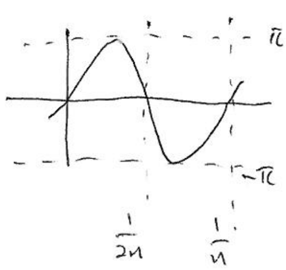
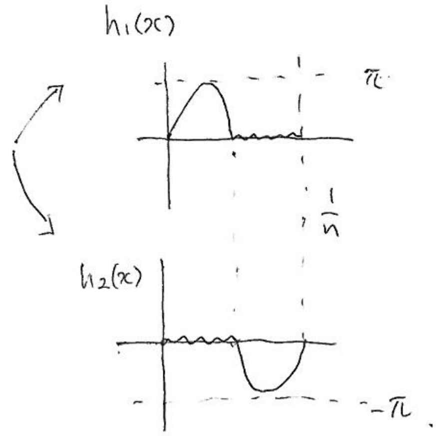
* 2021학년도 대수능 수학 가형 20번.

$f(x) = \pi \sin 2\pi x$ $\quad g(x) = 0$ or 1. $\quad f(nx) = \pi\sin(2n\pi x)$

$h(x) = f(nx)\cdot g(x)$. → 연속.

$\int_{-1}^{1} h(x)\,dx = 2$, $\quad \int_{-1}^{1} x h(x)\,dx = -\frac{1}{32}$.



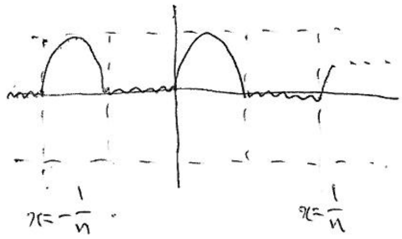


$\int_{-1}^{1} h(x)\,dx = 2 > 0$ 이므로 $h_1(x) = h(x)$.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \pi\sin(2n\pi x)\,dx = \left[-\frac{1}{2n}\cos(2n\pi x)\right]_0^{\frac{1}{2}} = \left(-\frac{1}{2n}\cos(n\pi) + \frac{1}{2n}\right)\Big|_{n=1} = 1. \Rightarrow \int_{-1}^{1} = 2.$$

→ $\int_0^{\frac{1}{2}}$ 을 예로 든 것은 $n=1$ 인 경우임.

$h(x)$ →



$(f(nx) \geq 0) \rightarrow h(x) = f(nx)$.
$(f(nx) < 0) \rightarrow h(x) = 0$.

$xh(x)$ →

실제 $\int$ 계산을 할 때는 구간 분리의 불편함을 없애고, $\int_0^1$ 적분을 하면 $\int_{-1}^{1}$ 와 같은 값이 된다. $(x<0)$ 에서 유의미한 값$(\neq 0)$을 갖는 부분을 y축 대칭 시키면 $(x>0)$ 에서 무의미한 값$(=0)$을 갖는 부분으로 대체된다.

$$\therefore \int_{-1}^{1} xh(x)\,dx = \int_0^1 x\pi\sin(2n\pi x)\,dx$$

$$\begin{Bmatrix} -\frac{1}{2n}\cos(2n\pi x) & x \\ \pi\sin(2n\pi x) & 1 \end{Bmatrix}$$

$$= \left[-\frac{1}{2n}\times x \times \cos(2n\pi x)\right] - \int -\frac{1}{2n}\cos(2n\pi x)\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2n}\cdot x\cdot\cos(2n\pi x)\right]_0^1 + \left[\frac{1}{4n^2\pi}\sin(2n\pi x)\right]_0^1$$

$$= \left\{\left(-\frac{1}{2n}\times 1\right) - (0)\right\} + \{0-0\} = -\frac{1}{2n} = -\frac{1}{32}. \qquad \therefore n = 16$$

* $\int_{-\frac{1}{n}}^{-\frac{1}{2n}} + \int_0^{\frac{1}{2n}} = -\frac{1}{2n^2}$ ⇒ $(-1, 1)$ 사이에 n개가 있으므로 $-\frac{1}{2n}$ 과 같은 방식도 가능.

* 2021 학년도 대수능 수학 가형 28번.

$a<b$. $f(x)=(x-a)(x-b)^2$, $g(x)=x^3+x+1$. $h(x)=f\circ g^{-1}(x)$.

$f'(x)=(x-b)^2+2(x-a)(x-b)$. $g'(x)=3x^2+1$.

$g(0)=1$. $\therefore g^{-1}(1)=0$

(가) $(x-1)|h(x)|$ → 미.가.

$g(1)=3$. $\therefore g^{-1}(3)=1$.

(나) $h'(3)=2$.

$g'(g^{-1}(3))\cdot\{g^{-1}(3)\}'=1$.

$h'(x)=f'(g^{-1}(x))\cdot\{g^{-1}(x)\}'$

$=g'(1)\cdot\{g^{-1}(3)\}'$

$h'(3)=f'(g^{-1}(3))\cdot\{g^{-1}(3)\}'=f'(1)\times\frac{1}{4}=2$.

$\therefore \{g^{-1}(3)\}'=\frac{1}{4}$. ($\because g'(1)=4$).

$\therefore f'(1)=8$ .... ①

(가)에서 $(x-1)|h(x)|$ → 미.가 ⇒ ∴ $x=1$일 때 $h(x)$가 0이 되면서 $(x-1)|h(x)|$가 단독근이 없어야 한다. ($x=1$일 때 다중근의 형태를 띠고, 단독근이 없어야 $(x-1)|h(x)|$가 미.가).

$\therefore h(1)=0=f\circ g^{-1}(1)=f(0)=0$. $\therefore -ab^2=0$ ...... ②

(i) $a=0$, $f'(1)=(1-b)^2+2(1-b)=8$. $\therefore 1-b=-4$ or 2

$\therefore b=5$ $(a<b)$ { $g^{-1}(x)=a$ 와 $x-1=0$의 실근이 같다. ∴ $(x-1)|h(x)|$는 중근 2개 }

(ii) $b=0$ → $g^{-1}(x)=a$에서 단독근. ($(x-1)|h(x)|$는 삼중근 하나, 단독근 하나)

∴ 조건에 위배.

⇒ $f(x)=(x-0)(x-5)^2=x(x-5)^2$. $\therefore f(8)=8\times3^2=72$