치역이 0이 아닌 실수 전체의 집합인 함수 $f(x)$는 역함수가 존재한다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 $g(f(x))=x$를 만족할 때, 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 다음 조건을 만족한다.

(가) 함수 $f(x)$의 그래프는 $x<1$과 $x>1$에서 각각 일차함수의 그래프의 일부이다.

(나) 방정식 $f(x)=g(x)$가 오직 서로 다른 세 실근 α, β, γ만을 가지며 $\alpha+\gamma=2\beta$이다.

$4\{g(x)\}^2-g(x)$가 연속함수일 때 γ의 값을 구하시오. (단, $\alpha<\beta<\gamma$이다.)

함수 $f(x)$가 역함수가 존재하므로 함수 $f(x)$는 일대일대응이다. 즉, 함수 $f(x)$의 치역과 공역은 동일하며 함수 $f(x)$의 역함수의 정의역은 0이 아닌 실수 전체의 집합이다.

$f(x)$는 증가함수이거나 감소함수여야 일대일대응일 수 있는데, $\lim_{x\to 1-}f(x)\neq\lim_{x\to 1+}f(x)$라 가정하자.

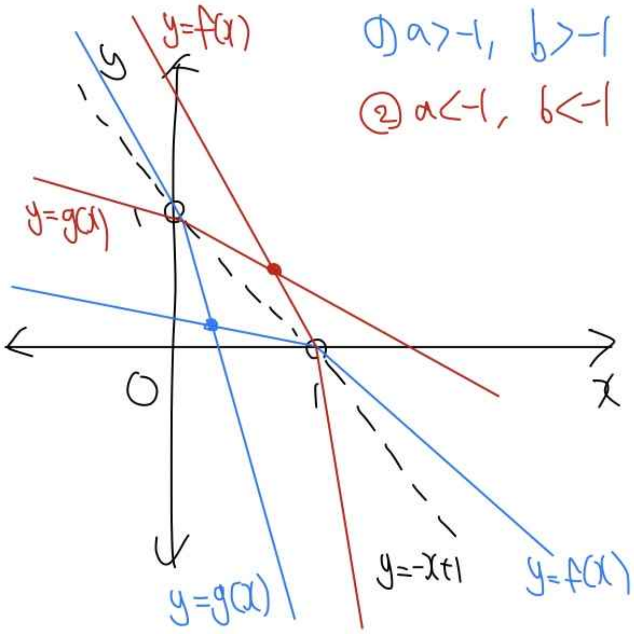
좌극한값과 우극한값 사이의 열린구간에서 함수 $f(x)$의 역함수가 정의되지 않아야 하므로 이는 모순이다. 즉, $\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)$이며 $\lim_{x\to 1}f(x)=0$이다. 따라서 두 상수 a, b에 대하여

$f(x)=\begin{cases} a(x-1)\ (x<1) \\ b(x-1)\ (x>1) \end{cases}$이라 할 때 함수 $f(x)$가 역함수를 가지므로 $ab>0$이다.

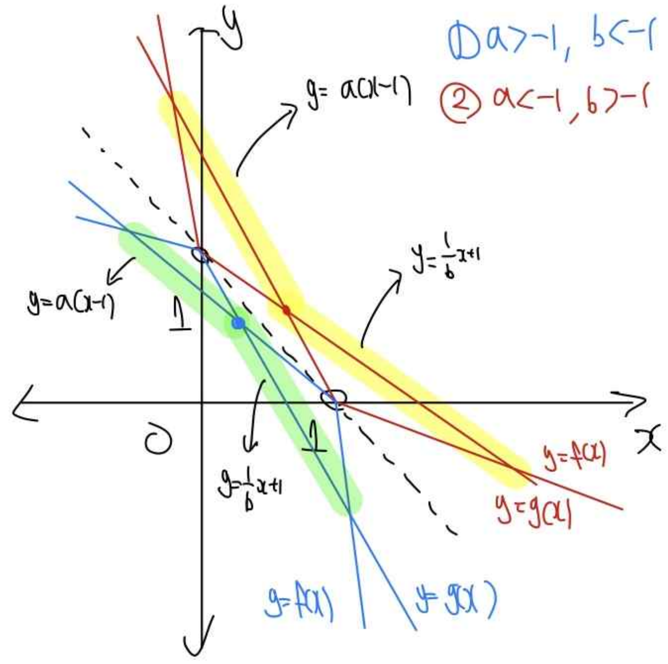
$g(f(x))=x$이므로 $x\neq 0$에서 함수 $g(x)$는 $g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{a}x+1\ (x<0) \\ \dfrac{1}{b}x+1\ (x>0) \end{cases}$이다.

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 정의되어있음을 유의하며 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근을 관찰하자.

$a<0$일 때 $x\neq 0$에서 방정식 $f(x)=g(x)$이 서로 다른 세 실근 α, β, γ를 가진다고 가정하자.



$(a+1)(b+1)>0$일 때 방정식 $f(x)=g(x)$은 오직 하나의 실근만을 가지게 된다. (꺾이는 점을 기준으로 두 반직선이 각각 $y=-x+1$의 위아래에 존재하게 되기 때문이다.) $\therefore (a+1)(b+1)\geq 0$



이때 $f(\alpha)=\gamma$, $f(\beta)=\beta$, $f(\gamma)=\alpha$에서 $\alpha+\gamma=2\beta$일 때 세 점 $(\alpha,\ \gamma)$, $(\beta,\ \beta)$, $(\gamma,\ \alpha)$는 한 직선 위에 존재한다. (이 직선은 $y=-x+2\beta$이다.) 이때 $a\neq\dfrac{1}{b}$라면 세 점이 한 직선위에 존재할 수 없으므로

$a=\dfrac{1}{b}$이고 이 경우 방정식 $f(x)=g(x)$는 $a=\dfrac{1}{b}=-1$일 때 실근의 개수가 무수히 많으며

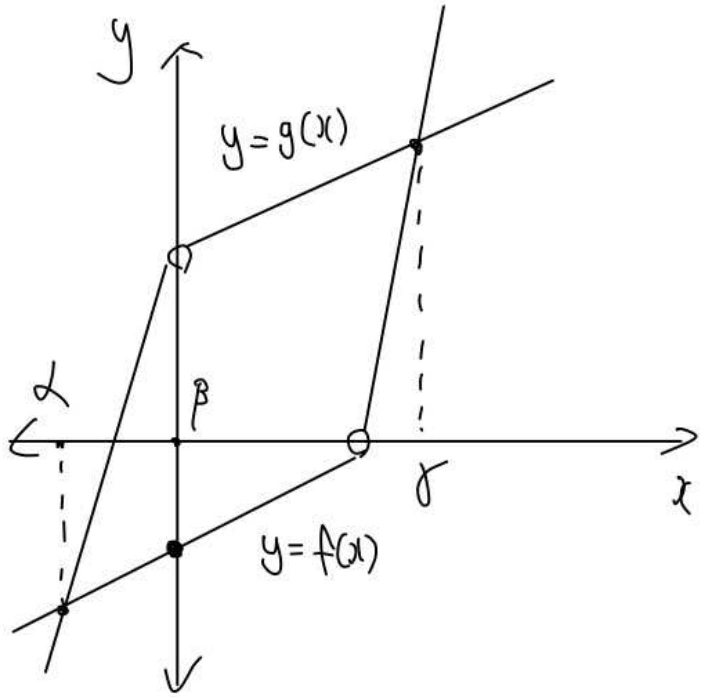
$a=\dfrac{1}{b}\neq-1$일 때 사이값 정리에 의하여 구간 $(0,\ 1)$에서 오직 한 실근만을 가지므로 모순이다.

그러므로 $a<0$이라면 α, β, γ 중 하나는 0이어야 하는데 사이값 정리에 의하여 (혹은 그래프를 통해 직관적으로) $\alpha<0<\beta<1<\gamma$이므로 주어진 조건을 만족할 수 없다. $\therefore a>0$

$a>0$이므로 방정식 $f(x)=g(x)$의 모든 실근은 $y=x$ 위에 존재한다. 즉, $x>1$에서 실근의 개수는 최대 1이며 $x<0$에서 실근의 개수는 최대 1이고 열린구간 $(0,\ 1)$에서는 실근을 가질 수 없으므로 $x\neq0$에서 방정식 $f(x)=g(x)$에서 두 실근을 가지고 $f(0)=g(0)$일 때 주어진 조건을 만족한다.

즉, $x>1$에서 방정식 $f(x)=g(x)$가 실근을 가지기 위해 $b>1$이며 $x<0$에서 방정식 $f(x)=g(x)$가 실근을 가지기 위해 $a<1$이다.

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $g(x)$가 $x=0$에서 불연속이며 이차함수 $h(x)=4x^2-x$에 대하여 $h(g(x))$가 연속함수이므로 $h(x)$의 대칭축이 $x=\frac{1}{8}$임에 따라 $\lim_{x\to 0}g(x)+g(0)=\frac{1}{4}$이다. 즉, $\lim_{x\to 0}g(x)=1$에서 $g(0)=-\frac{3}{4}$이므로 $f(0)=-\frac{3}{4}$이다. $\therefore a=\frac{3}{4}$. 이때 $\frac{3}{4}(x-1)=x$에서 $\alpha=-3$이고 $\beta=0$에서 $\gamma=3$이다. $\therefore \gamma=3$