[권구승/한성은 모의고사]

대학수학능력시험 수학(가형) 연습 (3/4)

권구승 (서울대)

이강학원(대치, 분당), 이투스앤써.

지금이 여러분 인생에서 가성비가 가장 높은 시간.
대학 가서 노세요.

한성은 (POSTECH 수학과)

이투스앤써, 일산 종로, 일산 클라비스, 5A ACADEMY

이별의 시간이 다가옵니다.
새로운 시작이 되지 않도록.

hansungeun.com
– 저자소개, 학습자료, 교재판매

수학 영역(가형)

5지선다형

1. $\sqrt[3]{3}\times 3^{\frac{2}{3}}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2-(2n-3)^2}{4n+5}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{5},\quad \mathrm{P}(B)=\frac{2}{5},\quad \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{9}{10}$$

일 때, $\mathrm{P}(B|A)$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{(3n-1)(3n+2)}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le 10$이고, X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=5$에 대하여 대칭이다. $\mathrm{P}(2 \le X \le 8) = 3\mathrm{P}(8 \le X \le 10)$일 때, $\mathrm{P}(2 \le X \le 5)$의 값은? [3점]

① 0.1 ② 0.15 ③ 0.2 ④ 0.25 ⑤ 0.3

6. $\int_1^e x \ln \frac{1}{x} dx$의 값은? [3점]

① $-\frac{e^2+1}{6}$ ② $-\frac{e^2+1}{5}$ ③ $-\frac{e^2+1}{4}$ ④ $-\frac{e^2+1}{3}$ ⑤ $-\frac{e^2+1}{2}$

7. 매개변수 t로 나타내어진 함수

$$x = \frac{1-t}{1+t}, \quad y = \frac{t^2}{1-t}$$

에서 $t=-2$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

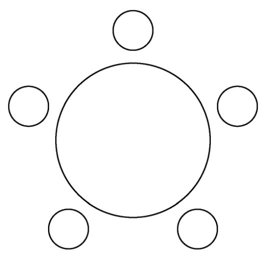
① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{5}{9}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{7}{9}$

8. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{a_n+2^n}=4$일 때,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

9. 다섯 명이 둘러앉을 수 있는 원 모양의 탁자와 A, B를 포함한 8명의 학생이 있다. 이 8명의 학생 중에서 A, B를 포함하여 5명을 선택하고 이 5명의 학생 모두를 일정한 간격으로 탁자에 둘러앉게 할 때, A와 B가 이웃하지 않는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]



① 240 ② 220 ③ 200
④ 180 ⑤ 160

10. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=10$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}+a_n=(-1)^{n+1}\times n$$

을 만족시킨다. $a_k>a_1$인 자연수 k의 최솟값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

11. 1보다 큰 세 실수 a, b, c가

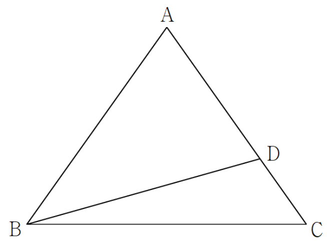
$$\log_a b = \frac{\log_b c}{4} = \frac{\log_c a}{2}$$

를 만족시킬 때, $\log_a b + \log_b c + \log_c a$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{2}$ ② 4 ③ $\frac{9}{2}$

④ 5 ⑤ $\frac{11}{2}$

12. $\overline{AB} = \overline{AC} = 6$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위에 점 D를 $\overline{AB} = \overline{BD}$가 되도록 잡는다. $\overline{AD} = 4$일 때, 선분 BC의 길이는? [3점]



① $4\sqrt{2}$ ② 6 ③ $2\sqrt{10}$

④ $2\sqrt{11}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

13. 직선 $y=-x+b\,(b>0)$이 y축, 함수 $f(x)=a^x\,(a>1)$의 그래프, 직선 $y=x$와 만나는 점을 각각 A, B, C라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$이다. $\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{10}$일 때, $a+b$의 값은? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

14. 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위가 $0\le X\le 4$일 때, 함수 $f(x)=\mathrm{P}(0\le X\le x)$는

$$f(x)=\begin{cases} ax & (0\le x\le 1) \\ b(x-1)+a & (1\le x\le 4) \end{cases}$$

이다. $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le X\le 3\right)=\frac{5}{9}$일 때, $a+b$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{5}{9}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{7}{9}$

15. 역함수 $g(x)$를 갖는 함수

$$f(x)=ax+3\sin x\ \ (a>0)$$

에 대하여 함수 $g(x)$가 $x=p$에서 미분가능하지 않은 실수 p가 존재한다. 함수 $g(x)$가 $x=p$에서 미분가능하지 않은 모든 양수 $g(p)$를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것이 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n,\ \cdots$라 할 때, $a\alpha_3$의 값은? [4점]

① 12π　② 15π　③ 18π　④ 21π　⑤ 24π

16. 2 이상의 자연수 m에 대하여 좌표평면 위의 점 P_n을 다음 규칙과 같이 정한다.

> (가) 점 P_1의 좌표는 $(m-1,\ m)$이다.
> (나) 자연수 n에 대하여 P_n의 좌표가 $(a,\ b)$일 때,
> $a=b$이면 점 P_{n+1}의 좌표는 $(a+1,\ 2b)$이고,
> $a\neq b$이면 점 P_{n+1}의 좌표는 $(a+1,\ b)$이다.

다음은 100 이하의 자연수 n에 대하여 P_n 중 직선 $y=x$ 위에 있는 점의 개수가 5가 되도록 하는 자연수 m을 구하는 과정이다.

> i) 주어진 규칙에 의하여 점 P_2의 좌표는 $(m,\ m)$이다.
> ii) 점 P_3의 좌표는 $(m+1,\ 2m)$이고, 이후 x좌표가 1씩 커져서 $2m$이 될 때의 점이 $(2m,\ 2m)$이다.
> 자연수 i에 대하여 점 $(2m,\ 2m)$을 점 P_i라 하면 $i-3=2m-(m+1)$이므로 $i=\boxed{\text{(가)}}$이다.
> iii) P_{i+1}의 좌표는 $(2m+1,\ 4m)$이고, 이후 x좌표가 1씩 커져서 $4m$이 될 때의 점이 $(4m,\ 4m)$이다.
> 자연수 k에 대하여 점 $(4m,\ 4m)$을 점 P_k라 하면 $k-(\boxed{\text{(가)}}+1)=4m-(2m+1)$이므로 $k=\boxed{\text{(나)}}$이다.
> iv) 같은 방식으로 P_n 중 $y=x$ 위에 있는 점은 $(m,\ m),\ (2m,\ 2m),\ (4m,\ 4m),\ (8m,\ 8m),\ (16m,\ 16m),\ (32m,\ 32m),\ \cdots$ 이다.
> $(m,\ m)$부터 $(16m,\ 16m)$까지가 5개이므로, $(32m,\ 32m)$는 포함하지 않아야 한다.
> 따라서 100 이하의 자연수 n에 대하여 P_n 중 직선 $y=x$ 위에 있는 점의 개수가 5가 되도록 하는 자연수 m의 개수는 $\boxed{\text{(다)}}$이다.

위의 (가)와 (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 하고, (다)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(p)+g(p)$의 값은? [4점]

① 10　② 12　③ 14　④ 16　⑤ 18

17. 1부터 7까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 7장의 카드가 있다. 이 7장의 카드를 임의로 일렬로 나열할 때, 짝수가 적혀 있는 카드는 작은 수부터 크기 순서로 왼쪽부터 나열되거나 어느 두 장도 이웃하지 않을 확률은? [4점]

① $\frac{5}{14}$ ② $\frac{17}{42}$ ③ $\frac{19}{42}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{23}{42}$

18. 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\frac{\ln 2}{\ln(1+x^4)}-1 \quad (x \geq 1)$$

이고 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+f(2-x)=0$을 만족시킨다. 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt$$

에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $g''(x) \leq 0$이다.
ㄴ. $g(a) \geq 1$인 실수 a가 존재한다.
ㄷ. $\int_0^2 g(x)dx \leq 1$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. 집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 공집합이 아닌 부분집합 31개 중에서 임의로 서로 다른 두 부분집합을 뽑아 임의로 일렬로 나열하고 나열된 순서대로 A, B라 할 때, A, B가 다음 조건을 만족시킬 확률은? [4점]

$n(A\cap B)=2$이고 $A\cup B=U$이다.

① $\frac{2}{31}$ ② $\frac{7}{93}$ ③ $\frac{8}{93}$ ④ $\frac{3}{31}$ ⑤ $\frac{10}{93}$

20. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$의 도함수 $g'(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$g'(x)=\int_0^1 x^3\sqrt{t}\,\sin(x\sqrt{t})dt$$

를 만족시킨다. 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 극대인 모든 양수 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. $k\pi<a_6<(k+1)\pi$인 자연수 k의 값은? [4점]

① 11 ② 14 ③ 17 ④ 20 ⑤ 23

21. 수열 $\{a_n\}$은 상수 a와 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+a & (a_n \leq n) \\ a_n-n & (a_n > n) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_4=6$, $a_8=8$이 되도록 하는 실수 a, a_2의 모든 순서쌍 (a, a_2)의 개수는? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

단답형

22. $(1+x)^7$의 전개식에서 x^4의 계수를 구하여라. [3점]

23. 함수 $f(x)=e^x-x^2+7x$에 대하여 $f'(0)$의 값을 구하여라. [3점]

24. 방정식 $\log_4 x^2 + \log_x 4 - 3 = 0$을 만족시키는 모든 실수 x의 곱을 구하여라. [3점]

25. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1+\frac{6}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{3n}{n}}\right)=a$일 때, $9a$의 값을 구하여라. [3점]

26. 확률변수 X는 다음 시행의 결과에 의해 정해지는 점수이다.

(가) 0점에서 시작한다.
(나) 한 개의 동전을 8번 던져
앞면이 나올 때마다 4점을 얻고
뒷면이 나올 때마다 2점을 잃는다.

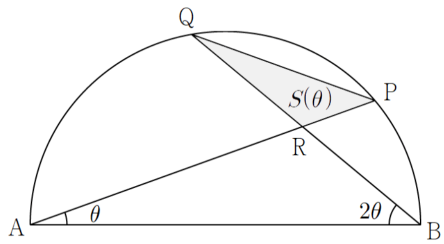
$\mathrm{E}(X^2)$의 값을 구하여라. [4점]

27. 등차수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{3n} a_k = 9n^2$$

일 때, $\sum_{k=1}^{6} a_{3k}$의 값을 구하여라. [4점]

28. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위의 두 점 P, Q는 $\angle \mathrm{PAB} = \theta$, $\angle \mathrm{QBA} = 2\theta$를 만족시킨다. 두 선분 AP, BQ의 교점을 R, 삼각형 PQR의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta} = \frac{q}{p}$일 때, $p^2 + q^2$의 값을 구하여라. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



29. 빨간색, 파란색, 노란색 공 각각 1개씩과 흰 공 7개가 있다. 이 10개의 공을 세 개의 상자 A, B, C에 남김 없이 나누어 넣을 때, 각 상자에 공이 2개 이상씩 들어가도록 하는 경우의 수를 구하여라. (단, 흰 공끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

30. 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$-ke^{-x} \le l(x) \le \frac{1}{4}e^{x}$$

을 만족시키는 일차함수 $l(x)$에 대하여 직선 $y=l(x)$의 기울기의 최댓값이 1이다. 위 부등식을 만족시키는 일차함수 $l(x)$에 대하여 직선 $y=l(x)$와 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이의 최댓값이 M일 때, $e^{5}\times kM$의 값을 구하여라. [4점]

[권구승/한성은 모의고사]

수능(가형) 연습(3/4) 정답표

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	③	02	④	03	②	04	①	05	⑤
06	③	07	②	08	②	09	①	10	④
11	①	12	⑤	13	⑤	14	⑤	15	②
16	④	17	②	18	③	19	③	20	①
21	④	22	35	23	8	24	8	25	14
26	136	27	120	28	25	29	390	30	32

COMMENT 16

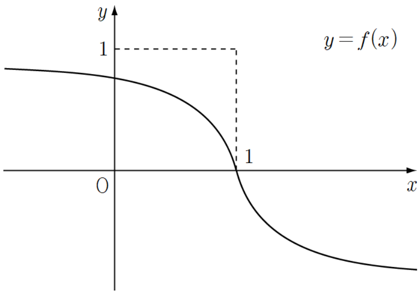
$f(m)=m+2, \quad g(m)=3m+2, \quad p=3$

COMMENT 18

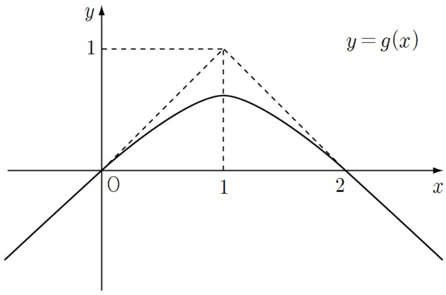
니은 : $g(x)$는 $x=1$에서 최댓값을 가진다. $g(1)$은 곡선 $y=f(x)$와 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이인데, $f(0)=1-\ln 2$의 값이 1보다 작으므로 도형의 넓이 또한 1보다 작다.

디귿 : 곡선 $y=g(x)$는 실수 전체의 집합에서 위로 볼록이다. $g'(0)=f(0)$은 1보다 작다.

그래프를 째려보면 $\int_0^2 g(x)dx$는 점 $(0,\ 0)$, $(1,\ 1)$, $(2,\ 0)$을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이보다 작다.



[그림1] $y=f(x)$의 그래프



[그림2] $y=g(x)$의 그래프

COMMENT 19

전체 경우의 수는 31×30이고, 사건의 경우의 수는 80이다.

밴 다이어그램에서 $A\cap B$ 영역에 오는 원소를 선택하는 경우의 수 ${}_5C_2$와,

나머지 원소를 $A-B$ 영역 또는 $B-A$ 영역에 넣는 경우의 수 2^3의 곱이다.

COMMENT 20

$g'(x)=\int_0^1 x^3\sqrt{t}\sin(x\sqrt{t})dt$에서 $x\sqrt{t}=u$로 치환하면

$$g'(x)=\int_0^x 2u^2\sin u du$$

이다. $g''(x)=2x^2\sin x$는 $x=\pi$, $x=2\pi$, $x=3\pi$, $\cdots$에서 0이고 사이사이의 넓이를 째려보면 $g'(x)=0$의 근이 구간 $(\pi,\ 2\pi)$, $(2\pi,\ 3\pi)$, $(3\pi,\ 4\pi)$, $\cdots$에 각각 하나씩 존재한다.

이 중 $g(x)$가 극대가 되는 x값은 구간 $(\pi,\ 2\pi)$, $(3\pi,\ 4\pi)$, $(5\pi,\ 6\pi)$, $\cdots$에 있는 것들이다.

COMMENT 21

$a_5=2$, $a_6=a+2$이고, a_7은 $2a+2$ 또는 $a-4$,

a_8은 $3a+2$ 또는 $2a-5$ 또는 $2a-4$ 또는 $a-11$이다.

$a_8=8$에서 a의 값은 2, 6, 19가 가능하다.

6.5는 점화식을 선택하는 범위를 만족시키지 않는다.

a_3은 9 또는 $6-a$이고 a_2는 11 또는 $9-a$ 또는 $8-a$, $6-2a$이다. 이 중 점화식을 선택하는 범위를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ a_2)$는

$(2,\ 11)$, $(6,\ 11)$, $(6,\ -6)$, $(19,\ 11)$, $(19,\ -10)$, $(19,\ -32)$

가 가능하다.

COMMENT 26

앞면이 나온 횟수 $Y \sim \mathrm{B}\left(8,\ \frac{1}{2}\right)$에 대하여 $X = 4Y - 2(8-Y) = 6Y - 16$이다.

COMMENT 28

삼각형 ABR에서 사인법칙 쓰고 싶은 각이다. $\overline{\mathrm{PR}} = \overline{\mathrm{AP}} - \overline{\mathrm{AR}} = 2\cos\theta - \dfrac{2\sin 2\theta}{\sin 3\theta}$이다.

$S(\theta) = \dfrac{1}{2} \times \left(2\cos\theta - \dfrac{2\sin 2\theta}{\sin 3\theta}\right) \times \left(2\cos 2\theta - \dfrac{2\sin\theta}{\sin 3\theta}\right) \times \sin 3\theta$이고 $\dfrac{q}{p} = \dfrac{4}{3}$이다.

COMMENT 29

빨파노를 몇 개씩 묶는지에 따라 분류하자.

Case1) 3/0/0인 경우 : $3 \times {}_3\mathrm{H}_3 = 30$

Case2) 2/1/0인 경우 : ${}_3\mathrm{C}_2 \times 3! \times {}_3\mathrm{H}_4 = 270$

Case3) 1/1/1인 경우 : $3! \times {}_3\mathrm{H}_4 = 90$

COMMENT 30

기울기가 최대일 때는 직선이 두 곡선에 동시에 접할 때이다. 곡선 $y = -ke^{-x}$와의 접점을 $(s,\ -ke^{-s})$,

곡선 $y = \frac{1}{4}e^x$와의 접점을 $\left(t,\ \frac{1}{4}e^t\right)$라 하면 $ke^{-s} = \dfrac{1}{4}e^t = \dfrac{\frac{1}{4}e^t + ke^{-s}}{t-s}$이다. 연립하여 풀면 $k = \dfrac{4}{e^2}$이다.

※ 참고로 $s = \ln 4 - 2$, $t = \ln 4$이다. 기울기가 1을 이용하여 $t = \ln 4$를 먼저 뽑을 수도 있고,
곡선 $y = -e^{-(x - \ln k)}$와 곡선 $y = e^{x - \ln 4}$가 서로 점대칭임을 이용할 수 있다.

직선 $y = l(x)$와 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형이 언제 가장 넓어질지 생각하자.

곡선 $y = \frac{1}{4}e^x$보다 곡선 $y = -\frac{4}{e^2}e^{-x}$이 원점에서 멀어, 곡선 $y = -\frac{4}{e^2}e^{-x}$에 접할 때 답이 나온다.

아니면 굳이 k를 설정해서 구하게 하질 않았겠지.

접점을 $(u,\ -ke^{-u})$라 하자. 접선의 방정식은 $y = ke^{-u}(x-u) - ke^{-u}$이고

x절편은 $u+1$, y절편은 $-k(u+1)e^{-u}$, 삼각형의 넓이는 $s(u) = \left|\dfrac{2}{e^2}(u+1)^2 e^{-u}\right|$이다.

u는 두 곡선에 동시에 접할 때의 접점의 x값인 $s = \ln 4 - 2$보다 크거나 같아야 한다.

범위에서 $s(u) = \left|\dfrac{2}{e^2}(u+1)^2 e^{-u}\right|$의 값은 $u = 1$일 때 최댓값 $\dfrac{8}{e^3}$을 가진다.