Day1. 다항식

#곱셈 공식, 인수분해 공식

① $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

② $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

③ $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

④ $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

⑤ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

⑥ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

⑦ $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

1. 한번 정도는 직접 전개 해보기
2. 변형 공식도 자유롭게
3. 구구단처럼 암기하여 기계적으로 반응할 수 있게

#다항식의 나눗셈

$\ne 0$, 나누는 식

$A=BQ+R$

몫

나머지, B보다 차수 낮다 (또는 상수항)

B의 차수 알면 R를 식으로 표현하기

#항등식

모두 항등식이라는 표현

: x에 대한 항등식~, 모든 실수 x에 대하여~, x에 관계없이~

: 동류항의 계수를 비교하거나, 적당한 수를 대입한다.

$x^2+x+1=a(x-1)^2+b(x-1)+c$

① $x^2+x+1=ax^2+(b-2a)x+a-b+c$,

$a=1, b=3, c=3$

② $x=1$, $c=3$

$x=0$, $a-b=-2$

$x=2$, $a+b=4$

#나머지정리, 인수정리

다항식 $P(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지 R라 하면

$x=\alpha$ 대입 ← $P(x)=(x-\alpha)Q(x)+R$ 항등식

1차 상수

① $R=P(\alpha)$

② $P(\alpha)=0 \iff P(x)$는 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.

$\iff (x-\alpha)$는 $P(x)$의 인수

#조립제법

: $3x^3-4x^2+2x-2$를 $x-2$로 나눈 몫과 나머지?

$3x^3-4x^2+2x-2$

$=(x-2)(3x^2+2x+6)+10$

2	3	−4	2	−2
		6	4	12
	3	2	6	10

몫 $3x^2+2x+6$ 나머지 10

: $2x-4$로 나눈 몫과 나머지?

2 배로

$=(2x-4)(\frac{3}{2}x^2+x+3)+10$

#인수정리를 이용한 인수분해

: $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ \cdots\ +ax+a_0$를 인수분해할 때

$\pm\dfrac{(a_0\text{의 약수})}{(a_n\text{의 약수})}$들을 우선 대입해본다.

유리수 계수인 일차식 인수가 있을 때만 사용가능
(안 될 때도 있으니 주의)

예시 : $12x^3+4x^2-17x+6$

Why? 왜 되는지?

6의 약수 1, 2, 3, 6.

12의 약수 1, 2, 3, 4, 6, 12

$x=\frac{1}{2}$: $\frac{3}{2}+1-\frac{17}{2}+6=0$

$\therefore (2x-1)(6x^2+5x-6)$

$=(2x-1)(2x+3)(3x-2)$

대입해서 0 되는 숫자가 $\frac{1}{2}$ $\frac{-3}{2}$ $\frac{2}{3}$ 인데
최고차항 계수 $12=2\times2\times3$
상수항 $6=(-1)\times3\times(-2)$
임에 주목

201906

26. x에 대한 삼차방정식

$$x^3-x^2+kx-k=0$$

이 허근 $3i$와 실근 α를 가질 때, $k+\alpha$의 값을 구하시오. (단, k는 실수이고, $i=\sqrt{-1}$ 이다.) [4점]

$x=1$: $1-1+k-k=0$.

$(x-1)(x^2+k)=0$.

실근 $\alpha=1$ 허근 $3i$ 대입, $k=9$ $k+\alpha=10$. $\boxed{10}$

201811

18. 최고차항의 계수가 1인 두 이차다항식 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

1차 상수 a

(가) $f(x)-g(x)$를 $x-2$로 나눈 몫과 나머지가 서로 같다.
(나) $f(x)g(x)$는 x^2-1로 나누어떨어진다.

몫도 상수 a
문제 조건에 없어도 f(x), g(x) 최고차항 계수가 같거나

$g(4)=3$일 때, $f(2)+g(2)$의 값은? [4점]

(가)

상수 a

$f(x)-g(x)=(x-2)Q_1(x)+R(x)$
$=a(x-2)+a$
$=a(x-1)$

$f(1)=g(1)$. …①

(나)

$f(x)g(x)=(x^2-1)Q_2(x)+0$

$x=1$, $f(1)g(1)=0$.
$f(1)=g(1)=0$ ($\because$①)

$x=-1$, $f(-1)g(-1)=0$ …②

$g(x)=(x-1)(x-b)$
$g(4)=3(4-b)=3$, $b=3$
$g(x)=(x-1)(x-3)$, $g(2)=-1$,
$g(-1)\neq0$, $f(-1)=0$ ($\because$②)
$f(x)=(x-1)(x+1)$, $f(2)=3$. $\boxed{2}$

Day2. 복소수, 이차방정식

#복소수

실수부분 허수부분

: 허수단위 $i=\sqrt{-1}$, $i^2=-1$

: 복소수 $a+bi$ (단, a, b는 실수)

: $z=a+bi$의 켤레복소수 $\bar{z}=\overline{a+bi}=a-bi$

↳ 분모의 실수화

$\frac{1}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}=\frac{1-i}{2}$

* $\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}\neq\sqrt{6}$
$=\sqrt{2}i\times\sqrt{3}i$
$=-\sqrt{6}$

* TMI
분모를 실수화하면
① 연산이 편해지고
② 복소수끼리 나누어도 복소수가 됨을 알수있다

#이차방정식의 근의 공식

: $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$의 근은

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

(a, b, c 실수이면) 여기는 무조건 실수

x가 허수라면 루트 안이 음수

: $ax^2+2b'x+c=0$ $(a\neq 0)$의 근은

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

#판별식

: 계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식

$D=b^2-4ac$ 또는

: 계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0$의 판별식

$D'=b'^2-ac$ 라 하면

① D 또는 $D'>0$: 서로 다른 두 실근 갖는다.
② D 또는 $D'=0$: 중근(서로 같은 두 실근) 갖는다.
③ D 또는 $D'<0$: 서로 다른 두 허근 갖는다.

실근 갖는다

#근과 계수의 관계

: $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$의 두 근 α, β에 대하여

두 근의 합 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, 두 근의 곱 $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

why? 방법 ① 직접 계산

$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $\beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\alpha+\beta=\frac{(-b+\sqrt{D})+(-b-\sqrt{D})}{2a}=-\frac{b}{a}$

$\alpha\times\beta=\frac{(-b+\sqrt{D})\times(-b-\sqrt{D})}{4a^2}=\frac{b^2-D}{4a^2}$
$=\frac{4ac}{4a^2}$
$=\frac{c}{a}$

방법 ② 인수정리

근이 α,β이므로

$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$

$ax^2+bx+c=ax^2-a(\alpha+\beta)x+a\alpha\beta$

동류항 비교 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$

$\alpha\beta=\frac{c}{a}$

201906

16. 이차방정식 $x^2+x-1=0$의 서로 다른 두 근을 α, β라 하자. 다항식 $P(x)=2x^2-3x$에 대하여 $\beta P(\alpha)+\alpha P(\beta)$의 값은? [4점]

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=-1$

$\beta P(\alpha)+\alpha P(\beta)$

$=\beta(2\alpha^2-3\alpha)+\alpha(2\beta^2-3\beta)$

$=\alpha\beta(2\alpha-3)+\alpha\beta(2\beta-3)$

$=\alpha\beta(2\alpha+2\beta-6)$

$=\underbrace{\alpha\beta}_{=-1}(2(\underbrace{\alpha+\beta}_{=-1})-6)$

$=-(-2-6)=8$

$\boxed{8}$

201906

21. 두 이차함수

$$f(x)=(x-a)^2-a^2,$$

$$g(x)=-(x-2a)^2+4a^2+b$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=g(x)$는 서로 다른 두 실근 α, β를 갖는다. (나) $\beta-\alpha=2$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? ㄱ.ㄴ.ㄷ

(단, a, b는 상수이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $a=1$일 때, $b=-\frac{5}{2}$

ㄴ. $f(\beta)-g(\alpha)\le g(2a)-f(a)$

ㄷ. $g(\beta)=f(\alpha)+5a^2+b$이면 $b=-16$

$f(x)-g(x)=0$ 의 두근 α,β

$(x-a)^2-a^2-\{-(x-2a)^2+4a^2+b\}=0$

$(x-a)^2+(x-2a)^2-5a^2-b=0.$

$2x^2-6ax-b=0.$

(가) $\alpha+\beta=3a$, $\alpha\beta=-\frac{b}{2}\cdots①$

(나) $4=(\beta-\alpha)^2$
$=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$4=9a^2+2b\cdots②$

ㄱ ②에 $a=1$ 대입, $b=-\frac{5}{2}$

ㄴ (왼쪽)

α는 $f(x)=g(x)$의 근이므로 $g(\alpha)=f(\alpha)$로 바꾸어 쓰자.

$f(\beta)-g(\alpha)=f(\beta)-f(\alpha)$

$=(\beta-a)^2-(\alpha-a)^2$ 합차

$=\underbrace{(\alpha+\beta-2a)}_{=3a\,(\because ①)}\underbrace{(\beta-\alpha)}_{=2\,(\because (나))}$

$=2a$

$\therefore f(\beta)-g(\alpha)=f(\beta)-f(\alpha)=2a\cdots③$

(오른쪽)

$g(2a)=4a^2+b.$ $f(a)=-a^2$

$g(2a)-f(a)=5a^2+b=\frac{1}{2}a^2+2\cdots④$

$b=2-\frac{9}{2}a^2\ (\because ②)$

따라서 $f(\beta)-g(\alpha)\le g(2a)-f(a)$

$\Leftrightarrow 2a\le\frac{1}{2}a^2+2$

$\Leftrightarrow a^2-4a+4\ge 0$

$\Leftrightarrow (a-2)^2\ge 0$ 참.

ㄷ. (β는 $f(x)=g(x)$ 근)

$g(\beta)-f(\alpha)=5a^2+b$

$\Leftrightarrow f(\beta)-f(\alpha)=5a^2+b$

$\Leftrightarrow (\because ③)\ 2a=2-\frac{9}{2}a^2\ (\because ④)$

$\Leftrightarrow (a-2)^2=0$

$\therefore a=2, b=-16$

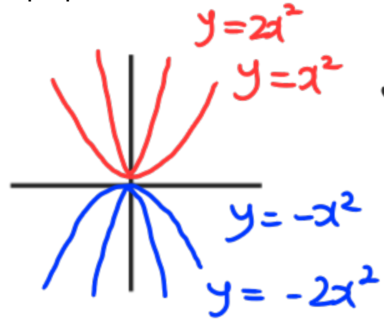
Day3. 이차함수와 이차방정식

#이차함수 $y=ax^2(a\neq0)$

: 포물선 모양

: $a>0$이면 아래로 볼록, $a<0$이면 위로 볼록

: $|a|$값이 클수록 그래프의 폭이 좁아짐



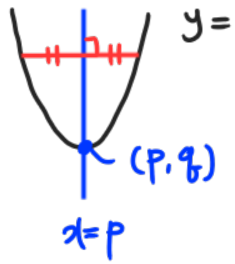
#이차함수 $y=a(x-p)^2+q$(단, a, p, q는 상수, $a\neq0$)

: $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼,

y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것

: 꼭짓점의 좌표 (p, q) ~> 최대, 최소와 관련

: 축의 방정식 $x=p$에 선대칭



$y=a(x-p)^2+q$ $(a>0)$

* 이차함수에서 중요한 것

① 최대, 최소

② 대칭성

꼭짓점과 관련.

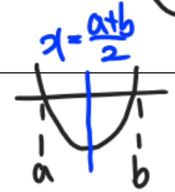
* 이차함수에서

① 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq f(p)$

⇒ 축 $x=p$

② $f(a)=f(b)$

⇒ 축 $x=\frac{a+b}{2}$,



#이차함수 그래프와 최대, 최소

① $y=a(x-p)^2+q$꼴로 표현 후

② 꼭짓점을 찾고

③ a의 부호를 보고 그래프 개형을 그리고

④ 상황에 따라 필요한 점(범위의 경계)을 더 표시해줌

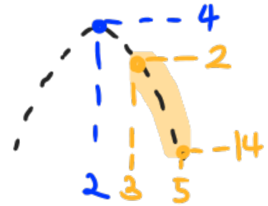
※ 꼭짓점의 포함 여부가 중요

→ $y=-2x^2+8x-4\,(3\leq x\leq5)$의 최댓값, 최솟값은? 2 -14

$=-2(x^2-4x+4)+8-4$

반의 제곱

$=-2(x-2)^2+4$



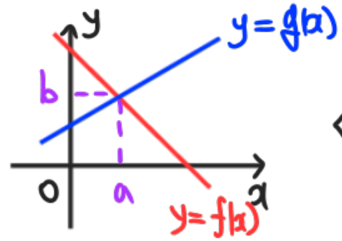
#그래프의 교점과 방정식의 실근

: $y=f(x)$, $y=g(x)$ 그래프의 교점이 (a, b)

⇔ 연립방정식 $\begin{cases}y=f(x)\\y=g(x)\end{cases}$의 실근 $x=a$, $y=b$

⇔ 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근 $x=a$

①



⇔ ② $\begin{cases}y=f(x)\\y=g(x)\end{cases}$의 실근이 $x=a$, $y=b$ ⇔ ③ $f(x)=g(x)$의 실근이 $x=a$

Day3. 이차함수와 이차방정식

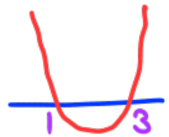
#이차함수의 그래프와 x축

① 몇개? ②있다면 어디?

: $y=x^2-4x+3$, $y=0$ (x축) 그래프의 교점이 $(1,0), (3,0)$

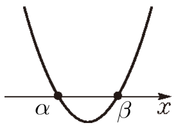
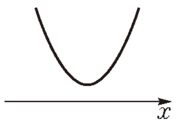
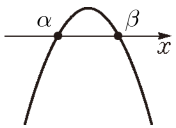
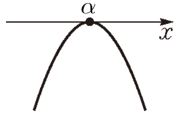
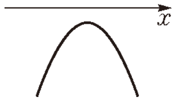
$\Leftrightarrow$ 방정식 $x^2-4x+3=0$의 실근이 $x=1$ 또는 $x=3$

$(x-1)(x-3)=0$



: 위치 관계

$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$의 판별식 $D=b^2-4ac$

$ax^2+bx+c=0$의 판별식 D		$D>0$	$D=0$	$D<0$
$ax^2+bx+c=0$의 해		서로 다른 두 실근 α, $\beta(\alpha<\beta)$	중근 α	서로 다른 두 허근
$y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 교점의 개수 위치 관계		2 서로 다른 두 점에서 만난다.	1 한 점에서 만난다. (접한다.)	0 만나지 않는다.
$y=ax^2+bx+c$의 그래프	$a>0$	$y=ax^2+bx+c$  α β x	$y=ax^2+bx+c$  α x	$y=ax^2+bx+c$  x
	$a<0$	α β x  $y=ax^2+bx+c$	α x  $y=ax^2+bx+c$	x  $y=ax^2+bx+c$

#이차함수의 그래프와 직선

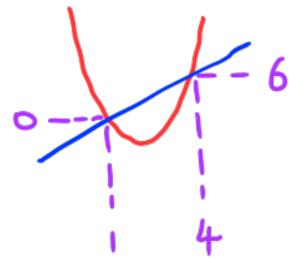
x값 대입하여 찾기

: $y=x^2-3x+2$, $y=2x-2$의 교점이 $(1,0), (4,6)$

$\Leftrightarrow$ 방정식 $x^2-3x+2=2x-2$의 실근이 $x=1$ 또는 $x=4$

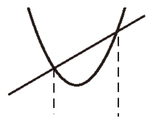
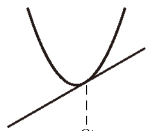
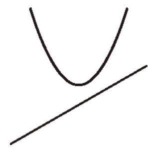
$x^2-5x+4=0$

$(x-1)(x-4)=0$



: 위치 관계

$ax^2+bx+c=mx+n(a\neq0)$의 판별식 $D=b^2-4ac$

$ax^2+bx+c=mx+n$의 판별식 D	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$ax^2+bx+c=mx+n$의 해	서로 다른 두 실근 α, $\beta(\alpha<\beta)$	중근 α	서로 다른 두 허근
$y=ax^2+bx+c(a>0)$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계	 α β	 α	
	서로 다른 두 점에서 만난다.	한 점에서 만난다. (접한다.)	만나지 않는다.

20190917

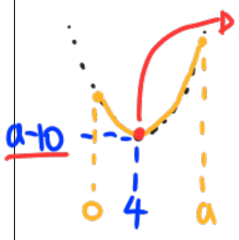
17. 양수 a에 대하여 $0 \le x \le a$에서 이차함수

$f(x)=x^2-8x+a+6$ $=x^2-8x+16+a-10=(x-4)^2+a-10$

의 최솟값이 0이 되도록 하는 모든 a의 값의 합은? [4점]

꼭짓점 $(4, a-10)$

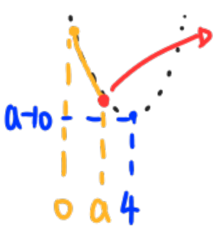
① 꼭짓점 포함 $(a \ge 4)$



$a-10=0$

$\therefore a=10$

② 꼭짓점 포함 X $(a<4)$



$f(a)=a^2-7a+6=0$

$a=1$, $\cancel{a=6}$ $(a<4)$

$\boxed{11}$

20201127

27. 좌표평면에서 직선 $y=t$가 두 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2+3$, $y=-\frac{1}{2}x^2+x+5$의 그래프와 만날 때, 만나는 서로 다른 점의 개수가 3인 모든 실수 t의 값의 합을 구하시오. [4점]

① 꼭짓점

$y=\frac{1}{2}x^2+3 \rightarrow (0, 3)$

$y=-\frac{1}{2}x^2+x+5$

$=-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{11}{2} \rightarrow (1, \frac{11}{2})$

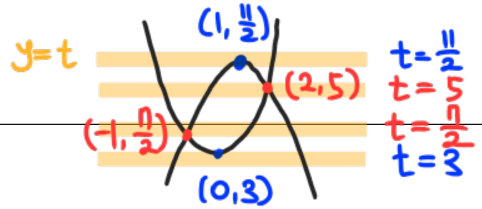
② 교점

$\frac{1}{2}x^2+3=-\frac{1}{2}x^2+x+5$

$x^2-x-2=0$

$x=-1$ 또는 $x=2$

$(-1, \frac{7}{2}), (2, 5)$



$\boxed{17}$

20170627

27. 최고차항의 계수가 a $(a>0)$인 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 직선 $y=4ax-10$과 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 두 점의 x좌표는 1과 5이다.
> (나) $1 \le x \le 5$에서 $f(x)$의 최솟값은 -8이다.

$100a$의 값을 구하시오. [4점]

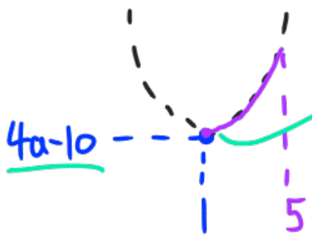
(가) $f(x)-(4ax-10)=a(x-1)(x-5)$

$f(x)-4ax+10=ax^2-6ax+5a$

$f(x)=ax^2-2ax+5a-10$

$=a(x-1)^2+4a-10$ → 꼭짓점 좌표 $(1, 4a-10)$

(나) $a>0$ 이므로 아래로 볼록



최솟값 $4a-10=-8$

$a=\frac{1}{2}$

$\boxed{50}$

고1 수학 총정리　Day4. 고차방정식, 절댓값 · 이차부등식

모수_모두의수학
모수 | 모두의수학

#삼차방정식, 사차방정식

① 인수분해 : 공식사용 OR 대입하여 0되는 값 찾아 인수정리

② $x^4+ax^2+b=0$ 꼴 : $x^2=X$로 치환 OR A^2-B^2꼴 변형

③ $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$ 꼴 : x^2으로 나누어 $x+\frac{1}{x}=X$치환

#근과 계수의 관계

$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$
동류항 계수비교

: $ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq 0)$의 세 근 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

#$x^2+x+1=0$의 근 w → $\overline{w}$도 근이다.

: $w^2+w+1=0,\ w^3=1$

: $w+\overline{w}=-1,\ w\overline{w}=1$

Why?
$\overline{w^2+w+1}=\overline{0}$
$\overline{w}^2+\overline{w}+1=0$.
$\overline{w}$도 근이다.

#연립방정식

① (1차&2차) : 1차를 2차에 대입

② (2차&2차) : 인수분해되는 식을 인수분해 후 다른 식에 대입

#연립부등식

: $A<B<C$ 꼴은 $\begin{cases}A<B\\B<C\end{cases}$의 꼴로 고쳐서 푼다

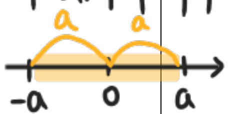
* $\begin{cases}A<B\\A<C\end{cases}$, $\begin{cases}A<C\\B<C\end{cases}$ No 👍

* $|x|$: 수직선에서 0과 x사이 거리

#절댓값 기호를 포함한 일차부등식

: 상수 a, b와 양수 c, d에 대하여

$|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a$ $(a>0)$



① $|\boxed{ax+b}|<c \Leftrightarrow -c<\boxed{ax+b}<c$

② $|ax+b|>c \Leftrightarrow ax+b<-c$ 또는 $ax+b>c$

③ $c<|ax+b|<d \Leftrightarrow -d<ax+b<-c$ 또는 $c<ax+b<d$

* $|x|=\begin{cases}x & (x\geq 0)\\-x & (x<0)\end{cases}$

: $|\underbrace{x-1}_{=0}|+|\underbrace{x-3}_{=0}|\leq 4$

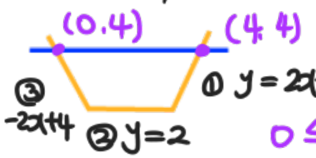
$x=1,\ x=3$ 기준

① $x\geq 3$ 일때
$x-1+x-3\leq 4$
$2x-4\leq 4$

② $1\leq x<3$ 일때
$x-1-(x-3)\leq 4$
$2\leq 4$

③ $x<1$ 일때
$-(x-1)-(x-3)\leq 4$
$-2x+4\leq 4$

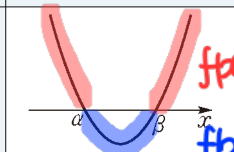
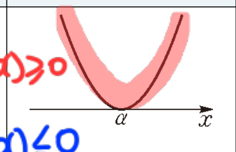
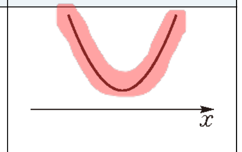
Graph 그려보자 →



$0\leq x\leq 4$

#이차부등식

: 그래프에서 y좌표의 부호에 주목

$ax^2+bx+c=0$의 판별식 D	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$y=ax^2+bx+c$의 그래프			
$ax^2+bx+c>0$의 해	$x<\alpha$ 또는 $x>\beta$	$x\neq\alpha$인 모든 실수	모든 실수
$ax^2+bx+c<0$의 해	$\alpha<x<\beta$	없다.	없다.
$ax^2+bx+c\geq 0$의 해	$x\leq\alpha$ 또는 $x\geq\beta$	모든 실수	모든 실수
$ax^2+bx+c\leq 0$의 해	$\alpha\leq x\leq\beta$	$x=\alpha$	없다.

20200915

15. x에 대한 삼차방정식 $x^3+(k-1)x^2-k=0$의 한 허근을 z라 할 때, $z+\bar{z}=-2$이다. 실수 k의 값은?
(단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.) [4점]

$x=1$. $1+k-1-k=0$.
근.

풀이① 인수정리

$(x-1)(\underbrace{x^2+kx+k}_{=0})=0$.

의 근 $z, \bar{z}$

$z+\bar{z}=-2=-k$

$k=2$

풀이② 삼차방정식 근과 계수 관계

세 근의 합 $1+z+\bar{z}=1+(-2)=-1=-(k-1)$

$k=2$

$\boxed{2}$

20191125

25. x, y에 대한 연립방정식

$$\begin{cases} x-2y=1 \\ 2x-y^2=6 \end{cases}$$

$x=2y+1$ 대입

의 해가 $x=\alpha$, $y=\beta$일 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하시오. [3점]

$2(2y+1)-y^2=6$

$y^2-4y+4=0$

$(y-2)^2=0$

$y=2$, $x=5$.

$\boxed{7}$

20190914

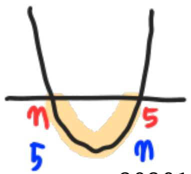
14. x에 대한 이차부등식

$$x^2-(n+5)x+5n\le 0$$

을 만족시키는 정수 x의 개수가 3이 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합은? [4점]

※ $12\le x\le 17$ 인 정수 x 개수
⇔ 12부터 17까지 정수 개수
⇔ 11부터 16까지 정수 개수
⇔ ...
⇔ 1부터 6까지 정수 개수 ∴ 6.
$=17-(12-1)=17-12+1$

$(x-n)(x-5)\le 0$



① $n<5$ 일때

$n\le x\le 5$

$5-n+1=3$

$n=3$

② $n>5$ 일때

$5\le x\le n$

$n-5+1=3$

$n=7$

$\boxed{10}$

20201112

12. x에 대한 부등식 $|x-7|\le a+1$을 만족시키는 모든 정수 x의 개수가 9가 되도록 하는 자연수 a의 값은? [3점]

$|x-7|\le \underbrace{a+1}_{>0}$

⇔ $-(a+1)\le x-7\le a+1$

⇔ $-a+6\le x\le a+8$

개수 $a+8-(-a+6)+1=9$

$2a+2=8$

$a=3$.

$\boxed{3}$

#좌표평면

: 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$에 대하여

① 두 점 사이의 거리 $\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

② 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

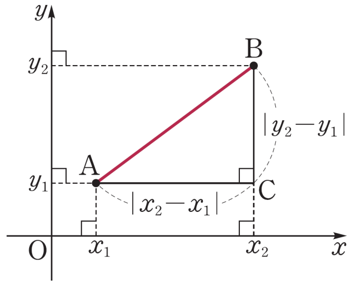
③ 선분 AB의 중점 $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

④ $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$, 삼각형 ABC의 무게중심

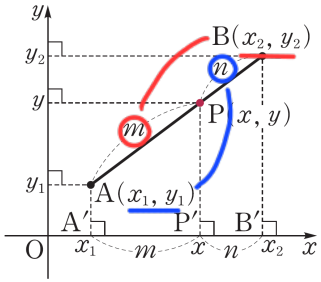
$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

⑤ 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점

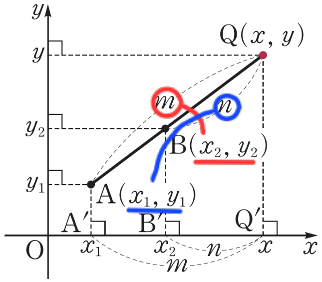
$$\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$$



피타고라스



내분



외분

☆기울기와 한 점

#직선의 방정식 세우기

① 기울기 2, $(1,\ 3)$ 지나는 직선 $y=2(x-1)+3$, $y=2x+1$

② $(1,\ 2)$, $(3,\ 0)$ 지나는 직선 $m=\frac{0-2}{3-1}=-1$, $y=-x+3$

③ 기울기 -1인 직선 $y=-x+k$

④ $(1,\ -2)$ 지나는 직선 $y=mx-m-2$, $y=m(x-1)-2$

모르는 건 미지수

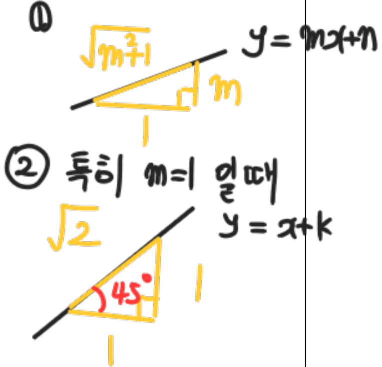
#두 직선의 평행과 수직

: 두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$에서

① 두 직선이 서로 평행 $\Leftrightarrow$ $m=m'$, $n\neq n'$

② 두 직선이 서로 수직 $\Leftrightarrow$ $mm'=-1$

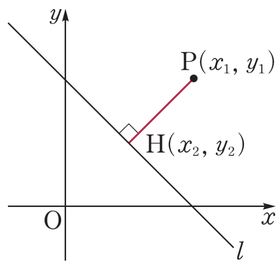
* 기울기와 삼각비



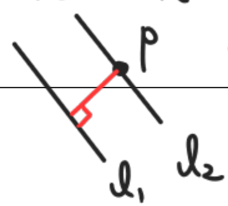
#점과 직선 사이의 거리

점 $(x_1,\ y_1)$과 직선 $l: ax+by+c=0$ 사이의 거리

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



* 직선과 직선 사이 거리



l_2 위의 한점 P 잡고, P에서 l_1 까지의 거리

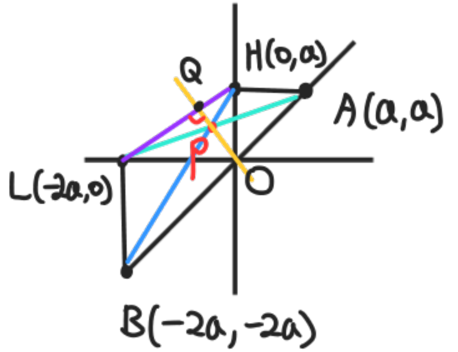
20200929

29. 제1사분면 위의 점 A와 제3사분면 위의 점 B에 대하여 두 점 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 점 A, B는 직선 $y=x$ 위에 있다.
(나) $\overline{OB}=2\overline{OA}$

점 A에서 y축에 내린 수선의 발을 H, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 L이라 하자. 직선 AL과 직선 BH가 만나는 점을 P, 직선 OP가 직선 LH와 만나는 점을 Q라 하자. 세 점 O, Q, L을 지나는 원의 넓이가 $\frac{81}{2}\pi$일 때, $\overline{OA}\times\overline{OB}$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

$\boxed{162}$

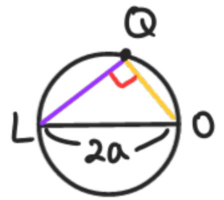


$\overleftrightarrow{AL}$ $y=\frac{1}{3}x+\frac{2a}{3}$
$\overleftrightarrow{BH}$ $y=\frac{3}{2}x+a$] 연립 P.

$\frac{1}{3}x+\frac{2a}{3}=\frac{3}{2}x+a$

$x=-\frac{2a}{7},\ y=\frac{4a}{7}$ $P\left(-\frac{2a}{7}, \frac{4a}{7}\right)$

$\overleftrightarrow{LH}$ $y=\frac{1}{2}x+a$
$\overleftrightarrow{OP}$ $y=-2x$ } 수직



$\pi a^2=\frac{81}{2}\pi$

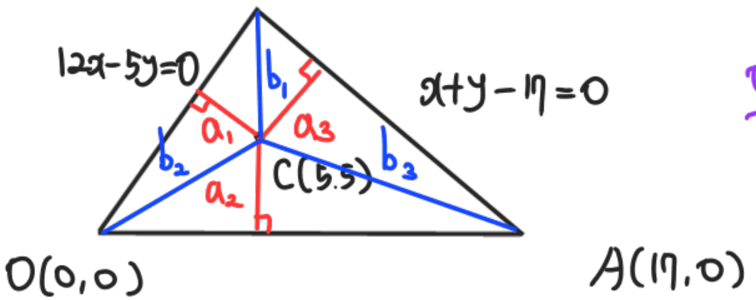
$a=\frac{9}{\sqrt{2}}$

$\overline{OA}\times\overline{OB}=\sqrt{2}a\times2\sqrt{2}a$
$=4a^2$
$=4\times\frac{81}{2}=162$

20200930

30. 좌표평면 위에 세 점 A(17, 0), B(5, 12), C(5, 5)가 있다. 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원이 삼각형 OAB와 서로 다른 세 점에서만 만나도록 하는 모든 r의 값의 곱을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

$\boxed{35}$

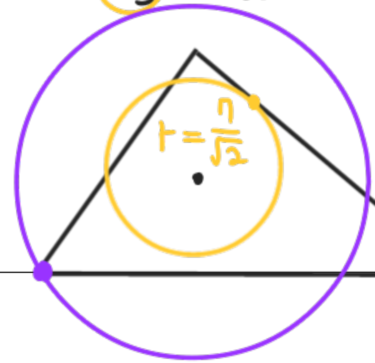


$\frac{5}{13}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{25}{169}<\frac{1}{2}$

$a_1=\frac{35}{\sqrt{12^2+5^2}}=\frac{35}{13},\ a_2=5,\ a_3=\frac{7}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{7}{\sqrt{2}}$

$b_1=7,\ b_2=5\sqrt{2},\ b_3=\sqrt{12^2+5^2}=13$

$a_1<a_3<a_2<b_1<b_2<b_3$



$r=5\sqrt{2}$

$\frac{7}{\sqrt{2}}\times5\sqrt{2}=35$

중학교 기하 복습 함께 하기

#원의 방정식

: 중심의 좌표 (a, b), 반지름의 길이 r

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

→ $x^2+y^2-2x+4y-11=0$ 의 중심의 좌표, 반지름의 길이?

$x^2-2x+1-1+y^2+4y+4-4-11=0$ (1,-2) 4

$(x-1)^2+(y+2)^2=16$

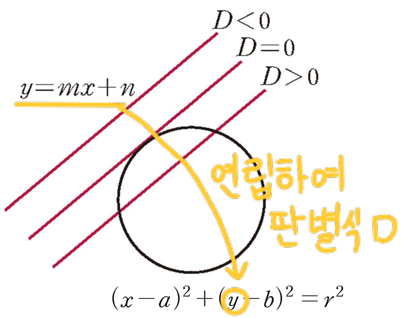
#원과 직선의 위치 관계

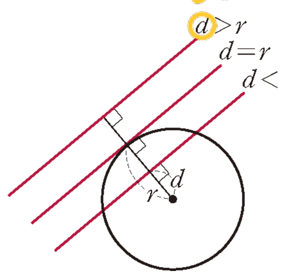
① $D>0 \Leftrightarrow d<r \Leftrightarrow$ 서로 다른 두 점에서 만난다

② $D=0 \Leftrightarrow d=r \Leftrightarrow$ 한 점에서 만난다(접한다)

③ $D<0 \Leftrightarrow d>r \Leftrightarrow$ 만나지 않는다

중심에서 직선까지의 길이





#원 $x^2+y^2=r^2$의 접선의 방정식

중심이 원점일 때만

① 기울기가 m인 접선의 방정식 $y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$

② 원 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식 $x_1x+y_1y=r^2$

→ 점 $(2, -4)$에서 원 $x^2+y^2=2$에 그은 접선의 방정식?

$y=m(x-2)-4$

$mx-y-2m-4=0.$

중심 (0,0)에서의 거리=반지름 길이

$\dfrac{|2m+4|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{2}$

$|2m+4|=\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}$

$4m^2+16m+16=2m^2+2$

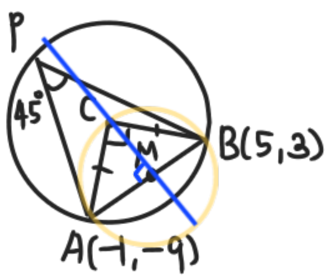
$m^2+8m+7=0.$ $m=-1$ 또는 $m=-7$

$\therefore y=-x-2$ 또는 $y=-7x+10$

20200920

20. 좌표평면 위의 두 점 A$(-1, -9)$, B$(5, 3)$에 대하여 $\angle$APB$=45^\circ$를 만족시키는 점 P가 있다. 서로 다른 세 점 A, B, P를 지나는 원의 중심을 C라 하자. 선분 OC의 길이를 k라 할 때, k의 최솟값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

$\boxed{4}$



$\overline{AB}=\sqrt{6^2+12^2}=6\sqrt{5}$

$\overline{AB}$ 중점 M(2,-3), $\overline{AB}$의 기울기 2

C는 $\overline{AB}$의 수직이등분선 $y=-\frac{1}{2}x-2$ 위의 점

C(2a, -a-2)

C는 $\overline{AB}$가 지름인 원 위의 점, $\overline{CM}=\overline{AM}=3\sqrt{5}$

$(2a-2)^2+(-a-2-(-3))^2=45.$

$5a^2-10a-40=0,$ $a^2-2a-8=0.$

$a=4$ 또는 $a=-2,$

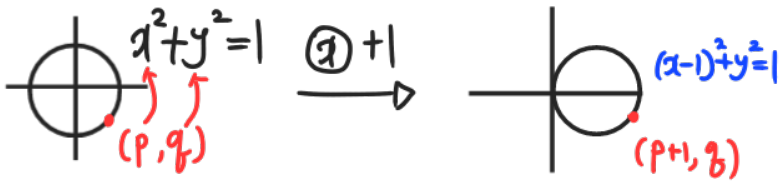
C(8,-6) 또는 C(-4,0). $\overline{OC}=10$ 또는 4

#평행이동

x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면

① 점 $\mathrm{P}(x,\ y) \to \mathrm{P}'(x+a,\ y+b)$

② 도형의 방정식 $f(x,\ y)=0 \to f(x-a,\ y-b)=0$



#대칭이동

점 $(x,\ y)$를 다음에 대하여 대칭이동하면

① x축 $\to (x,\ -y)$　　③ 원점 $\to (-x,\ -y)$

② y축 $\to (-x,\ y)$　　④ 직선 $y=x \to (y,\ x)$

도형의 방정식 $f(x,\ y)=0$을 다음에 대하여 대칭이동하면

① x축 $\to f(x,\ -y)=0$　　③ 원점 $\to f(-x,\ -y)=0$

② y축 $\to f(-x,\ y)=0$　　④ 직선 $y=x \to f(y,\ x)=0$

점이 아니라 식

Q. $f(x,\ y)=0$ 평행이동 후 대칭이동하면?

* $f(x)=2x$, $f(x+1)=2x+2$, $f(-x+1)=-2x+2$

$f(x,y)=0 \xrightarrow{x+1} f(x-1,y)=0 \xrightarrow{y축\ 대칭} f(-x-1,y)=0$

$x^2+y^2-1=0 \qquad (x-1)^2+y^2-1=0 \qquad (-x-1)^2+y^2-1=0$

└ x만 $-x$로 바뀜.

#점대칭과 선대칭(그래프가 두 개 이상 나오면 관계 확인하기!)

정의역의 모든 x에 대해… 최소 양수

① $f(x+p)=f(x)$ → 주기 p인 주기함수

② $f(x)=f(x-a)+b$ → 반복(?) 함수

③ $f(-x)=f(x)$ → 우함수(y축에 대칭인 함수)

④ $f(-x)=-f(x)$ → 기함수(원점에 대칭인 함수)

→ (우함수)×(우함수)=(우함수), (기함수)×(기함수)=(우함수)

(우함수)×(기함수)=(기함수)

⑤ $f(a-x)=f(a+x)$ OR $f(x)=f(2a-x)$

→ $x=a$에 대칭인 함수　x 대신 $a-x$ 대입

⑥ $f(a-x)+f(a+x)=2b$ OR $f(x)+f(2a-x)=2b$

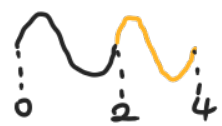
→ $(a,\ b)$에 대칭인 함수

⑦ $y=f(x)$를 $y=x$에 대칭이동하면 → $x=f(y)$

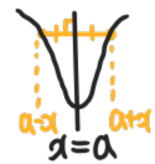
⑧ $y=f(x)$를 $x=a$에 대칭이동하면 → $y=f(2a-x)$

⑨ $y=f(x)$를 $(a,\ b)$에 대칭이동하면 → $2b-y=f(2a-x)$

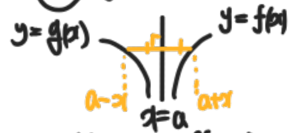
① $f(x)=f(x+2)$



③⑤ $f(a-x)=f(a+x)$

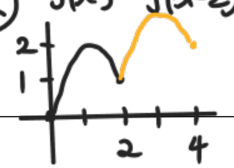


⑧ $g(x)=f(2a-x)$

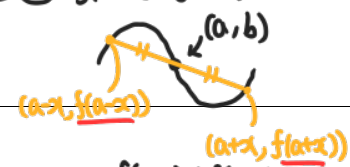


$g(a-x)=f(a+x)$

② $f(x)=f(x-2)+1$



④⑥ $f(a-x)+f(a+x)=2b$



중점! $\dfrac{f(a-x)+f(a+x)}{2}=b$

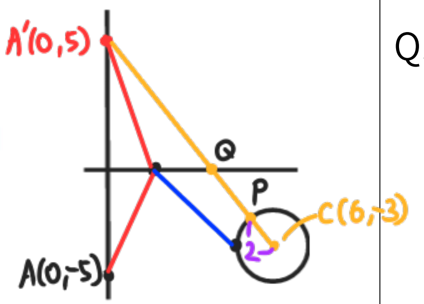
⑨ $g(x)=2b-f(2a-x)$

$\dfrac{f(a-x)+g(a+x)}{2}=b$

20200920

13. 원 $(x-6)^2+(y+3)^2=4$ 위의 점 P와 x축 위의 점 Q가 있다. 점 A(0, −5)에 대하여 $\overline{AQ}+\overline{QP}$의 최솟값은? [3점]

$\overline{A'C}=10$, $\overline{CP}=2$ $\boxed{8}$



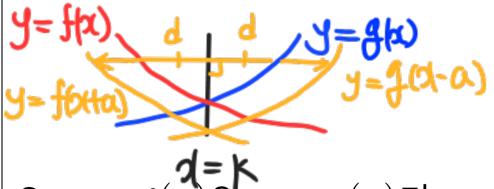
Q. $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 $x=k$에 대칭이다.

→ $y=f(x+a)$와 $y=g(x-a)$는?

$f(k-x)=g(k+x)$

↓ $x-a$ 대입

$f(k-x+a)=g(k+x-a)$



$\boxed{x=k \text{ 대칭}}$

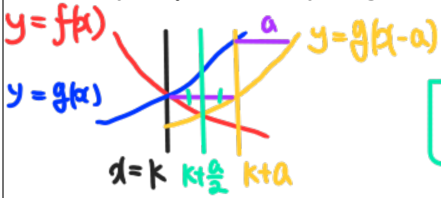
Q. $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 $x=k$에 대칭이다.

→ $y=f(x)$와 $y=g(x-a)$는?

$f(k-x)=g(k+x)$

↓ $x-\frac{a}{2}$ 대입

$f(k+\frac{a}{2}-x)=g(k+\frac{a}{2}+x-a)$



$\boxed{x=k+\frac{a}{2} \text{ 대칭}}$

Q. $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 $x=k$에 대칭이다.

→ $y=h(f(x))$와 $y=h(g(x))$는?

$f(k+x)=g(k-x)$

$h(f(k+x))=h(g(k-x))$

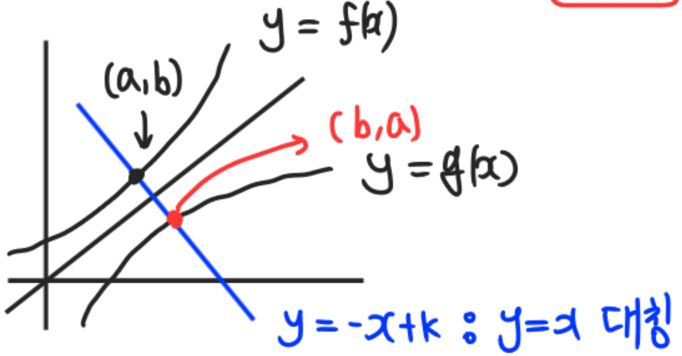
$\boxed{x=k \text{ 대칭}}$

수I에서 배우는 함수

Q. $f(x)=2^x$와 $g(x)=\log_2 x$가 $y=x$에 대칭이다.

$y=f(x)$와 $y=-x+k$의 교점 $(a,\ b)$이다.

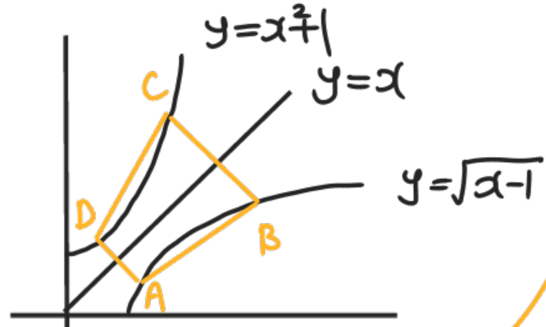
→ $y=g(x)$와 $y=-x+k$의 교점은? $\boxed{(b,a)}$



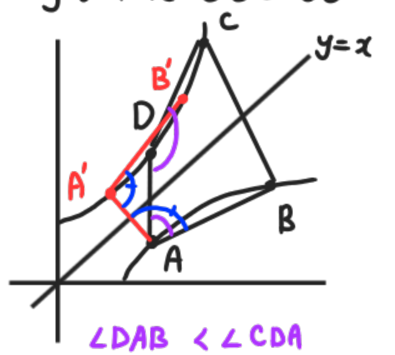
Q. $y=\sqrt{x-1}$ 위의 점 A, B, $y=x^2+1(x\geq 0)$ 위의 점 C, D

사각형 ABCD는 ∠A=∠D인 등변사다리꼴

→ A(2, 1)일 때 D의 좌표는?



why ? 자세한 설명은 영상참고



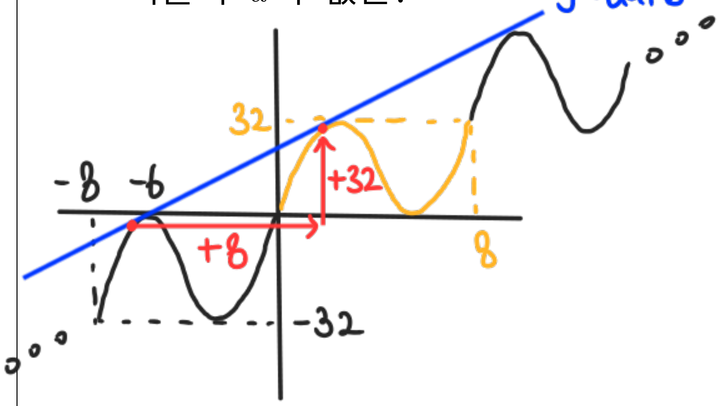
등변사다리꼴도 y=x 대칭

$\boxed{\therefore D(1,2)}$

→ Graph 그리는 법 수Ⅱ

Q. $-8 \leq x \leq 0$일 때 $f(x)=x(x+6)^2$이고
모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x-8)+32$
직선 $y=ax+b$가 $y=f(x)$와 무수히 많은 점에서 접한다
→ 기울기 a의 값은?

$\boxed{4}$

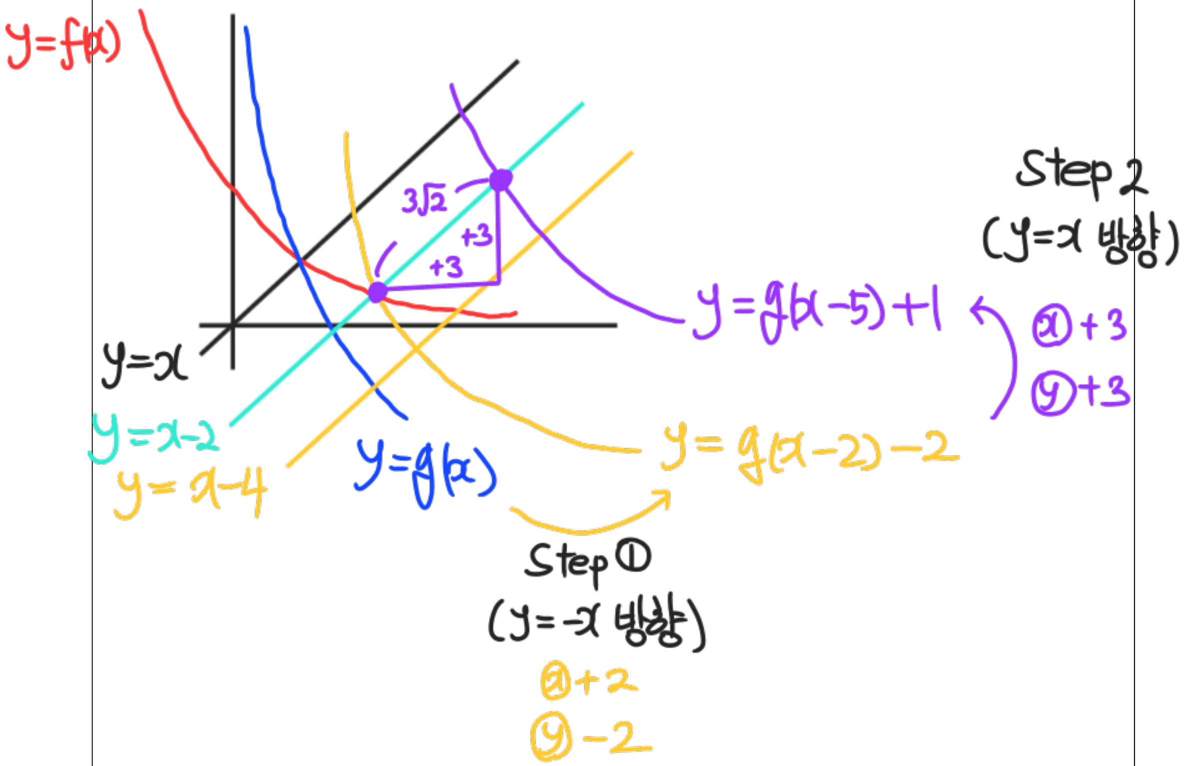


수Ⅰ 함수

Q. $f(x)=3^{-x}$와 $g(x)=-\log_3 x$가 $y=x$에 대칭이다.
$y=x-2$가 $y=f(x)$, $y=g(x-5)+1$와 만나는 점을 각각
A, B라 하자.
→ $\overline{AB}$의 길이는?

$y=g(x)$를 ⓧ+5 ⓨ+1

$\boxed{3\sqrt{2}}$



이 문제는 설명을 필기로 담기 쉽지 않네요.
이해가 안 되시면 영상을 참고해주세요.

Day9. 집합, 명제, 절대부등식

#집합

① $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

② $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

③ $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$, $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$

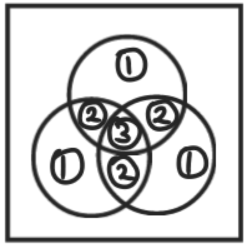
④ $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

⑤ $n(A\cup B\cup C)=\underbrace{n(A)+n(B)+n(C)}_{①,②,③}$
$\quad \underbrace{-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)}_{②,③}+\underbrace{n(A\cap B\cap C)}_{③}$

경우의 수

⑥ $A-B=A\cap B^C=A-(A\cap B)=(A\cup B)-B$

⑦ $A-B=\varnothing \iff A\subset B$



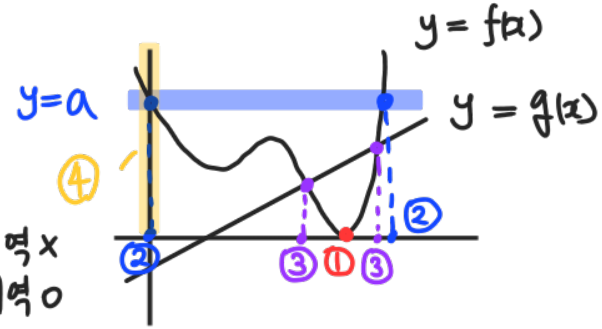
#자주 쓰는 표현

① $\{x|f(x)=0\}$

② $\{x|f(x)=a\}$

③ $\{x|f(x)=g(x)\}$

④ $\{f(x)|x\in X\}$ - 공역 x
정의역 치역 o



#실수의 기본 성질

: a, b가 실수, n이 자연수일 때

$x^2+xy+y^2=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2\geq 0$

① $a>b \iff a-b>0$

② $a^2\geq 0$, $a^2+b^2\geq 0$

③ $a^2+b^2=0 \iff a=b=0$

④ $|a|+|b|=0 \iff a=b=0$

⑤ $|a|^2=a^2$, $|a||b|=|ab|$

⑥ $\sqrt{a^2}=|a|$, $(\sqrt{a})^2=a$

⑦ $a>b \iff a^3>b^3 \iff a^{2n-1}>b^{2n-1} \iff a^{\frac{1}{2n-1}}>b^{\frac{1}{2n-1}}$

: a, b가 양수, n이 자연수일 때

⑧ $a>b \iff a^2>b^2 \iff a^n>b^n \iff a^{\frac{1}{n}}>b^{\frac{1}{n}}$

⑨ $a>b \iff \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

수학Ⅰ 거듭제곱근

Q. $2^{-\sqrt[3]{2}}$, 3^{-1} 대소관계는?

$2^{-\sqrt[3]{2}}>3$

$\iff 2^{\sqrt[3]{2}}<3$

$\iff 2^{\sqrt[3]{2}}<2^{\frac{3}{2}}<3$

$\iff 2^{\sqrt[3]{2}}<2^{\frac{3}{2}}$, $2^{\frac{3}{2}}<3^2$

$\iff \sqrt[3]{2}<\frac{3}{2}$, $(2^{\frac{3}{2}})^2<3^2$

$\iff 2<\frac{27}{8}$, $8<9$

#산술평균과 기하평균

$a>0,\ b>0$일 때 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

#코시-슈바르츠 부등식

$a,\ b,\ x,\ y$가 실수일 때 $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$

(단, 등호는 $a:b=x:y$일 때 성립)

#여러 가지 증명법

: 귀류법, 대우를 이용한 증명, 수학적 귀납법

수학I

* 최대/최소
1. 이차함수
2-1. 분수, 역수꼴 → 산술·기하
2-2. 문자 2개 이상 이차식 → 코시-슈바르츠
3. 미분 (수학II)

Q. $\sqrt{2}$는 무리수. $3+\sqrt{2}$는 무리수?

$3+\sqrt{2}$ 를 유리수라 하면 $(3+\sqrt{2})-3=\sqrt{2}$ 가 유리수.
유리수 − 유리수 = 유리수

Q. 자연수 n에 대하여 n^2이 홀수, n은 홀수?

⇔ n이 홀수 아니면 n^2이 홀수 아니다.

⇔ n이 짝수면 n^2이 짝수다.

$n=2m$ (m은 자연수) $\quad n^2=2\cdot 2m^2$

Q. $x>0,\ y>0$일 때, $(2x+3y)\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\right)$의 최솟값은?

① 틀린 방법 $\quad 2x=3y,\ \frac{2}{x}=\frac{3}{y}$ 동시 성립 X

$2x+3y \geq 2\sqrt{6xy}$, $\frac{2}{x}+\frac{3}{y} \geq 2\sqrt{\frac{6}{xy}}$

$\therefore (2x+3y)\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\right) \geq 2\sqrt{6xy}\cdot 2\sqrt{\frac{6}{xy}}=12$

② 옳은 방법

전개, $13+6\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)$

$\geq 13+6\times 2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}}$

$=25$

Q. $x>0,\ y>0,\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$일 때, $x+25y$의 최솟값은?

$x+25y=(x+25y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=26+\frac{25y}{x}+\frac{x}{y} \geq 26+2\sqrt{\frac{25y}{x}\cdot\frac{x}{y}}$

$=36$

20150627(고2나)

27. 실수 전체의 집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

$$n(A)=5,\quad B=\left\{\frac{x+a}{2}\,\middle|\,x\in A\right\}$$

이다. 두 집합 A, B가 다음 조건을 만족시킬 때, 상수 a의 값을 구하시오. [4점]

(가) 집합 A의 모든 원소의 합은 28이다.
(나) 집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합은 49이다.
(다) $A\cap B=\{10,\ 13\}$

$A=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=28$

$B=\left\{\frac{x_1+a}{2},\frac{x_2+a}{2},\frac{x_3+a}{2},\frac{x_4+a}{2},\frac{x_5+a}{2}\right\}$

$\rightarrow \frac{1}{2}(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)+\frac{5}{2}a$

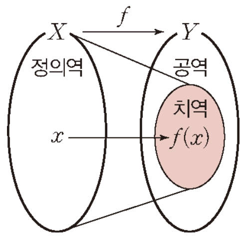
49 = (A 원소 합) + (B 원소 합) − (A∩B 원소 합)

$49=28+\frac{1}{2}\times 28+\frac{5}{2}a-23$

$49=19+\frac{5}{2}a,\ \frac{5}{2}a=30,\ a=12$ $\quad\boxed{12}$

Day10. 함수, 합성함수, 역함수

#용어와 성질



: **치역** $\{f(x) | x \in X\}$

: **일대일함수** $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$인 함수

: **일대일대응** 치역과 공역이 같은 일대일함수

: **항등함수** 정의역 X의 모든 x에 대하여 $f(x)=x$인 함수

: **상수함수** 정의역 X의 모든 x에 대하여 $f(x)=c$인 함수

: **역함수의 식** x, y 바꾸어 쓴 후 y에 대하여 정리

: $(f^{-1} \circ f)(x) = x \ (x \in X)$, $(f \circ f^{-1})(y) = y \ (y \in Y)$

: $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$, $(f^{-1})^{-1} = f$

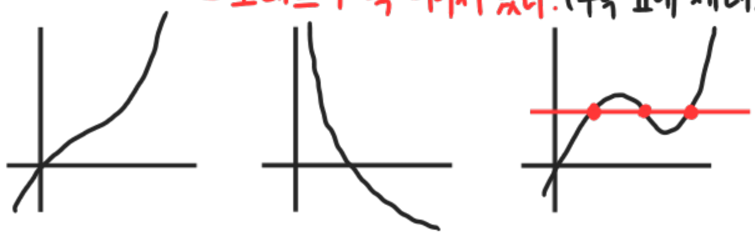
: 역함수가 존재 ⇔ 일대일대응

오른쪽 위로 ↗ 오른쪽 아래로 ↘

: 실수 전체에서 연속인 함수가 역함수가 있다면, 증가 OR 감소함수

그래프가 쭉 이어져 있다.(수학 II에 제대로 된 개념)

e.g.



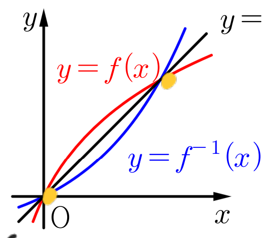
일대일 대응 ○ ○ ×

#함수와 그 역함수의 그래프

: 함수의 그래프와 그 역함수의 그래프는 $y=x$에 대하여 대칭

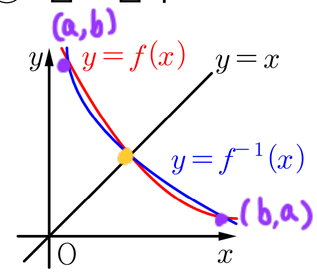
: 연속일 때 교점의 위치 관찰

① 증가함수



{ y=x 위에 생김. 교점 개수는 무엇이든 가능.

② 감소함수



{ 홀수개 또는 무한히.

$f(x) = f^{-1}(x)$

$f(f(x)) = x$

① $f(a)=a$ 일 때, 교점은 $y=x$ 위 (a,a)

② $f(a)=b$ $(a \neq b)$ 일 때

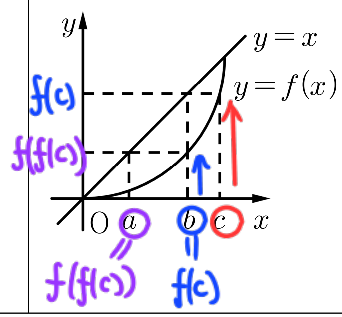
$f(a)=b$, $f(b)=a$

$f(x)$는 (a,b), (b,a) 지남

① $y=x$에 대칭
② 한쌍씩 생긴다
③ 감소함수다
④ (c,c) 지난다
(c는 a, b 사이의 값)

#합성함수의 그래프

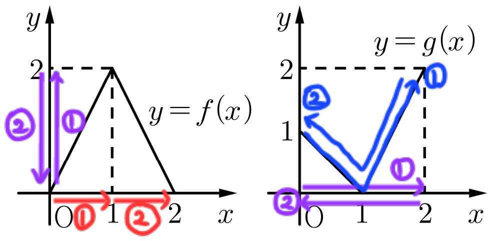
① $f \circ f(c)$의 값은?

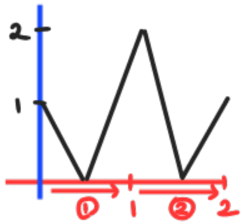


$f(f(c))$
$= f(b)$
$= a$

#합성함수의 그래프

② $y=g\circ f(x)$, $y=f\circ g(x)$의 그래프를 그리시오.

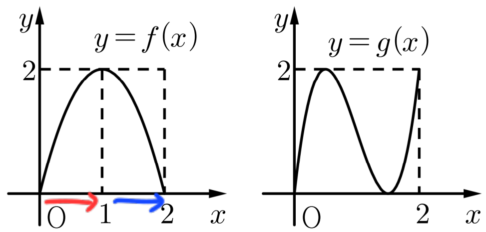


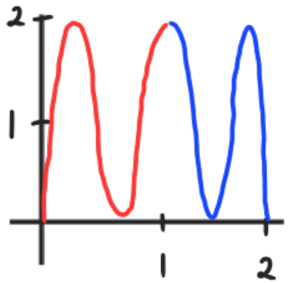


$y=g\circ f(x)$

$y=f\circ g(x)$

③ $y=g\circ f(x)$의 그래프 개형을 그리시오.





20170620(고2나)

20. 함수

$$f(x)=|2x-4| \quad (0\le x\le 4)$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

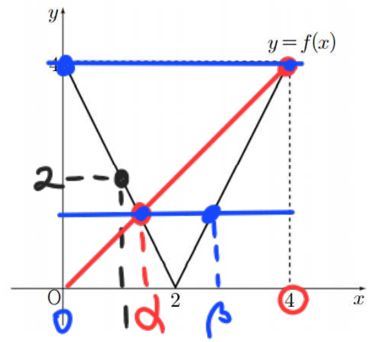
$\boxed{ㄱ, ㄴ, ㄷ}$

<보 기>

ㄱ. $f(f(1))=0$

ㄴ. 방정식 $f(x)=x$의 모든 실근의 개수는 2이다.

ㄷ. 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 모든 실근의 합은 8이다.



ㄱ $f(f(1))=f(2)=0$

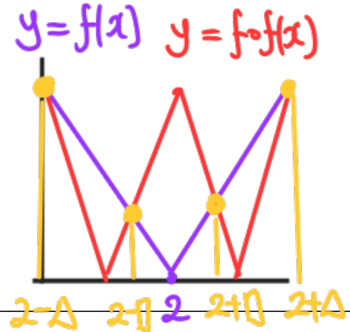
ㄴ $y=f(x)$와 $y=x$의 교점 2개, α와 4

ㄷ 풀이① $f(\square)=\square$, $\square=\alpha$ 또는 $\square=4$

$f(x)=\alpha$ 또는 $f(x)=4$

$\rightarrow (\alpha+\beta)+(0+4)=8.$

풀이②

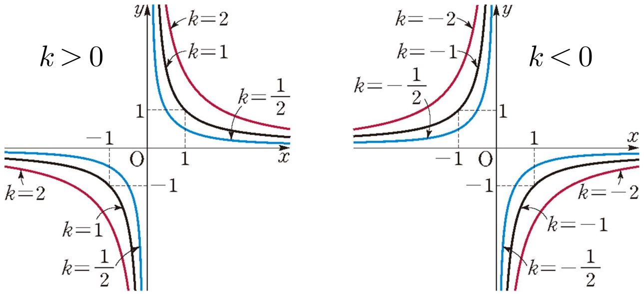


$2\times4=8$

#유리함수 $y=\dfrac{k}{x}\,(k\neq 0)$의 그래프

: $k>0$이면 제1, 3사분면, $k<0$이면 제2, 4사분면

: $|k|$ 값이 커질수록 원점에서 멀어짐



#유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q\,(k\neq 0)$의 그래프

$x-p=0$

: **점근선** $x=p$, $y=q$

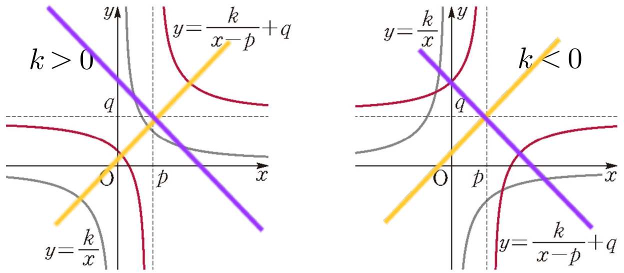
: 정의역은 $x=p$를 제외한 실수 전체의 집합

: 치역은 $y=q$를 제외한 실수 전체의 집합

: 점 (p, q)에 대하여 **대칭**

: 직선 $y=\pm(x-p)+q$에 대하여 **대칭**

(p, q) 지나고 기울기 ± 1



#유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\,(ad-bc\neq 0,\ c\neq 0)$의 그래프 그리기

Q. $y=\dfrac{3x+2}{x-1}$의 그래프를 그리시오.

Step1. $y=\dfrac{k}{x-p}+q$꼴로 바꾼다. (Tip 나머지정리)

Step2. 점근선을 표시한다.

Step3. k의 부호를 보고 그래프를 그린다.

Step1.

$$\frac{3x+2}{x-1}=\frac{\overset{\oplus}{5}}{x-1}+3$$

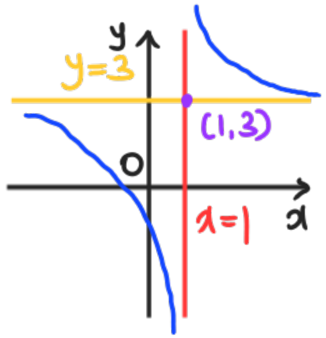
$$\begin{array}{r} 3 \\ x-1\,\overline{)\,3x+2} \\ 3x-3 \\ \hline 5 \end{array}$$

$3x+2=3(x-1)+5$

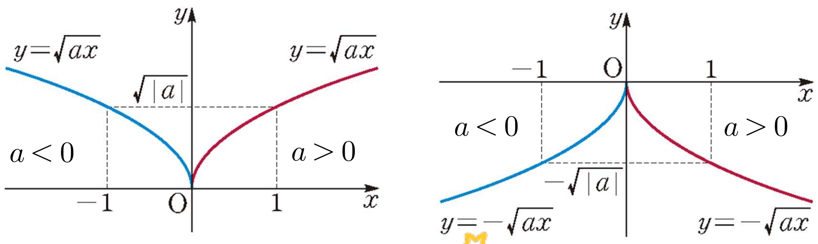
$x-1$로 나눈 나머지 → $x=1$ 대입

Step2 $x=1$, $y=3$

Step3.



#무리함수 $y=\sqrt{ax}$, $y=-\sqrt{ax}$ $(a\neq 0)$의 그래프



: $y=x^2+1(x\geq 0)$는 $y=\sqrt{x-1}$의 역함수 역함수 보는 눈썰미

#무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$, $y=-\sqrt{ax+b}+c(a\neq 0)$ 의 그래프 그리기

Q. $y=-\sqrt{6-2x}+2$의 그래프를 그리시오.

Step1. $y=\pm\sqrt{a(x-p)}+q$꼴로 바꾼다.

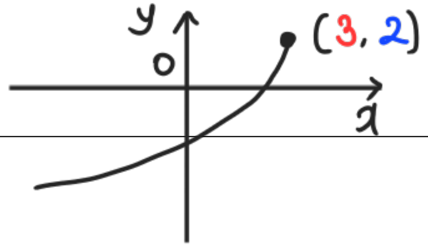
Step2. 점 $(p,\ q)$를 표시한다.

Step3. a의 부호와 루트 앞의 부호를 보고 그래프를 그린다.

Step1. $y=-\sqrt{-2(x-3)}+2$

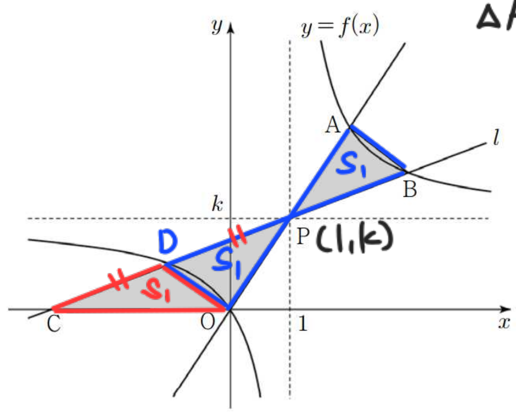
Step2. $(3,\ 2)$ 가 시작점(정식 용어 아님)

Step3. 둘다 음수. ↗ 모양.



20160930(고2나)

30. 그림과 같이 함수 $f(x)=\dfrac{k}{x-1}+k\ (k>1)$의 그래프가 있다. 점 $\mathrm{P}(1,\ k)$에 대하여 직선 OP와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점 중에서 원점이 아닌 점을 A라 하자. 점 P를 지나고 원점으로부터 거리가 1인 직선 l이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 제1사분면에서 만나는 점을 B, x축과 만나는 점을 C라 하자. 삼각형 PBA의 넓이를 S_1, 삼각형 PCO의 넓이를 S_2라 할 때, $2S_1=S_2$이다. 상수 k에 대하여 $10k^2$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, 직선 l은 좌표축과 평행하지 않다.) [4점]



△APB, △OPD 합동(∵점 P에 대한 대칭)

△CDO=△PDO=S_1

이므로 $\overline{CD}=\overline{DP}$.

C(a,0)라 하면

D는 $\overline{CP}$의 중점 $\left(\frac{a+1}{2}, \frac{k}{2}\right)$

y= f(x)에 대입

$\frac{k}{2}=\frac{k}{\frac{a-1}{2}}+k$

$\frac{k}{-2}=\frac{k}{\frac{a-1}{2}}$, $a=-3$

C(-3,0), D$\left(-1, \frac{k}{2}\right)$

C(-3,0), P(1,k)를 지나는 직선 l: $kx-4y+3k=0$

원점까지의 거리 $d=\dfrac{|3k|}{\sqrt{k^2+16}}=1$

$9k^2=k^2+16$, $k^2=2$

$k=\sqrt{2}$ (∵k>1)

$\boxed{20}$

#합의 법칙과 곱의 법칙

: **합의 법칙** 중복되지 않게 경우를 나누어 조사 후 더한다.

: **곱의 법칙** 각 경우에 대하여 같은 구조의 상황이다.

Q. 이번 학기에 수강할 수학, 탐구 과목을 선택하는 경우의 수?

수학 과목에 따라 가능한 탐구 과목	
수학	탐구
미적분, 기하	생명과학 Ⅰ, 지구과학 Ⅰ
확률과 통계	생활과 윤리, 사회 문화, 한국지리

미적분 — 생명과학 I, 지구과학 I

기하 — 생명과학 I, 지구과학 I

확률과 통계 — 생활과 윤리, 사회 문화, 한국 지리

곱의 법칙 $2\times 2 = 4$

합의 법칙

$4+3$

$\boxed{7}$

#순열

: 서로 다른 n개에서 $r(0<r\le n)$개를 택하여 일렬로 나열하는 것을 n개에서 r개를 택하는 순열이라 하고, 이 순열의 수를 기호로 ${}_{n}\mathrm{P}_{r}$

: ${}_{n}\mathrm{P}_{r}=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)=\dfrac{n!}{(n-r)!}$ (단, $0<r\le n$)

: ${}_{n}\mathrm{P}_{n}=n!$, ${}_{n}\mathrm{P}_{0}=1$, $0!=1$

A, B, C, D, E

Q. 서로 다른 5가지 맛의 아이스크림이 있다. 이 중에서 서로 다른 3가지 맛의 아이스크림을 골라 엄마, 아빠, 동생에게 나누어주는 경우의 수

엄 아 동

A — B — C, D, E

B, C, D, E / C, D, E

$5\times 4\times 3 = 60$

$\boxed{60}$

Day12. 순열과 조합

#조합

: 서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 $r(0<r\le n)$개를 택하는 것을 n개에서 r개를 택하는 조합이라 하고, 이 조합의 수를 기호로 ${}_n\mathrm{C}_r$

: $${}_n\mathrm{C}_r=\frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$ (단, $0\le r\le n$)

: ${}_n\mathrm{C}_n=1$, ${}_n\mathrm{C}_0=1$, ${}_n\mathrm{C}_1=n$

Q. 서로 다른 5가지 맛의 아이스크림이 있다. 이 중에서 서로 다른 3가지 맛의 아이스크림을 고르는 경우의 수

엄	아	동
A	B	C
A	C	B
B	A	C
B	C	A
C	A	B
C	B	A

모두 같다.

3! = 6개씩 묶어서 1개로 count.

$\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}=10$ $\boxed{10}$

#성질

: ① ${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$ (단, $0\le r\le n$)

: ② ${}_n\mathrm{C}_r={}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_r$ (단, $1\le r<n$)

결과 외우기

: ③ ${}_n\mathrm{C}_r\times{}_r\mathrm{C}_k={}_n\mathrm{C}_k\times{}_{n-k}\mathrm{C}_{r-k}$ (단, $0\le k\le r\le n$)

: ④ ${}_n\mathrm{P}_r=n\times{}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$ (단, $1\le r\le n$)

: ⑤ ${}_n\mathrm{P}_r={}_{n-1}\mathrm{P}_r+r\times{}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$ (단, $1\le r<n$)

생각 연습.

(나를 포함한 n명 중)

① 당첨될 r명 고르기
⇔ 당첨 안 될 n-r명 고르기

② 내가 당첨 & 나머지 n-1명 중 r-1명의 당첨자
+ 내가 꽝 & 나머지 n-1명 중 r명의 당첨자

③ n명 중 1라운드 진출 r명 & r명 중 결승 진출 k명 선택
⇔ n명 중 결승 진출 k명 & 나머지 n-k명 중 1라운드까지만 진출 r-k명 선택

④ 그냥 r명 한 줄 세우기
⇔ 제일 앞자리 올 한 명 선택 & 남은 n-1명 중 r-1명 그 뒤로 줄 세우기

⑤ 나 빼고 r명 줄 세우기
+ r개 자리 중 내 자리 선택 & 남은 n-1명을 남은 r-1 자리에 줄 세우기