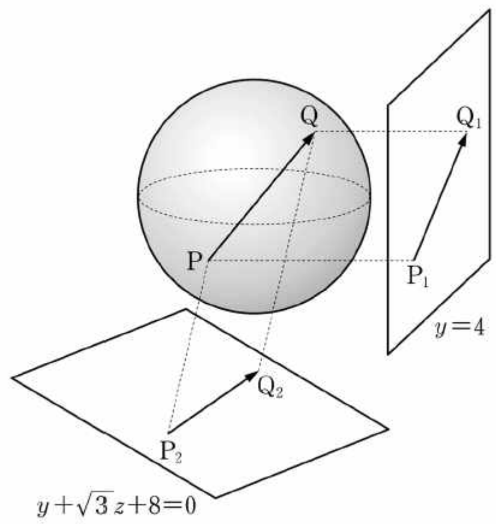
$$\begin{cases} \overline{\mathrm{CH_1}} = 1 - \cos^2\beta \\ \overline{\mathrm{CH_2}} = 1 - \cos^2\alpha \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ 2\overline{\mathrm{CH_1}} + \overline{\mathrm{CH_2}} &= 2(1-\cos^2\beta) + (1-\cos^2\alpha) \\ &= 3 - 2\cdot\frac{1+\cos2\beta}{2} - \frac{1+\cos2\alpha}{2} \\ &= \frac{3}{2} - \cos2\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) - \frac{1}{2}\cos2\alpha \\ &= \frac{3}{2} - \left(\cos\frac{2\pi}{3}\cos2\alpha + \sin\frac{2\pi}{3}\sin2\alpha\right) - \frac{1}{2}\cos2\alpha \\ &= \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin2\alpha \quad \left(0 < 2\alpha < \frac{2\pi}{3}\right) \\ &\geq \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3-\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$\therefore\ a + b = 3 + 3 = 6$

[2013년 11월 대수능 수학 영역(B형) 29번] - 삼각함수 정리

29. 좌표공간에서 구 $x^2+y^2+z^2=4$ 위를 움직이는 두 점 P, Q가 있다. 두 점 P, Q에서 평면 $y=4$에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{Q_1}$이라 하고, 평면 $y+\sqrt{3}z+8=0$에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{P_2}$, $\mathrm{Q_2}$라 하자. $2|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{P_1Q_1}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{P_2Q_2}}|^2$의 최댓값을 구하시오. [4점]



28. [문제에서 풀이의 과정을 알려주는 경우]

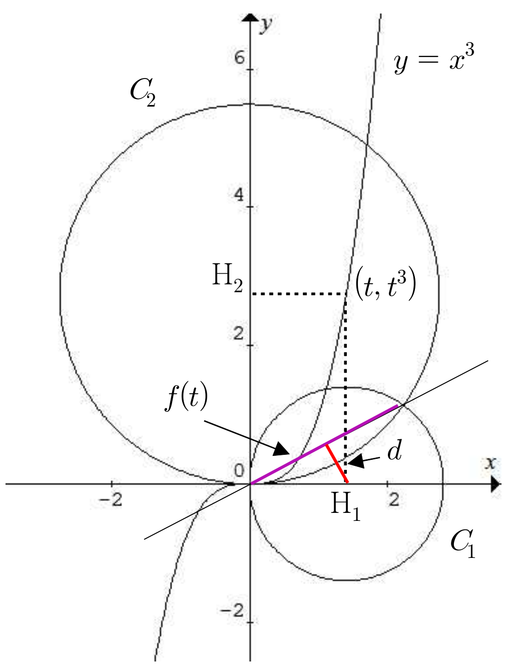
sol)

$C_1 : (x-t)^2 + y^2 = t^2$
$C_2 : x^2 + (y-t^3)^2 = t^6$에서
공통현의 방정식은 $x - t^2y = 0$
그리고 원 C_1의 중심에서 현에 이르는 거리 d는

$$d = \frac{t}{\sqrt{1+t^4}}$$

다시 피타고라스 정리에 의해

$$\begin{aligned} f(t) &= 2\sqrt{t^2 - \frac{t^2}{1+t^4}} \\ &= 2t^3(1+t^4)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$



$$\therefore \int_1^2 \frac{2t^3}{\sqrt{1+t^4}}dt = \int_2^{17}\frac{dk}{2\sqrt{k}} = \left[k^{\frac{1}{2}}\right]_2^{17} = \sqrt{17}-\sqrt{2}$$

$1+t^4 = k \rightarrow 4t^3dt = dk$

고로, $a+b = 17+2 = 19$가 정답입니다. 아니, 리듬농구님 이거 잔 계산이 너무 변태같이 많은 거 아닙니까!

[2013년 포카칩 수학 영역(B형) 1회 20번]

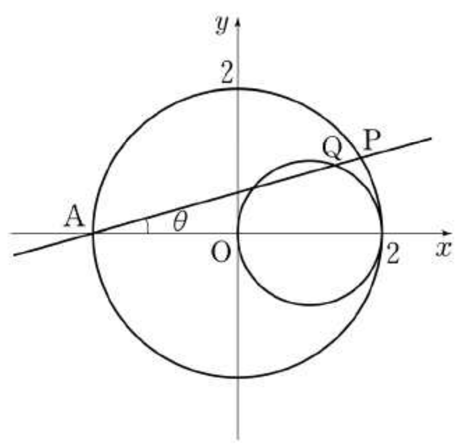
20. 곡선 $y=\frac{1}{4}x^2$ 위의 점과 점 $(0,\ t)$ 사이의 거리의 최솟값을 $f(t)$라 할 때, $\int_1^5 f(x)dx$의 값은? [4점]

① $\frac{61}{6}$ ② $\frac{31}{3}$ ③ $\frac{21}{2}$ ④ $\frac{32}{3}$ ⑤ $\frac{65}{6}$

29. [ctrl + c / ctrl + v]

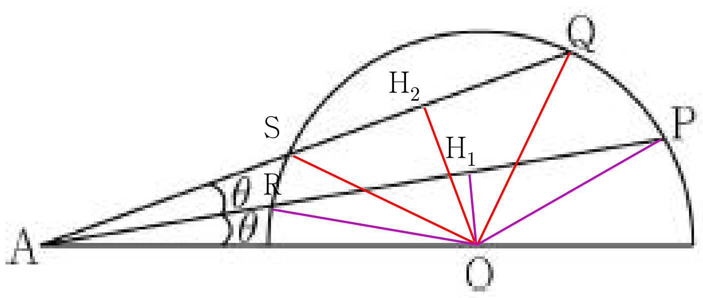
[2012년 09월 평가원 수리(가형) 20번]

20. 그림과 같이 점 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$과 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 P에 대하여 직선 AP가 원 $(x-1)^2+y^2=1$과 두 점에서 만날 때 두 점 중에서 점 P에 가까운 점을 Q라 하자. $\angle\mathrm{OAP}=\theta$라 할 때, $\lim_{\theta\to+0}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\theta^2}$의 값은? [4점]

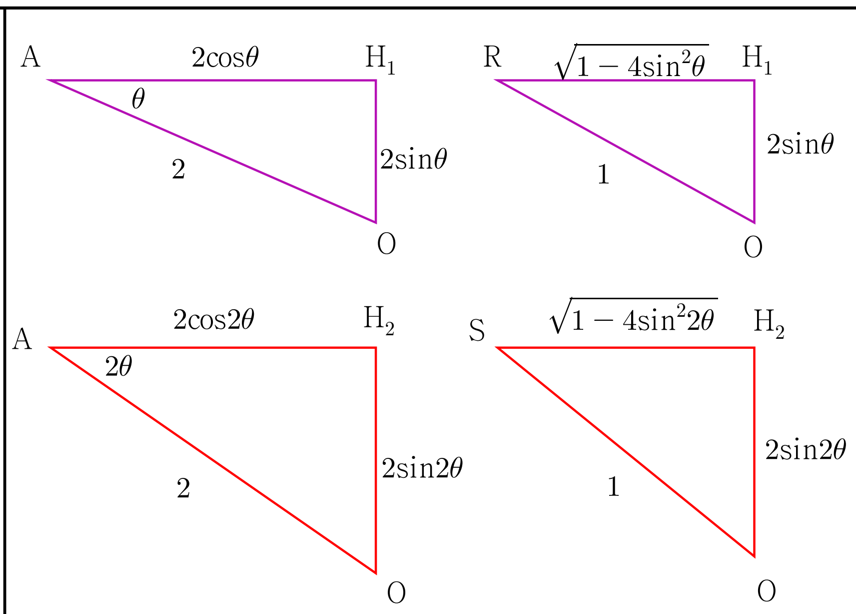


① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

sol.1) 우리에게 근사는 사치다



차분하게 보조선 그어서 직각삼각형을 찾은 다음 각각의 길이 성분을 구하고서 시키는 대로 극한값을 계산하면 됩니다. 계산 분량이 제법 많겠네요!(하지만 우리에겐 난짱극이 있죠!)



$\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{AH_1}} + \overline{\mathrm{H_1R}} = 2\cos\theta + \sqrt{1-4\sin^2\theta}$

$\overline{\mathrm{AQ}} = \overline{\mathrm{AH_2}} + \overline{\mathrm{H_2S}} = 2\cos2\theta + \sqrt{1-4\sin^2 2\theta}$

$$\frac{\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{AQ}}}{\theta^2} = \frac{2(\cos\theta-\cos2\theta)+\left(\sqrt{1-4\sin^2\theta}-\sqrt{1-4\sin^2 2\theta}\right)}{\theta^2}$$

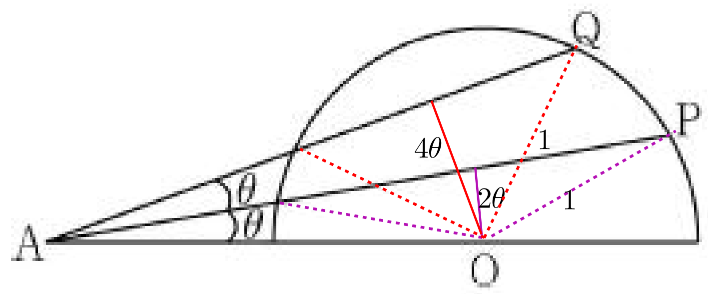
$$\lim_{\theta\to+0}\frac{2(\cos\theta-\cos2\theta)}{\theta^2} = \lim_{\theta\to+0}\frac{2\{(1-\cos2\theta)-(1-\cos\theta)\}}{\theta^2} = 3$$

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\sqrt{1-4\sin^2\theta}-\sqrt{1-4\sin^2 2\theta}}{\theta^2}$$

$$= \lim_{\theta\to+0}\frac{(1-4\sin^2\theta)-(1-4\sin^2 2\theta)}{\theta^2\left(\sqrt{1-4\sin^2\theta}+\sqrt{1-4\sin^2 2\theta}\right)} = \boxed{6}$$

이므로 $\lim_{\theta\to+0}\frac{\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{AQ}}}{\theta^2} = 3+6 = 9$가 정답입니다.

sol.2) 난짱극



$\overline{\mathrm{AP}} \simeq 2\cos\theta + \sqrt{1-4\theta^2} \simeq 2\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right)+1-2\theta^2 = 3-3\theta^2$

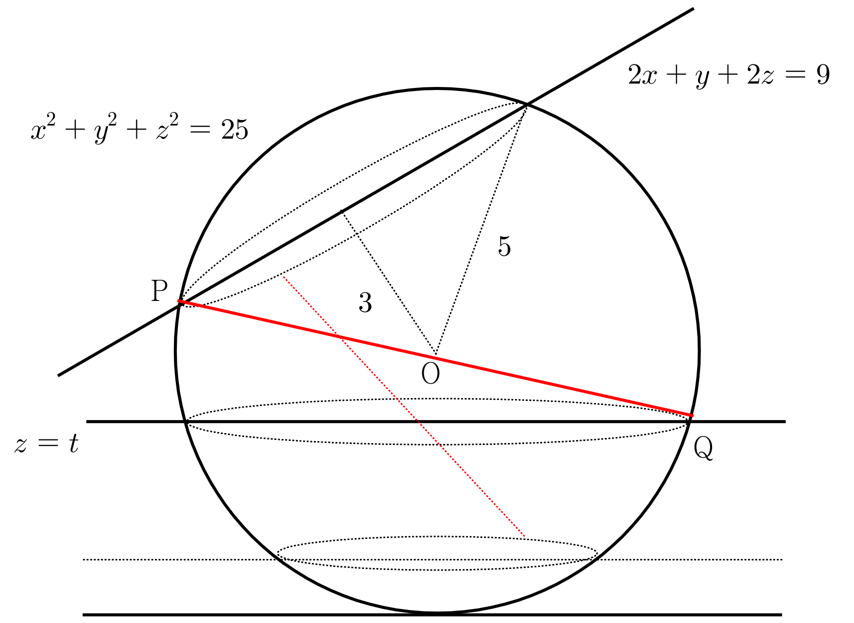
$\overline{\mathrm{AQ}} \simeq 2\cos2\theta + \sqrt{1-16\theta^2} \simeq 2(1-2\theta^2)+1-8\theta^2 = 3-12\theta^2$

$\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{AQ}} \simeq 9\theta^2$이므로 답은 9입니다.

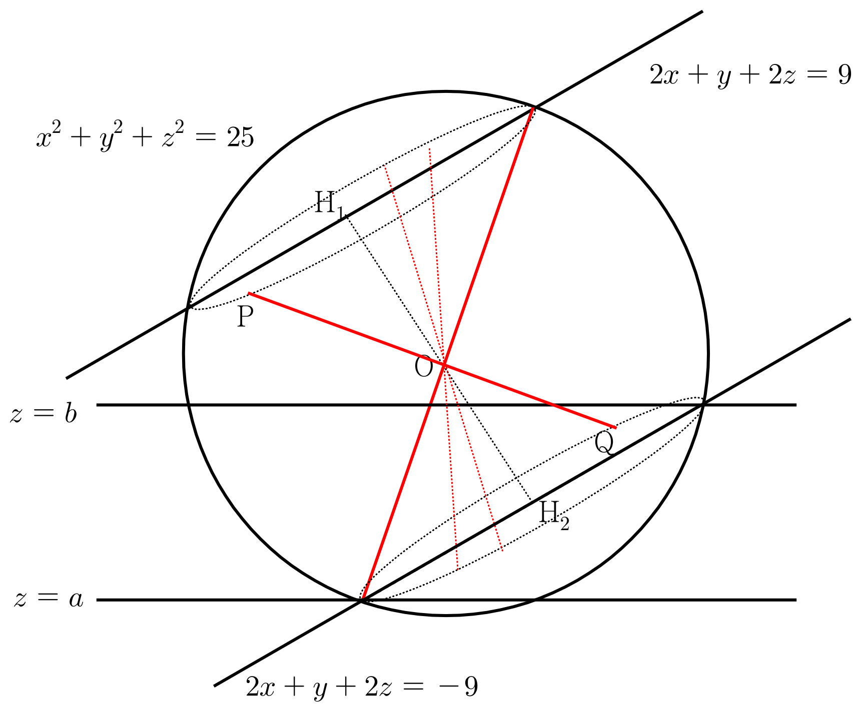
30. [구면에서의 직선 거리]

sol)

공간에서 구 $x^2+y^2+z^2=25$와 평면 $2x+y+2z=9$의 위치관계를 파악하기 위해서 구의 중심에서 평면에 이르는 거리를 구해봤더니 $\frac{9}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=3$으로 구의 반지름 5보다 작네요. (여기서 3 : 4 : 5 닮음비는 나중에 등장할 a, b 계산에 쓰임) 이를 단면화 해서 보면



그런데 구 위의 두 점 P, Q간 거리의 최댓값은 구의 지름 양 끝에 올 때이고, 따라서 다음과 같을 때 주어진 조건을 만족합니다.



이때 $\overline{PQ}$를 최대로 유지하도록 점 P를 원점 O에 대칭시킨 점의 자취에 해당하는 것은 평면 $2x+y+2z=9$를 원점에 대칭시킨 $2x+y+2z=-9$와 구 $x^2+y^2+z^2=25$의 교원에 해당합니다. 그리고 원점에서 두 평면에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하였을 때 H_2의 z좌표가 a, b의 평균에 해당합니다. 따라서, H_2의 좌표를 구해보면, $\overrightarrow{OH_2}=(2t, t, 2t)$에서 $H_2=(2t, t, 2t)$이고, 평면 $2x+y+2z=-9$에 대입하면 $H_2=(-2, -1, -2)$가 되어 $\frac{a+b}{2}=-2 \rightarrow k=-4$이고 $k+10=6$이 최종 답이 됩니다.

[2005년 09월 평가원 수리(가형) 12번]

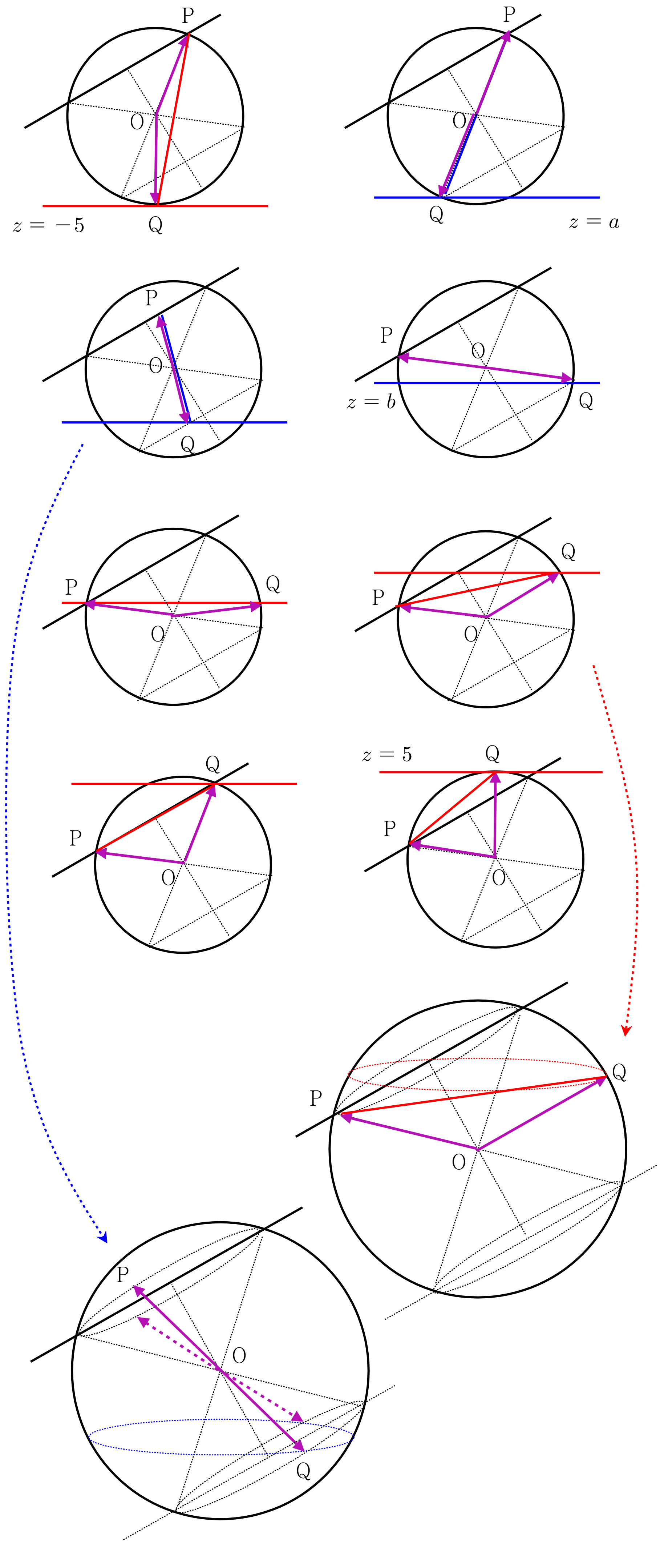
12. 평면 α와 구 $C: x^2+y^2+z^2-2x+2y+2z-3=0$이 점 A$(2, 0, -3)$에서 접할 때, 평면 α에 평행하고 구 C와 접하는 평면의 방정식은? [3점]

① $x+y+2z=0$ ② $x+y-2z+4=0$
③ $x+y-2z=0$ ④ $x-y+z+1=0$
⑤ $x-y-z-1=0$

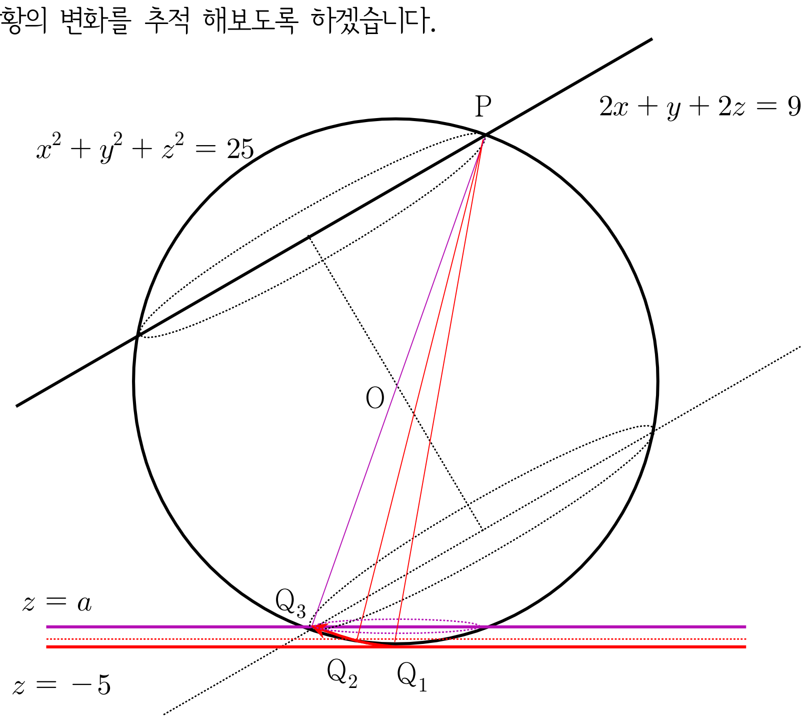
이제 $f(t)$ $(-5 \le t \le t)$를 조금 더 분석 합시다. 이때 $\overline{PQ}$의 최댓값을 구하기 위해 $|\overline{PQ}|=|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}|$에서 양변 제곱해보면

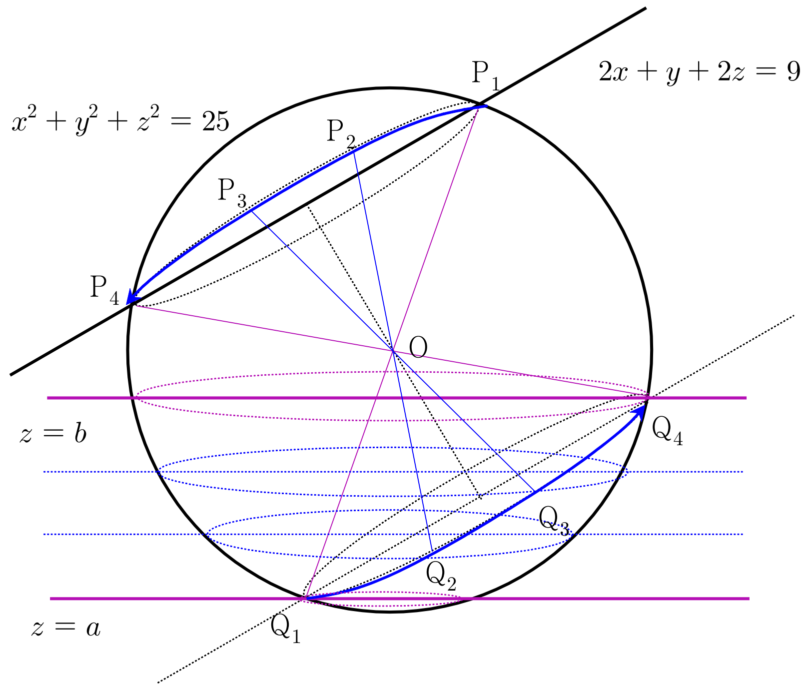
$$|\overline{PQ}|^2=|\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}|^2=|\overrightarrow{OQ}|^2+|\overrightarrow{OP}|^2-2|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|\cos\theta$$

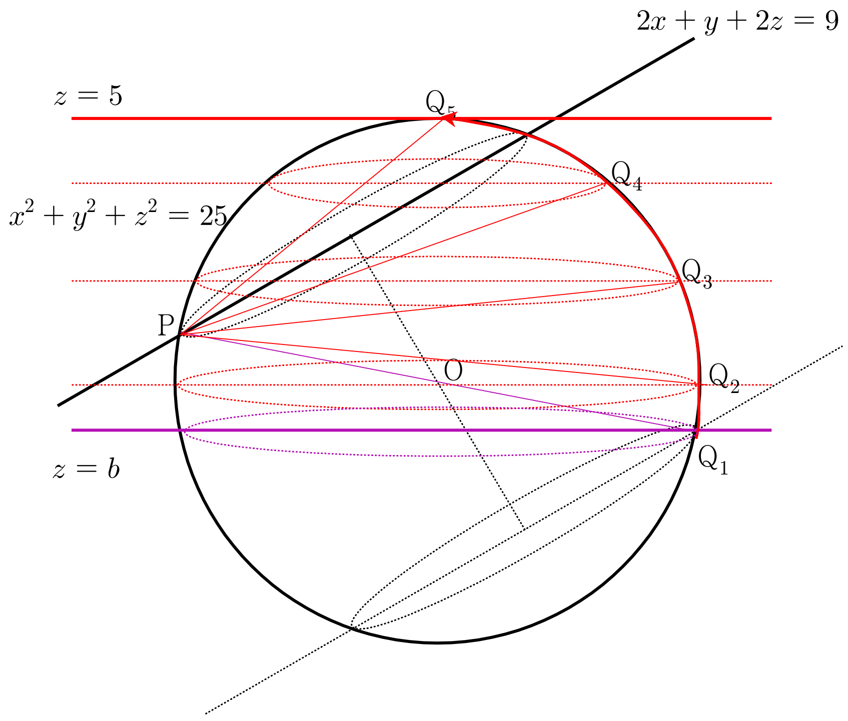
가 되고 $\overline{OP}=\overline{OQ}=5$로 일정하므로 $\cos\theta$가 최소가 되어야 $\overline{PQ}$가 최대가 되네요! 그런데 코사인 함수는 구간 $[0, \pi]$에서 감소함수이므로 결국 $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$가 이루는 사잇각 θ가 클수록 $\overline{PQ}$ 역시 큰 값을 갖게 되겠죠?



이번에는 $z=t\ (-5 \le t \le 5)$에서 t값의 증가에 따른 $\overline{\mathrm{PQ}}$ 최댓값 상황의 변화를 추적 해보도록 하겠습니다.

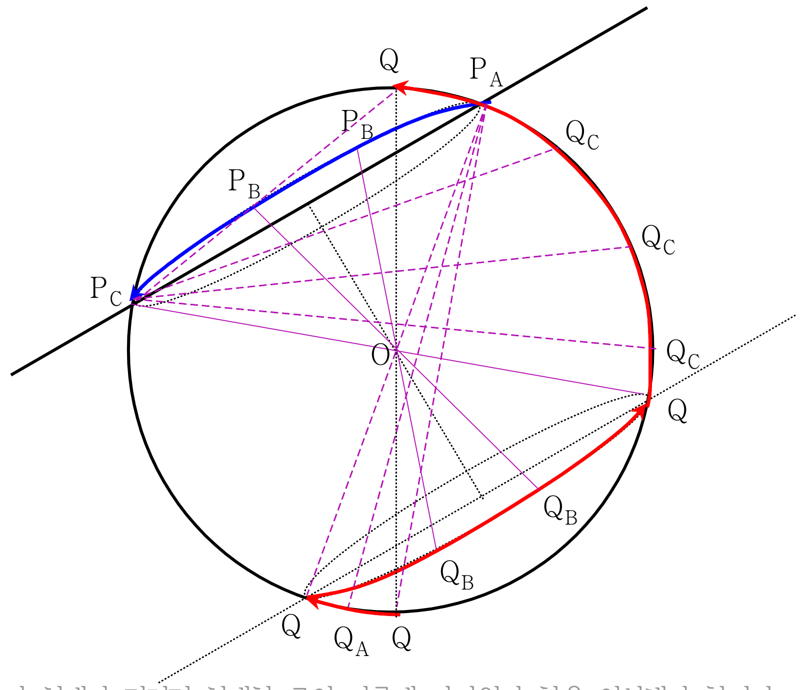






어떻게 이런 사고가 가능한가에 대해 궁금하신 분은 다음 글을 참고해주세요!
공간도형과 회전 - 포카칩님 (http://cafe.naver.com/pnmath/372342)

$z=t\ (a \le t \le b)$일 때 두 점 P, Q는 구와 두 평면 각각이 이루는 교원의 반바퀴를 돌아가는데, 그림에서 제시한 방향 말고 반대쪽도 가능합니다! 암튼 이를 한 번에 나타내보자면



$\overline{\mathrm{PQ}}$가 최대가 되려면 최대한 구의 지름에 가까워야 함을 의식해야 합니다.
A 구간을 $-5 \le t \le a$라 하면 점 P는 고정된 채 점 Q만 움직이는 상황으로 하나의 평면 위에서 해결이 되고, B 구간을 $a \le t \le b$라 하면 $\overline{\mathrm{PQ}}$가 지름을 유지하면서(즉, 최댓값으로 상수) 원뿔 쌍의 일부를 그리고, C 구간을 $b \le t \le 5$라 하면 다시 점 P는 고정된 채 점 Q만 움직이는 상황으로 하나의 평면 위에서 해결이 됩니다.

※ 답은 이미 예~전에 나왔지만 $f(t)$의 개형이 궁금하신 분들을 위해 해결 전략만을 소개하고 해설을 마치겠습니다.
B 구간은 $f(t)$가 상수임이 자명한데, A, C 구간에서 $f(t)$를 그리려면 주어진 상황을 단면화 해야 합니다. 그래서 구간의 경계가 되는 a, b를 찾은 다음 구를 다시 $x^2+y^2=25$로 단면화를 적절히 합니다. a, b는 단면에서 발생하는 구 내부의 $3:4:5$ 길이비의 직각삼각형과 $\overrightarrow{\mathrm{OH}_1}$가 $z=0$ 평면과 이루는 각을 이용하여 구할 수 있습니다. (이게 복잡합니다)
A 구간에서는 점 P좌표를 고정 후 $\mathrm{Q}\left(-\sqrt{25-\mathrm{t}^2}, \mathrm{t}\right)\ (-5 \le t \le a)$라 두고 두 점간의 거리 공식에 집어 넣으면 $\overline{\mathrm{PQ}}=f(t)$가 나오고,
B 구간에서도 점 P좌표를 고정 후 $\mathrm{Q}\left(\sqrt{25-\mathrm{t}^2}, \mathrm{t}\right)\ (b \le t \le 5)$라 하면 $\overline{\mathrm{PQ}}=f(t)$를 구할 수 있습니다.
물론 이때의 $\overline{\mathrm{PQ}}=f(t)$는 최댓값이 구의 지름 길이를 넘지 못합니다.