제 2 교시

# 수학 영역(B형)

| 성명 | | 수험 번호 | | | | | – | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

**1.** $8^{\frac{2}{3}} \times \log_9 3$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

**2.** 이차정사각행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$에 대해, $(A-E)^2$ 의 모든 성분의 합은? [2점]

① $-4$ ② $-2$ ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

**3.** 확률변수 $X$가 이항분포 $B(n,\ \frac{1}{4})$를 따르고 $X$의 분산이 30일 때, 자연수 $n$의 값은? [2점]

① 120 ② 140 ③ 160 ④ 180 ⑤ 200

**4.** 무리방정식 $\sqrt{x^2+2x+2}+x^2+2x=4$ 의 모든 실근의 합은? [3점]

① $-2$ ② $-4$ ③ $-6$
④ $-8$ ⑤ $-10$

**5.** $\tan 2\theta = \frac{3}{4}$일 때, $\sin\theta$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [3점]

① $\frac{\sqrt{6}}{10}$ ② $\frac{\sqrt{7}}{10}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{5}$ ④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{\sqrt{10}}{10}$

**6.** 함수 $f(x) = \sin(\pi\cos x)$에 대해 $f'(k) = 0$을 만족시키는 모든 실수 $k$의 값들의 합은? (단, $0 < k \le \pi$) [3점]

① $\pi$ ② $\frac{3\pi}{2}$ ③ $2\pi$ ④ $\frac{5\pi}{2}$ ⑤ $3\pi$

**7.** 좌표평면 위의 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 위의 한 점 $A$와 원점 $O$에 대해 $\overline{OA} = 3$이다. 점 $A$가 제 1사분면 위에 있을 때, 점 $A$의 $y$좌표는? [3점]

① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 2

**8.** 모양과 크기가 같은 사탕 9개를 서로 다른 3개의 상자에 나누어 담으려 한다. 빈 상자가 있어도 될 때, 사탕을 나누어 담는 경우의 수는? [3점]

① 46 ② 49 ③ 52 ④ 55 ⑤ 58

**9.** 좌표공간 위의 네 점 $A$, $B$, $C$, $D$ 는 다음과 같은 조건을 만족시킨다.

> 가. $\overline{AB}=5$, $\overline{CD}=1$
> 나. $\overline{AC}\perp\overline{BC}$
> 다. $\overline{AB}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}$

사면체 $ABCD$ 의 부피의 최댓값은? [3점]

① $\frac{4}{3}$  ② $\frac{5}{3}$  ③ 2  ④ $\frac{7}{3}$  ⑤ $\frac{8}{3}$

**10.** 분수부등식 $\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{x-4}\le\left|\frac{1}{x-4}\right|$ 의 자연수인 해의 개수는? [3점]

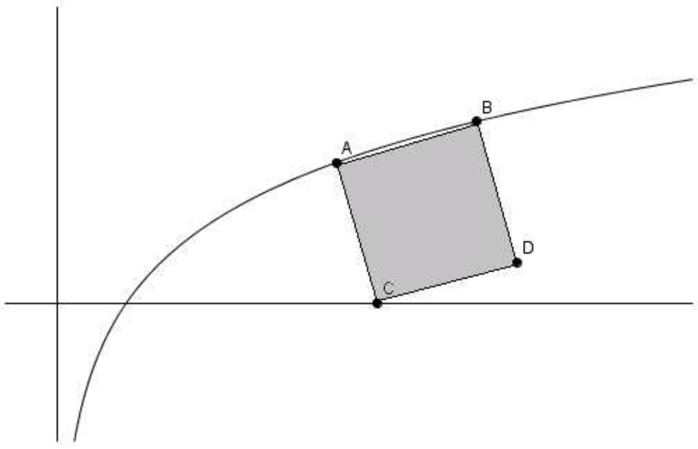
① 1  ② 2  ③ 3  ④ 4  ⑤ 5

11. 회사원 A가 집에서 출발하여 회사에 도착하는 데에 걸리는 시간은 평균이 30분, 표준편차가 4분인 정규분포를 따른다. 회사원 A가 오전 9시까지 회사에 도착하지 못하는 경우 지각이라고 할 때, 회사원 A가 회사에 지각할 확률이 0.02이하가 되기 위해 집에서 출발해야 하는 시각을 오른쪽 표준정규분포표를 이용해서 구하면? [3점]

| $z$ | $P(0 \le Z \le z)$ |
|---|---|
| 0.5 | 0.19 |
| 1.0 | 0.34 |
| 1.5 | 0.43 |
| 2.0 | 0.48 |

① 오전 8시 20분 이전 ② 오전 8시 22분 이전 ③ 오전 8시 24분 이전 ④ 오전 8시 26분 이전 ⑤ 오전 8시 28분 이전

12. 좌표평면의 함수 $y = \log_2 x$의 그래프 위의 두 점 $A$, $B$와 $x$축 위의 한 점 $C$, 제 1사분면 위의 한 점 $D$로 이루어진 정사각형 $ABDC$가 있다. 점 $A$의 좌표가 $(4,\ 2)$일 때, 점 $D$의 $x$좌표를 구하면? (단, 점 $B$의 $x$좌표는 점 $A$의 $x$좌표보다 크고, $\log 2 = 0.30$, $\log 3 = 0.48$ 로 계산한다.) [3점]




① 6.3 ② 6.6 ③ 6.9 ④ 7.2 ⑤ 7.5

**13.** 다음은 수열 $a_n$이 $a_1=\frac{1}{2}$,

$(n^2+n)^2(a_n+2a_{n+1})=3n^2+2n+1$ 를 만족시킬 때,

수열 $a_n$의 일반항을 구하는 과정이다.

$a_n+2a_{n+1}=\frac{3n^2+2n+1}{n^2(n+1)^2}$

$=\frac{1}{n^2}+$ $\boxed{(가)}$

$a_n-\frac{1}{n^2}=-2(a_{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2})$

$b_n=a_n-\frac{1}{n^2}$ 라 하면

$b_{n+1}=-\frac{1}{2}b_n,\ b_1=-\frac{1}{2}$ 이므로

$b_n=$ $\boxed{(나)}$

그러므로, $a_n=\frac{1}{n^2}+$ $\boxed{(나)}$

위 과정에서 빈 칸 (가)에 들어갈 식을 $f(n)$, 빈 칸 (나)에 들어갈 식을 $g(n)$이라 할 때, $\frac{1}{f(7)g(6)}$의 값은? [3점]

① $2^{11}$ ② $2^{10}$ ③ $2^9$ ④ $2^8$ ⑤ $2^7$

**14.** 두 이차정사각행렬 $A$, $B$가 $A^2B=E$, $A-B=AB$를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

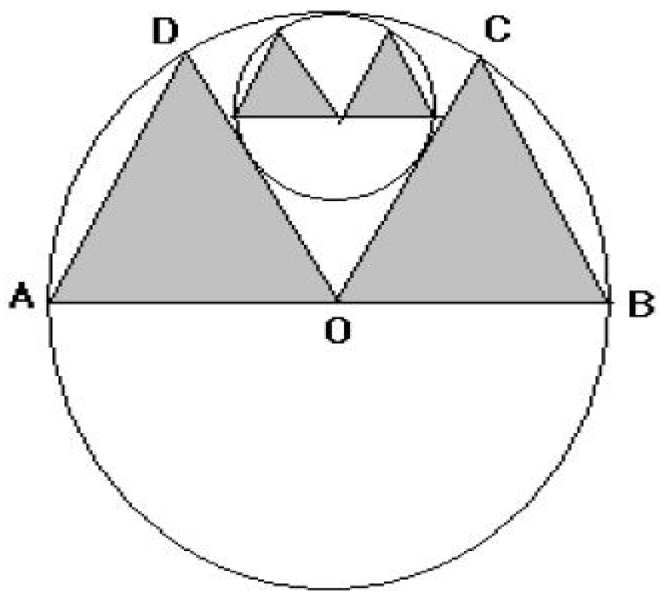
ㄱ. $AB=BA$

ㄴ. $A^3-A=E$

ㄷ. $A^2+B^2=2A-B$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

**15.** 아래 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심이 점 $O$인 원의 지름 $\overline{AB}$에 대해 선분 $\overline{AO}$를 한 변으로 하는 정삼각형 $AOD$와 선분 $\overline{BO}$를 한 변으로 하는 정삼각형 $BOC$가 있다. 선분 $\overline{CO}$, $\overline{DO}$와 부채꼴 $DOC$의 호 $\overset{\frown}{DC}$에 모두 접하는 원을 그리고 위와 같은 방법으로 2개의 정삼각형을 그린다. 이와 같은 방법으로 무수히 많은 정삼각형을 그려 나갈 때, 모든 정삼각형의 넓이의 합은? [4점]




① $\frac{5\sqrt{3}}{16}$　② $\frac{3\sqrt{3}}{8}$　③ $\frac{7\sqrt{3}}{16}$
④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$　⑤ $\frac{9\sqrt{3}}{16}$

**16.** 철수와 영희가 사격에서 표적을 맞힐 확률은 각각 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$이다. 철수와 영희가 각각 3회의 사격을 실시할 때, 철수가 맞힌 표적의 개수가 영희보다 많을 확률은? [4점]

① $\frac{17}{36}$　② $\frac{53}{108}$　③ $\frac{55}{108}$
④ $\frac{19}{36}$　⑤ $\frac{59}{108}$

**17.** 연속함수 $f(x)$가 다음과 같은 조건을 만족한다.

> 가. $f'(x)=\begin{cases} e^x+6x & (0<x<1) \\ -2 & (1<x<2) \end{cases}$
>
> 나. 정수가 아닌 임의의 실수 $k$에 대하여
> $f'(k)=f'(k+2)$이다.

$f(0)=1$일 때, $\int_8^{10} f(x)dx$의 값은? [4점]

① $6e+4$ ② $8e+2$ ③ $8e+4$
④ $10e+2$ ⑤ $10e+4$

**18.** 미분 가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f_1(x)=f(x)+f'(x)$라 정의한다. 자연수 $k$에 대하여 함수 $f_k(x)$가 미분 가능할 때, $f_{k+1}(x)=f_k(x)+f_k{}'(x)$라 정의한다. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

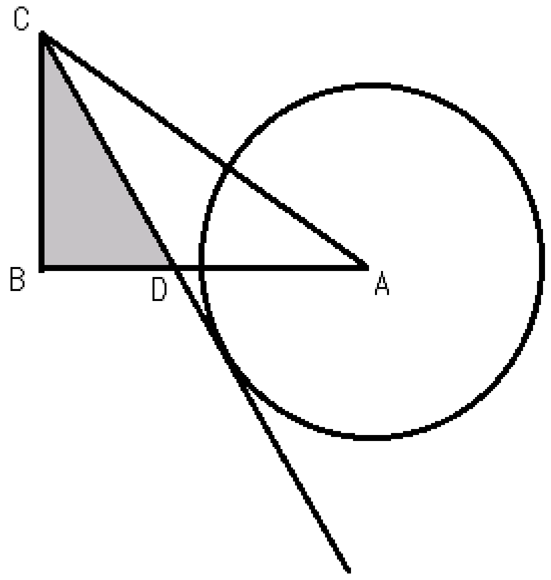
ㄱ. $f(x)=e^x+e^{-x}$일 때, $f_{10}(0)=2^{10}$이다.

ㄴ. $f(x)=e^{2x}$일 때, $f_{10}(0)=3^{10}$이다.

ㄷ. $f(x)=\sin x-\cos x$일 때, $f_{20}(\frac{\pi}{2})=0$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

**19.** 아래 그림과 같이 반지름이 1인 원의 중심 $A$를 한 꼭지점으로 하고 $\angle B = 90°$인 직각삼각형 $ABC$가 있다. 점 $C$에서 원에 그은 접선 중 $\overline{AB}$를 지나는 것이 $\overline{AB}$와 만나는 점을 $D$라 하자. $\overline{AB} = 2$이고, $\angle A = \theta$라 할 때, 삼각형 $DBC$의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. 극한값 $\lim_{\theta \to +0} \frac{S(\theta)}{\theta^2}$의 값을 구하시오. [4점]




① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $2$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

**20.** 일차변환을 나타내는 행렬들의 집합

$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$가 있다. 집합 $S$의 세 원소 $A$, $B$, $C$에 대해 $ABC = X$라 하자. 점 $P(1,\ 2)$가 일차변환 $X$에 의해 이동되는 점을 $P'$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $P' = P$를 만족시키는 일차변환 $X$가 존재한다.
ㄴ. 서로 다른 점 $P'$의 개수는 4개이다.
ㄷ. $\overline{PP'}$의 최댓값은 $3\sqrt{2}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

**21.** 좌표공간위의 구 $x^2+y^2+z^2=9$ 와 두 평면 $\alpha$, $\beta$에 대해, 두 평면 $\alpha$, $\beta$와 구가 만나서 생기는 원을 각각 $A$, $B$라 하자. 구와 두 평면 $\alpha$, $\beta$, 원 $A$, $B$가 다음과 같은 조건을 만족시킬 때, 원 $B$의 평면 $\alpha$위로의 정사영의 넓이의 최댓값은? [4점]

> 가. 평면 $\alpha$의 방정식은 $x+2y-5=0$이다.
>
> 나. 원 $A$의 평면 $\beta$위로의 정사영의 넓이는 $\frac{4\sqrt{5}}{3}\pi$이다.
>
> 다. 두 평면 $\alpha$, $\beta$의 교선은 구의 내부를 지나지 <u>않는다.</u>

① $\frac{80\sqrt{5}}{27}\pi$ ② $\frac{28\sqrt{5}}{9}\pi$ ③ $\frac{88\sqrt{5}}{27}\pi$
④ $\frac{92\sqrt{5}}{27}\pi$ ⑤ $\frac{32\sqrt{5}}{9}\pi$

## 단답형

**22.** 다항함수 $f(x)=(x^2-x-2)^2(x+3)$ 에 대해 $f''(2)$의 값을 구하시오. [3점]

**23.** 두 수열 $a_n$, $b_n$과 모든 자연수 $k$에 대하여 다음과 같은 관계가 성립한다.

> 가. $a_k+b_k=1$
>
> 나. $a_{k+1}=\frac{2}{3}a_k+\frac{1}{3}b_k$

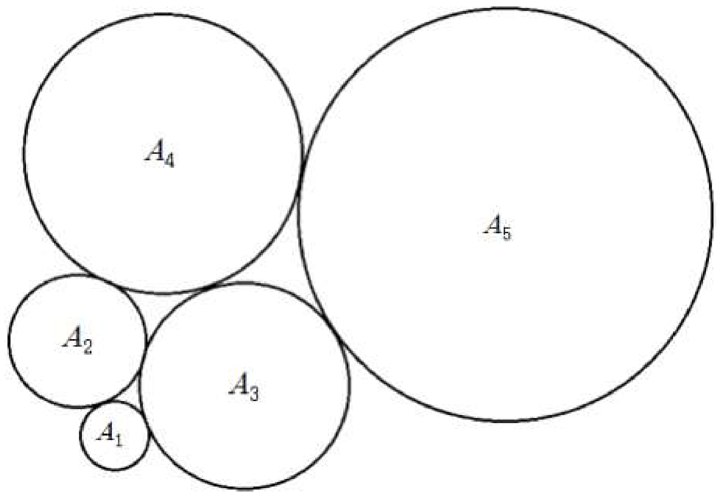
$a_1=\frac{2}{3}$일 때, $b_4=\frac{n}{m}$이다. $m+n$의 값을 구하시오. (단, $m$, $n$은 서로소인 자연수이다.) [3점]

**24.** 삼차함수 $f(x)=\frac{4}{3}x^3-5x^2+k$가 있다. 모든 자연수 $a$가 부등식 $\int_a^{a+1} f(x)dx \geq 0$를 만족시키도록 하는 실수 $k$의 최솟값을 구하시오. [3점]

**25.** 좌표평면위의 원점 $O$와 $x$축 위의 점 $A(4,\ 0)$, $y$축 위의 점 $B(0,\ t)$로 이루어진 직각삼각형 $AOB$가 있다. 양수 $a$에 대해 타원 $\frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$와 삼각형 $AOB$의 교점의 개수를 $f(a)$라 하자. $f(a)=1$을 만족시키는 양수 $a$가 존재하지 않을 때, $f(a)=3$을 만족시키는 양수 $a$에 대해 $10a^2$의 값을 구하시오. [3점]

**26.** 두 함수 $f(x)=xe^x$, $g(x)=xe^{-x}$에 대해
$F(t)=\int_1^t f(x)dx$, $G(t)=\int_{-1}^t g(x)dx$ 라 하자.
$\sum_{k=2}^{9}\frac{1}{F(k)G(k)}=a$ 라 할 때, $-90a$의 값을 구하시오. [4점]

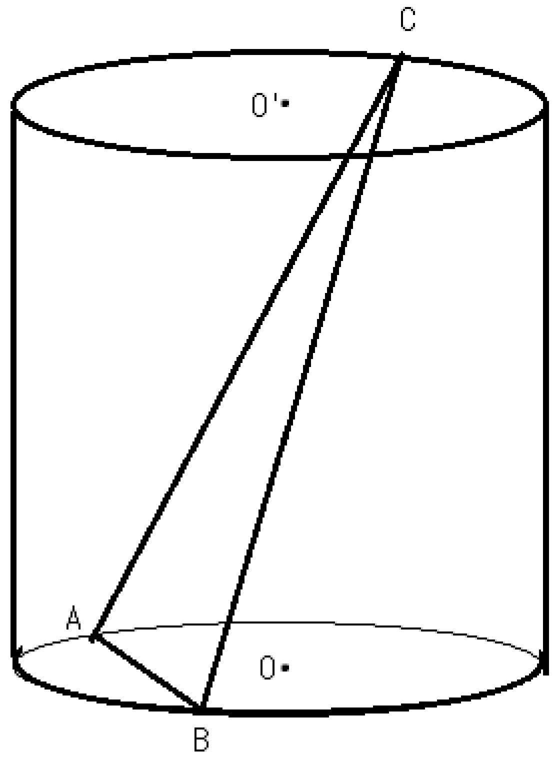
**27.** 반지름의 길이가 1이고 중심이 $A_1$인 원 $O_1$이 있다. 이 원에 외접하는 반지름의 길이가 2이고 중심이 $A_2$인 원 $O_2$가 있다. 원 $O_1$, $O_2$에 모두 외접하는 반지름의 길이가 3이고 중심이 $A_3$인 원 $O_3$이 있다. 이와 같은 방법으로 자연수 $k$에 대해 원 $O_k$, $O_{k+1}$에 모두 외접하는 반지름의 길이가 $k+2$이고 중심이 $A_{k+2}$인 원 $O_{k+2}$를 계속 그려나간다.




$\sum_{n=1}^{9}\left\{\overrightarrow{A_nA_{n+2}}\cdot\left(\overrightarrow{A_nA_{n+2}}-2\overrightarrow{A_nA_{n+1}}\right)\right\}$ 의 값을 구하시오.

[4점]

**28.** 반지름의 길이가 2이고 높이가 4인 원기둥에 대해 밑면 $O$ 위의 두 점 $A$, $B$와 밑면 $O'$위의 점 $C$로 이루어진 삼각형 $ABC$가 있다. $\overline{AB}=2$이고, 삼각형 $ABC$의 밑면 $O$위로의 정사영의 넓이가 3일 때, $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=a+b\sqrt{3}$이다. 자연수 $a$, $b$에 대해 $a+b$의 값을 구하시오. [4점]



**29.** 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 일차함수 $g(x)=2x+k$에 대해 함수 $h(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq g(x)) \\ g(x) & (f(x)<g(x)) \end{cases}$$

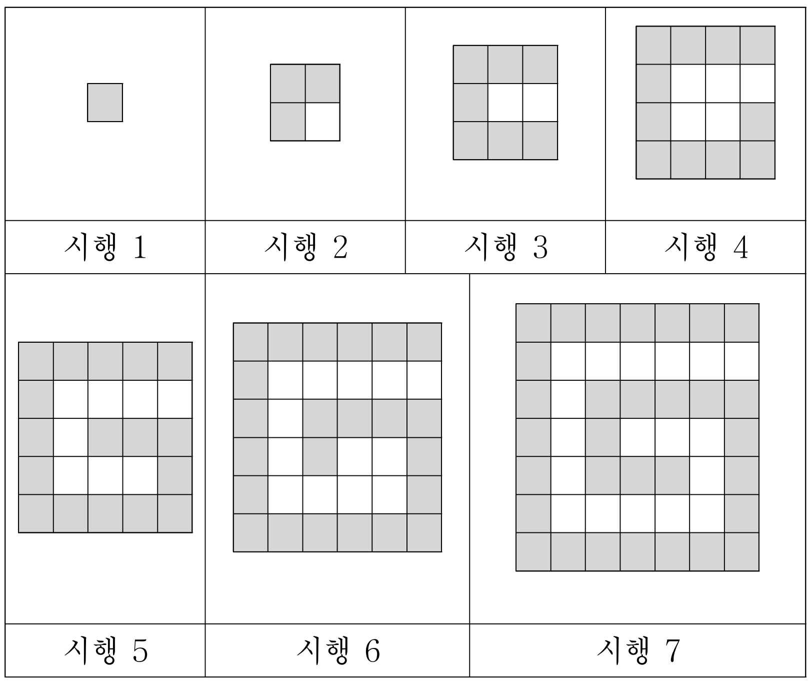
세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 가 다음과 같은 조건을 만족시킨다.

> 가. $f'(3)=0$
> 나. $k=-6$ 또는 $k=2$일 때, 함수 $\{h(x)\}^2$는 두 점에서 미분가능하지 <u>않다.</u>

$f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

**30.** 아래 규칙과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 $n^2$개로 이루어진 정사각형을 색칠한다.

> 가. 오른쪽 상단에서 출발하여 가장자리를 따라 시계 반대 방향으로 움직이면서 색칠한다.
>
> 나. 색칠하는 방향으로 이전에 색칠한 정사각형이 있는 경우 1칸의 간격을 두고 시계 반대방향으로 방향을 바꾸어 색칠해 나간다. 이 때, 새롭게 색칠하는 정사각형이 바로 직전에 색칠한 정사각형을 제외한 이전에 색칠했던 정사각형과 이웃하여서는 안 된다.
>
> 다. 더 이상 색칠할 수 있는 정사각형이 없는 경우 색칠을 중단한다.




$n$번째 시행에서 색칠하게 되는 한 변의 길이가 1인 정사각형의 총 개수를 $a_n$이라 하자. $a_k+a_{k+2}>400$ 을 만족시키는 자연수$k$의 최솟값을 구하시오. [4점]