CONTENTS

3. 해설편

2021
수학라이트

규토 수학 라이트 N제 수1 오리엔테이션

Chapter 1

1.1 책 소개

개념과 기출을 이어주는 bridge 역할의 교재

규토 수학 라이트 N제는 기출문제와 개념 간의 격차를 최소화하고 1등급으로 도약하기 위한 탄탄한 base를 만들어 주기 위해 기획한 교재입니다. 학생들이 처음 개념을 학습한 뒤 막상 기출문제를 풀면 그 방대한 양과 난이도에 압도당하기 쉽습니다. 이를 최소화하기 위해 4단계로 구성하였고 책에 적혀 있는 규토 수학 라이트 N제 100% 공부법으로 꾸준히 학습하다보면 역으로 기출문제를 압도하실 수 있습니다.

유형과 기출을 한 권으로

Gyu To Math (규토 수학)에서 첫 글자를 따서 총 4단계로 구성하였습니다.

1. **G**uide step (개념 익히기편)

교과서 개념 및 유제와 '규토의 Tip'을 담았습니다. 단순히 문제만 푸는 것이 아니라 개념도 함께 복습하실 수 있습니다. 교과서에 직접적인 서술이 없더라도 수능에서 자주 출제되는 포인트들을 녹여내려고 노력하였습니다.

2. **T**raining_1 step (필수 유형편)

기출문제를 풀기 전의 Warming up 단계로 수능에서 자주 출제되는 유형들을 분석하여 수능최적화 자작으로 구성하였습니다.
기초적인 문제뿐만 아니라 학생들이 어렵게 느낄 수 있는 문제들도 다수 수록하였습니다.
단시간 내에 최신 빈출 테마들을 Compact하게 정리하실 수 있습니다.

3. **T**raining_2 step (기출 적용편)

사관, 경찰, 교육청, 수능, 평가원에서 3~4점 문제를 선별하여 구성하였습니다.
필수 유형편에서 배운 내용을 바탕으로 실제 기출문제를 풀어보면서 사고력과 논리력을 증진시킬 수 있습니다.
실제 기출 적용연습을 위하여 유형 순이 아니라 전반적으로 난이도 순으로 배열했습니다.

4. **M**aster step (심화 문제편)

사관, 경찰, 교육청, 수능, 평가원에서 난이도 있는 문제를 선별하여 준킬러 자작문제와 함께 구성하였습니다.
과하게 어려운 킬러문제는 최대한 지양하였고 킬러 또는 준킬러 문제 중에서도 1등급을 목표로 하는 학생이 반드시 정복해야하는 문제들로 구성하였습니다.

교과서 개념유제부터 어려운 기출 4점까지 모두 수록

교과서 개념유제부터 수능에서 킬러로 출제된 문제까지 모두 수록하였습니다.
규토 수학 라이트 N제 수1의 경우 총 636제이고 (유제의 경우 3문제짜리도 있어 대략 700문제)
문제집의 취지에 맞게 중 ~ 중상 난이도 문제들이 제일 많이 분포되어 있습니다.

규토 수학 라이트 N제의 추천 등급은?

가형은 2~4등급, 나형은 1~3등급입니다.

(단, 옆에서 이끌어주는 사람이 있다는 가정 하에 나형 4등급도 가능합니다.)

1.2 검토후기

김주은 / 울산대학교 의학과

안녕하세요, 규토 수학 라이트 n제 검토를 맡은 울산대학교 의학과 김주은입니다. 규토 수학 고득점 n제를 풀고 검토해 보면서 규토 수학 고득점 n제에 소개된 문제 접근 방식들과 규토선생님이 직접 만드신 문제들을 보고 쉽게 찾아볼 수 없는 새로운 문제집이라는 생각을 했습니다. 어디서 잘 가르쳐 주지 않는데 알아두면 떠올리기도 쉽고 적용하기도 쉬운 문제 접근 방식에, 그 접근방식을 체화시키기에 최적화된 문제들이 많이 있었기 때문입니다. 그런데 규토 라이트 n제가 출간된다는 소식을 듣고 '수험생들만 규토를 보기엔 아깝긴 하지, 잘 됐다' 싶다가도 '과연 규토의 신박함을 수Ⅰ 과정에 잘 녹아낼 수 있을까?' 하는 의심이 들기도 했습니다. 규토 라이트 n제를 직접 풀고 검토해 보면서 느낀 게, 역시 규토더라고요. 수Ⅰ 개념을 이해하기 쉽게 설명하는 데 그치지 않고, 문제를 풀 때 현실적인 방법과 루트를 가르쳐 주고 놓치는 게 없도록 꼼꼼히 체크까지 해주는 좋은 문제집입니다. 무엇보다도 수험생뿐만 아니라 고1,2 학생들도 규토를 접할 수 있게 되어서 정말 잘 된 일이라고 생각합니다. (더 많은 학생들이 규토에 입덕할 게 눈에 보이는걸요?) 규토식 접근방식을 미리 익혀둔다면 아마 다른 고등수학 과정들, 수능수학까지도 훨씬 수월하게 공부할 수 있을 겁니다. 규토를 아는 분들은 아시겠지만, 규토가 처음이시거나 잘 모르시는 분들은 규토 한 번 믿어 보세요. 여러분들도 할 수 있습니다!

박도현 / 성균관대학교 자연과학

안녕하세요, 규토 라이트 N제 수1의 검토를 맡은 박도현입니다.
규토 N제는 킬러 대비를 위해 개념부터 스킬까지 모두 다 배울 수 있는 문제집이면, 규토 라이트 N제는 킬러는 아니지만 개념부터 시작해 준킬러, 함정 문제들을 모두 정복할 수 있는 문제집입니다. 2019수능부터 수학 영역은 킬러 문제의 비율이 이전 수능보다 줄기 시작했고, 2020년 6 · 9 모의평가 때에도 평가원은 킬러 문제의 비중을 현저히 낮추고 준킬러와 함정 문제들의 비중을 높였습니다. 즉, 문제들의 전체적인 난이도 자체는 내려와 상위권 이상의 학생들은 좋은 성적을 받지만, 중상위 이하의 학생들은 끔찍한 점수를 받게 됩니다. 따라서 이와 같은 평가원의 트렌드에 따라 공부해야 하는 수험생들에게는 규토 라이트 N제와 같이 좋은 참고서는 보기 힘듭니다.
2020수능 대비 때, 저는 기출을 여러 번 풀고 생각했습니다. 올해 수능 트렌드에 따라가는 좋은 문제집이 없을까? 킬러들은 쉬워지고 준킬러가 강화되는 흐름에서 저는 ebs 변형 및 사설 모의고사를 정말 많이 풀었습니다. 이런저런 문제들을 찾으면서 저는 규토 선생님이 제작한 규토 모의고사를 발견했습니다. 규토 모의고사는 6 · 9 모의평가 트렌드를 정말 잘 반영한 수능대비 최적의 모의고사였습니다. 이러한 질 좋은 문제들을 규토 라이트 N제에서도 볼 수 있습니다.
모든 수험생 여러분들이 규토 라이트 N제를 풀고 수능에서 좋은 성적을 거두길 바랍니다!

최이고니 / 울산대학교 의학과

안녕하세요, 새로운 규토 라이트 N제의 검토를 맡게 된 최이고니입니다! 라이트 N제는 라이트하지 않습니다. 개념설명부터 간단한 유제, 필수 유형, 기출문제까지를 한 흐름으로 볼 수 있어서 공부한 개념이 날아가지 않고 묵직하게 머리 속에 남아있게 될 것이라 생각합니다. 언제나 가장 소중한 기출문제들과 기출변형들이 잔뜩 들어있는 문제집이기 때문에 가볍게 한 번 풀고 넘어가지 말고 이번에도 100%공부법을 잘 따라가면서 실력을 다지시길 바랍니다! 화이팅~

송지훈 / 인하대학교 수학과

많은 학생들이 개념에서 기출로 나아가는 과정을 힘겨워합니다. 그 이유는 개념서와 기출의 문제 난이도의 괴리 때문이라고 생각합니다. 규토 라이트 N제는 이 부분에 충실하여 개념서와 기출 사이의 간극을 메워주고 개념서만으로는 혼자서 깨닫기에 어려운 내용들을 친절히 설명해준 책입니다. 기출문제가 너무 어려워 풀기 버겁거나 개념서는 봤지만 기출문제에 적용이 안 되는 학생들에게 다른 문제 기본서와 이 책을 병행하길 강력히 추천합니다. 마지막으로 이 책을 보는 수험생분들 모두 등급 상승을 이뤄내시길 기원합니다.

박서준 / 홍익대학교 수학교육과

규토 N제에 이어서 규토 Lite N제까지 검토를 맡게 되었네요. 제 검토가 수험생 여러분들에게 큰 도움이 되길 바랍니다.
규토 N제와 가장 다른 점은 난이도 차이에 있습니다. 도움을 받을 수 있는 학생층이 넓어졌다는 의미일 수도 있겠네요. 물론 N제도 많은 학생에게 도움을 줄 수 있으나 본인에게 적합한 난이도 선택 또한 좋은 공부 방법의 하나이니까요! 규토 Lite N제는 '이미 기본기를 한번 다지고 고3을 맞이한 모든 학생 여러분들에게' 추천해드리고 싶은 책입니다. 기본기에 충실하나, 보다 쉽고 효율적인 방법을 소개해주는 책은 그리 많지 않습니다. 보통은 기본기에 충실한 편이죠. 다만 걱정되는 부분은, 기본기를 충분히 다졌다고 생각해서 효율적인 방법만을 추구하다가 미끄러지지는 않을까 하는 것입니다. 공부하시면서 꼭 기본적인 풀이와 함께 규토 선생님이 추가적으로 소개하는 풀이까지 모두 잡아두시길 꼭 부탁드립니다.
두 마리의 토끼를 모두 잡는 규토 Lite N제, 꼭 꼼꼼히 공부하고 습득해서 원하는 수능 점수와 대학 쟁취하시길 응원합니다.

2021

수학라이트

규토 수학 라이트 N제 수1

문제편

Chapter

2

개념 파악하기 - (2) 절댓값 함수 그리기 (기본 유형)

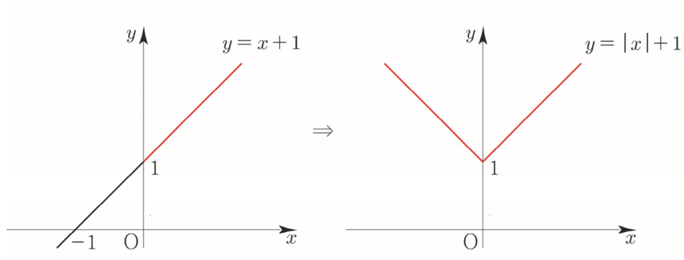
※ 기본 유형편

① $y=f(|x|)$

$$\begin{cases} y=f(x) & (x \geq 0) \\ y=f(-x) & (x<0) \end{cases}$$

방법 : x가 양수인 부분을 y축 대칭

ex) $y=|x|+1$

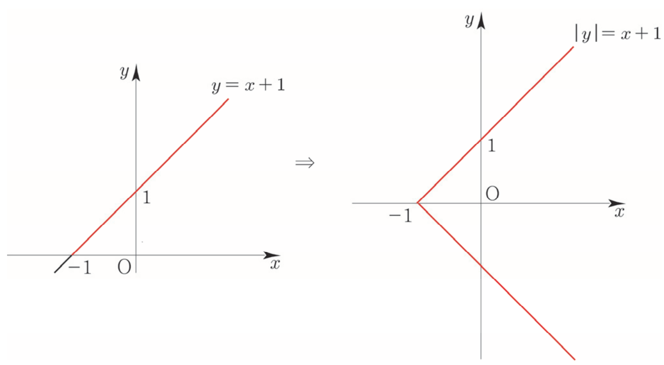


② $|y|=f(x)$

$$\begin{cases} y=f(x) & (y \geq 0) \\ y=-f(x) & (y<0) \end{cases}$$

방법 : y가 양수인 부분을 x축 대칭

ex) $|y|=x+1$

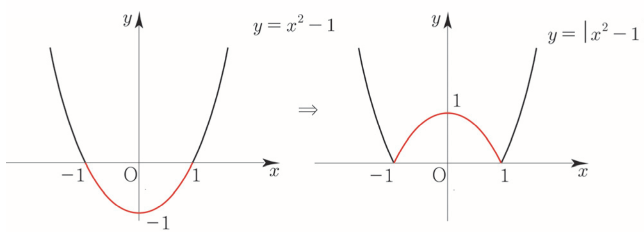


③ $y=|f(x)|$

$$\begin{cases} y=f(x) & (f(x) \geq 0) \\ y=-f(x) & (f(x)<0) \end{cases}$$

방법 : $f(x)$가 음수인 부분을
x축 위로 접어올림

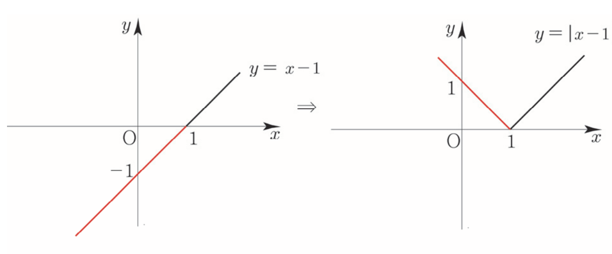
ex) $y=|x^2-1|$



※ 실전 적용편

① 무엇을 **기본함수**로 둘까?
② 배운 것을 바탕으로 **순서를 설계**하자!

ex) $y=|x-1|$



① $y=x-1$를 기본함수로 두자.
② $y=|f(x)|$를 적용시키면 $y=|x-1|$이 된다.

다르게도 풀어보자.
① $y=x$를 기본함수로 두자.
② $x \rightarrow |x|$ (x가 양수인 부분을 y축 대칭) 하면 $y=|x|$이 된다.
③ $x \rightarrow x-1$ (x축 방향으로 1만큼 평행이동) 하면 $y=|x-1|$이 된다.

[개념 확인문제 3]

다음 그래프를 그리시오.

(1) $y=|x|-1$

(2) $y=||x|-1|$

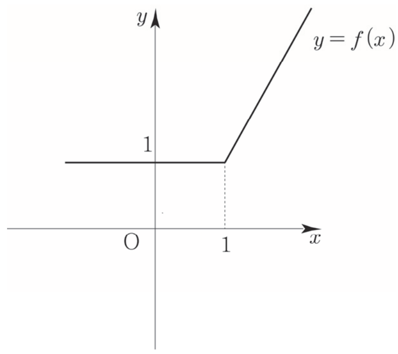
(3) $|y-1|=x-1$

(4) $y=x^2+|x|+1$

개념 파악하기 - (3) 절댓값 함수 그리기 (case 분류 유형)

※ 모든 절댓값 함수는 절댓값 안에 있는 식이 양수인지 음수인지에 따라 case분류하면 다 풀 수 있다.

※ 범위가 2개인 경우



ex) $f(x)=|x-1|+x$

① 절댓값이 걸려있는 식은 $x-1$ 뿐이므로
$x-1\geq 0$인지 $x-1<0$인지에 따라 case분류할 수 있다.

② $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & (x\geq 1) \\ 1 & (x<1) \end{cases}$

Tip $x\geq 1$ 일 때 $x-1$은 양수이므로 그냥 나온다. 따라서 $y=x-1+x=2x-1$이다.
$x<1$ 일 때 $x-1$은 음수이므로 마이너스가 붙어서 나온다. 따라서 $y=-(x-1)+x=1$이다.
$x=1$ 일 때 등호는 $x\leq 1$이든지 $x\geq 1$이든지 상관없다.

※ 범위가 3개 이상인 경우

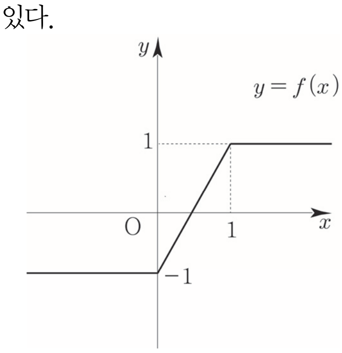
ex) $f(x)=|x|-|x-1|$

① 절댓값이 걸려있는 식은 x, $x-1$ 이므로
$x\leq 0$인지 $0<x\leq 1$인지 $1<x$에 따라 case분류할 수 있다.

$x\leq 0$	$0<x\leq 1$	$1<x$
0	1	

Tip 절댓값을 포함하는 식에서 절댓값이 0이 되는 x값이 0, 1 이므로 수직선을 그리고
$x=0$, 1에서 칸막이를 치면 범위가 3가지로 구분됨을 쉽게 알 수 있다.

② $f(x)=\begin{cases} 1 & (x>1) \\ 2x-1 & (0<x\leq 1) \\ -1 & (x\leq 0) \end{cases}$



[개념 확인문제 4]

다음 그래프를 그리시오.

(1) $y=|x|+x$

(2) $y=|x|+|x-1|$

[예제 4]

정의역이 $\{x \mid 1 \le x \le 3\}$인 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

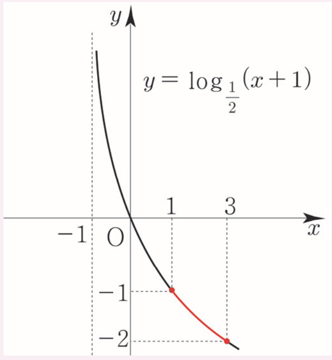
✍ 풀이

함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$의 그래프를 그린 후 정의역 범위를 바탕으로 판단한다.

$x=1$ 일 때 최댓값 $\log_{\frac{1}{2}}(1+1)=-\log_2 2=-1$

$x=3$ 일 때 최솟값 $\log_{\frac{1}{2}}(3+1)=-\log_2 2^2=-2$

따라서 최댓값은 -1이고 최솟값은 -2이다.



Tip 무조건 그래프다 ! 그래프를 그린 후 판단하자!

[개념 확인문제 11]

다음 함수의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

(1) 정의역이 $\{x \mid 3 \le x \le 17\}$인 함수 $y=\log_2(x-1)$

(2) 정의역이 $\{x \mid 0 \le x \le 6\}$인 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+3)$

Training_1 step
필수 유형편

❸ 지수함수와 로그함수

Theme ① 지수함수의 함숫값과 성질

001

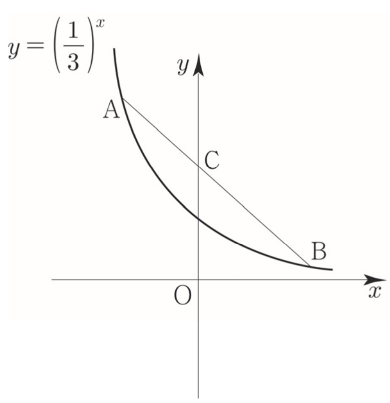
두 실수 a, b에 대하여 좌표평면에서 함수 $y=a\times 2^{x-1}$의 그래프가 두 점 $(2,\ 8)$, $(b,\ 64)$을 지날 때, $a+b$의 값을 구하시오.

002

함수 $f(x)=3^{ax+b}$에서 $f(1)=9$, $f(3)=27$ 일 때, $f(a+3b)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

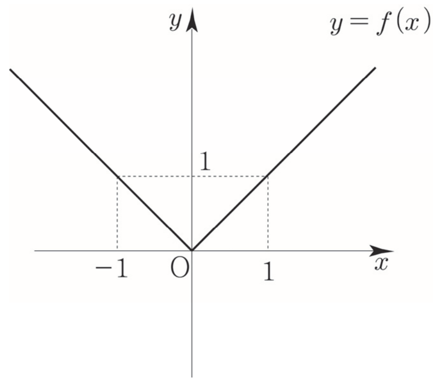
003

함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 그래프 위의 한 점 A 의 y좌표가 9이다. 이 그래프 위의 한 점 B 에 대하여 직선 AB와 y축과의 교점을 C 라 할 때, $2\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{CB}}$이다. 점 B 의 y좌표를 구하시오.



004

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때,



다음 〈보기〉 중 함수 $g(x)=2^{-f(x)}$ 의 그래프에 관한 설명으로 옳은 것만을 있는 대로 고르시오

〈보기〉

ㄱ. 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.
ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\le g(0)$이다.
ㄷ. x축을 점근선으로 갖는다.
ㄹ. 치역은 $\{y\mid 0<y\le 1\}$이다.
ㅁ. $0<x<1$일 때, x값이 증가하면 y의 값은 증가한다.
ㅂ. $g(x_1)=g(x_2)$ 이면 $x_1=x_2$
ㅅ. 임의의 양수 k에 대하여 방정식 $g(x)=\frac{1}{k+1}$은 항상 서로 다른 2개의 실근을 갖는다.

045

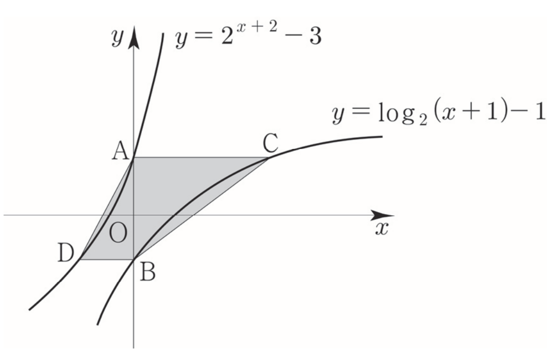
다음 등식을 만족시키는 세 양수 A, B, C 의 대소 관계를 구하시오.

$$-\left(\frac{1}{3}\right)^{A} = \log_{\frac{1}{2}} A\,,$$
$$-\left(\frac{1}{3}\right)^{B} = \log_{\frac{1}{3}} B\,,$$
$$-\left(\frac{1}{2}\right)^{C} = \log_{\frac{1}{3}} C$$

Theme ⑩ 지수함수와 로그함수의 그래프

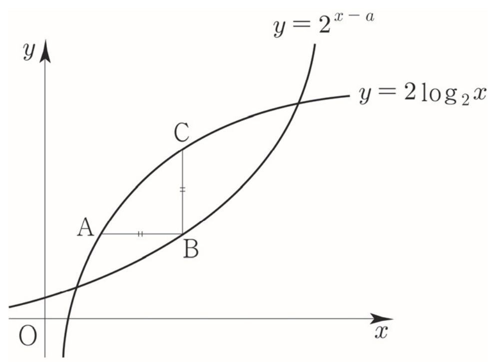
046

그림과 같이 두 곡선 $y=2^{x+2}-3$, $y=\log_2(x+1)-1$이 y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_2(x+1)-1$과 만나는 점을 C, 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^{x+2}-3$와 만나는 점을 D라 할 때, 사각형 ADBC의 넓이를 구하시오.



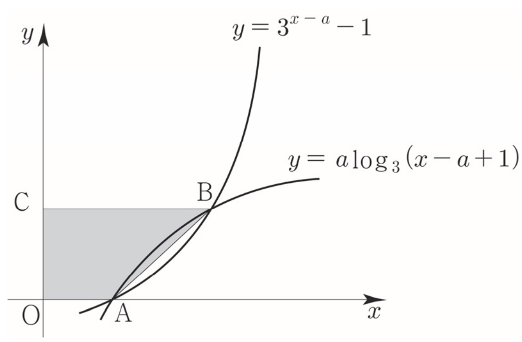
047

그림과 같이 곡선 $y=2\log_2 x$ 위의 한 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^{x-a}$과 만나는 점을 B라 하자. 점 B를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=2\log_2 x$과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{AB}=\overline{BC}=2$ 일 때, 상수 a의 값을 구하시오.



048

그림과 같이 $a>1$인 상수 a에 대하여 두 곡선 $y=3^{x-a}-1$, $y=a\log_3(x-a+1)$이 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 두 점 A, B 중에서 x축 위에 있지 않은 점을 B라 할 때, 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선이 y축과 만나는 점을 C라 하자. 삼각형 OAB의 넓이가 $4a$일 때, 사각형 OABC의 넓이를 구하시오. (단, O는 원점이다.)



Training_2 step
기출 적용편

❸ 지수함수와 로그함수

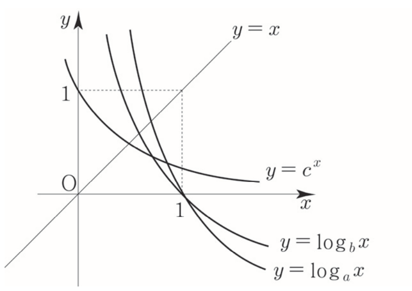
049 2019학년도 수능 가형

함수 $y=2^x+2$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 그래프가 함수 $y=\log_2 8x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭일 때, 상수 m의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

050 2008학년도 고3 9월 평가원 나형

다음은 1이 아닌 세 양수 a, b, c에 대하여 세 함수 $y=\log_a x$, $y=\log_b x$, $y=c^x$의 그래프를 나타낸 것이다. 세 양수 a, b, c의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은? [3점]



① $a>b>c$ ② $a>c>b$ ③ $b>a>c$
④ $b>c>a$ ⑤ $c>b>a$

051 2008학년도 수능 나형

함수 $f(x)=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동시키면서 함수 $y=g(x)$의 그래프가 되고, 이 평행이동에 의하여 점 $\mathrm{A}(1,\ f(1))$이 점 $\mathrm{A}'\ (3,\ g(3))$으로 이동된다. 함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지날 때, $m+n$의 값은? [3점]

① $\frac{11}{4}$ ② 3 ③ $\frac{13}{4}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{15}{4}$

052 2019학년도 고3 9월 평가원 가형

함수 $f(x)=-2^{4-3x}+k$의 그래프가 제 2사분면을 지나지 않도록 하는 자연수 k의 최댓값은? [3점]

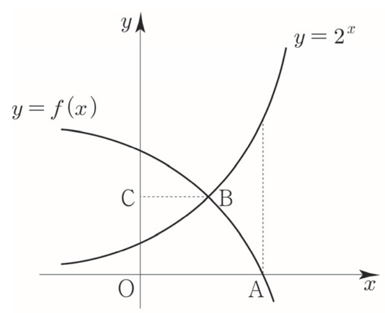
① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

053 2019년 고3 3월 교육청 가형

닫힌구간 $[2,\ 3]$에서 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-a}$의 최댓값은 27, 최솟값은 m이다. $a\times m$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [3점]

054 2014학년도 수능예비시행 B형

곡선 $y=-2^x$을 y축의 방향으로 m만큼 평행이동시킨 곡선을 $y=f(x)$라 하자. 곡선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 점을 A라 할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, $m>2$이다.)

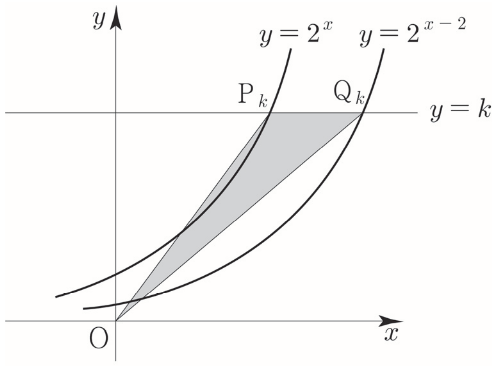


곡선 $y=2^x$이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점을 B, 점 B에서 y축에 내린 수선의 발을 C라 하자. $\overline{\mathrm{OA}}=2\overline{\mathrm{BC}}$일 때, m의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]

① $2\sqrt{2}$ ② 4 ③ $4\sqrt{2}$
④ 8 ⑤ $8\sqrt{2}$

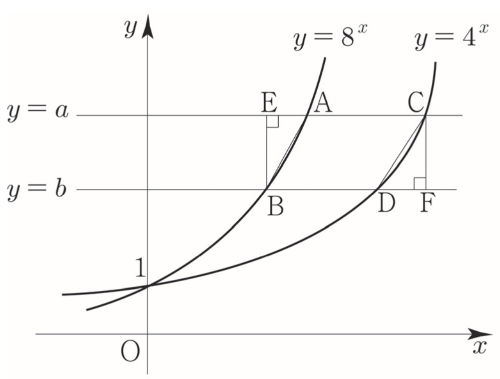
055 2010년 고3 10월 교육청 나형

그림과 같이 두 곡선 $y=2^x$, $y=2^{x-2}$과 직선 $y=k$의 교점을 각각 P_k, Q_k라 하고, 삼각형 OP_kQ_k의 넓이를 A_k라 하자. $A_1+A_4+A_7+A_{10}$의 값을 구하시오. (단, k는 자연수이고, O는 원점이다.) [3점]



056 2008학년도 고3 6월 평가원 나형

그림과 같이 함수 $y=8^x$의 그래프가 두 직선 $y=a$, $y=b$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 함수 $y=4^x$의 그래프가 두 직선 $y=a$, $y=b$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 점 B에서 직선 $y=a$에 내린 수선의 발을 E, 점 C에서 직선 $y=b$에 내린 수선의 발을 F라 하자. 삼각형 AEB의 넓이가 20일 때, 삼각형 CDF의 넓이는? (단, $a>b>1$이다.) [3점]



① 26 ② 28 ③ 30 ④ 32 ⑤ 34

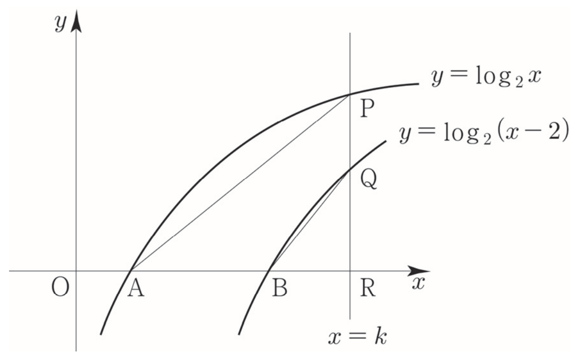
057 2011학년도 고3 6월 평가원 나형

1보다 큰 양수 a에 대하여 두 곡선 $y=a^{-x-2}$과 $y=\log_a(x-2)$가 직선 $y=1$과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{AB}=8$일 때, a의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

058 2016학년도 고3 9월 평가원 A형

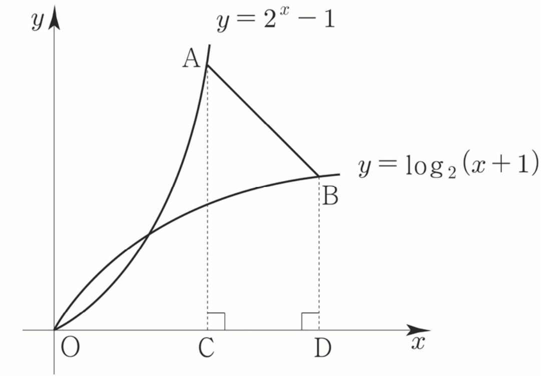
그림과 같이 두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(x-2)$의 그래프가 x축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 직선 $x=k(k>3)$이 두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(x-2)$의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, x축과 만나는 점을 R라 하자. 점 Q가 선분 PR의 중점일 때, 사각형 ABQP의 넓이는? [3점]



① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

059 2011학년도 고3 6월 평가원 가형

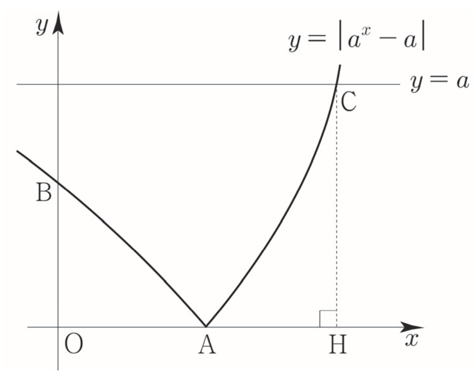
곡선 $y=2^x-1$위의 점 A(2, 3)을 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=\log_2(x+1)$과 만나는 점을 B라 하자. 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 할 때, 사각형 ACDB의 넓이는? [3점]



① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{11}{4}$ ③ 3 ④ $\frac{13}{4}$ ⑤ $\frac{7}{2}$

060 2019년 고2 9월 교육청 가형

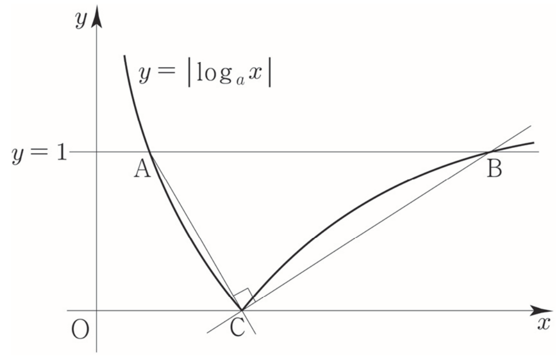
상수 $a\,(a>1)$에 대하여 함수 $y=|a^x-a|$의 그래프가 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B, 직선 $y=a$와 만나는 점을 C라 하고, 점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\overline{\text{AH}}=1$일 때, 선분 BC의 길이는? [3점]



① 2 ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{6}$ ④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

061 2017학년도 사관학교 가형

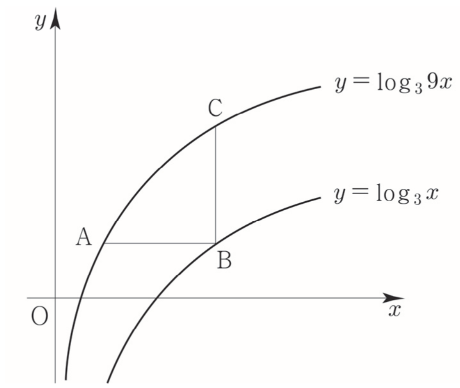
그림과 같이 곡선 $y=|\log_a x|$가 직선 $y=1$과 만나는 점을 각각 A, B라 하고 x축과 만나는 점을 C라 하자. 두 직선 AC, BC가 서로 수직이 되도록 하는 모든 양수 a의 값의 합은? (단, $a\neq 1$) [3점]



① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

062 2019학년도 사관학교 가형

곡선 $y=\log_3 9x$ 위의 점 A$(a,\ b)$를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_3 x$와 만나는 점을 B, 점 B를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_3 9x$와 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\text{AB}}=\overline{\text{BC}}$일 때, $a+3^b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]



① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

Master step
심화 문제편

❸ 지수함수와 로그함수

077

정의역 $\{x \mid -1 \le x \le 1\}$인 함수 $y=a^{x^2-2|x|+3}$의 최댓값이 $\frac{1}{9}$, 최솟값이 m일 때, $81(a+m)$의 값은? (단, $0<a<1$)

078

함수 $f(x)=\left|\log_{\frac{1}{3}}(-x+3)+1\right|$에 대한 설명 중 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $f(0)=0$
ㄴ. $x_1<x_2<3$ 이면 $f(x_1)<f(x_2)$이다.
ㄷ. 임의의 양수 k에 대하여 방정식 $f(x)=k$는 항상 서로 다른 2개의 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

079

함수 $f(x)=\log_2(x-1)^2$에 대한 설명 중 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

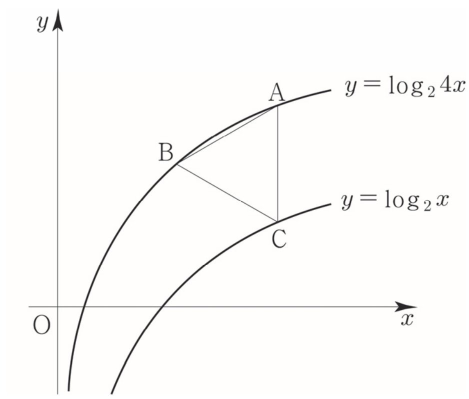
〈보기〉

ㄱ. $f(-1)=f(2)+f(3)$
ㄴ. $x_1 \ne x_2$ 이면 $f(x_1) \ne f(x_2)$이다.
ㄷ. $x>1$ 인 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)<\log_2(x-1)^3$ 이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

080 2011학년도 고3 9월 평가원 가형

함수 $y=\log_2 4x$의 그래프 위의 두 점 A, B와 함수 $y=\log_2 x$의 그래프 위의 점 C에 대하여, 선분 AC가 y축에 평행하고 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 점 B의 좌표는 $(p,\ q)$이다. $p^2 \times 2^q$의 값은? [4점]



① $6\sqrt{3}$ ② $9\sqrt{3}$ ③ $12\sqrt{3}$
④ $15\sqrt{3}$ ⑤ $18\sqrt{3}$

Guide step
개념 익히기편

2.3 수열

❶ 등차수열과 등비수열

개념 파악하기 - (1) 수열의 뜻

※ 자연수를 차례대로 나열하면 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots$ 이다.
이처럼 차례대로 늘어놓은 수의 열을 수열이라 하고, 수열을 이루고 있는 각각의 수를 그 수열의 항이라 한다.
이 때 앞에서부터 첫째항, 둘째항, 셋째항, $\cdots$, n째항, $\cdots$ 또는 제 1항, 제 2항, $\cdots$, 제 n항, $\cdots$ 이라 한다.

※ 일반적으로 수열을 나타낼 때는 각 항에 번호를 붙여 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$과 같이 나타낸다.
이 때 수열의 각 항은 그 항의 번호에 대응하여 정해지므로, 수열은 정의역이 자연수 전체의 집합 N이고 공역이 실수 전체의 집합 R인 함수 $f:\ N \to R,\ f(n)=a_n$으로 볼 수 있다.

※ 수열 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$에서 제 n항 a_n이 n에 대한 식으로 주어지면 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$를 대입하여 그 수열의 모든 항을 구할 수 있다.

※ 제 n항 a_n이 수열의 각 항을 일반적으로 나타내고 있으므로 제 n항 a_n을 그 수열의 일반항이라 하고, 일반항이 a_n인 수열을 간단히 기호로 $\{a_n\}$과 같이 나타낸다.

[개념 확인문제 1]

다음 수열의 제 2항과 제 4항을 구하시오.

$1,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ \cdots$

[개념 확인문제 2]

$\{2n-1\}$의 첫째항부터 제 4항까지 나열하시오.

개념 파악하기 - (2) 등차수열의 뜻

※ 수열 $8,\ 12,\ 16,\ 20,\ \cdots$ 은 첫째항 8에 차례로 4를 더하여 만든 수열이다.
이처럼 첫 번째항에 차례로 일정한 수를 더하여 만든 수열을 등차수열이라 하고, 더하는 일정한 수를 공차라 한다.

[개념 확인문제 3]

다음 수열이 등차수열을 이룰 때, 공차와 x를 구하시오.

(1) $3,\ 5,\ x,\ 9,\ \cdots$

(2) $10,\ 7,\ x,\ 1,\ \cdots$

개념 파악하기 - (3) 등차수열의 일반항

※ 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=a+(n-1)d\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 이다.

Tip $a_n=a+(n-1)d=dn-d+a$ 에서 $d=A$, $-d+a=B$ 라 보면 $a_n=An+B$와 같다.
즉, n의 계수인 A가 공차(d)가 된다. 이를 바탕으로 등차수열의 일반항을 손쉽게 구할 수 있다.

ex) 첫째항이 6, 공차가 -3인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하시오.

$a_n=-3n+B$이고 $a_1=6$ 이므로 $a_1=-3+B=6 \Rightarrow B=9$
따라서 $a_n=-3n+9$이다. (일차방정식이므로 암산으로 빠르게 계산할 수 있다.)

[예제 1]

첫째항이 2, 공차가 5인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하시오.

✍ 풀이

풀이1 $a=2$, $d=5$ 이므로 $a_n=2+(n-1)5=5n-3$ 이다.

풀이2 $a_n=5n+B$이고 $a_1=2$ 이므로 $a_1=5+B=2 \Rightarrow B=-3$
따라서 $a_n=5n-3$이다.

[개념 확인문제 4]

다음 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하시오.

(1) $1,\ 4,\ 7,\ 10,\ \cdots$

(2) $-1,\ 1,\ 3,\ 5,\ \cdots$

[예제 2]

제 3항이 7, 제 11항이 23인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하시오.

✍ 풀이

$a_3=a+2d=7$, $a_{11}=a+10d=23$를 연립하여 풀면 $a=3$, $d=2$이다.
따라서 $a_n=3+(n-1)2=2n+1$ 이다.

[개념 확인문제 5]

다음 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하시오.

(1) 제 4항이 -1, 제 10항이 -25

(2) $a_2=-9$, $a_{12}=21$

개념 파악하기 - (4) 등차중항

※ 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, b를 a와 c의 **등차중항**이라 한다.

$b-a=c-b$이므로 $b=\frac{a+c}{2} \Rightarrow 2b=a+c$가 성립한다.

역으로 $b=\frac{a+c}{2}$이면 $b-a=c-b$가 성립하므로 세 수 a, b, c는 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

※ 연속한 수가 등차수열일 때 미지수 놓기

① 연속한 세 수가 등차수열을 이룰 때, $a-d$, a, $a+d$ 라고 두고 풀면 계산이 간단해진다. (합이 $3a$)

② 연속한 네 수가 등차수열을 이룰 때, $a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$ 라고 풀면 계산이 간단해진다. (합이 $4a$)

Tip ①번과는 다르게 ②번에서는 공차가 $2d$임을 조심해야한다.

ex) 등차수열을 이루는 세 수의 합이 3이고, 세 수의 곱이 -8일 때, 세 수 중에서 가장 큰 수를 구하시오.

세 수를 $a-d$, a, $a+d$라 두면 $a-d+a+a+d=3a=3 \Rightarrow a=1$
$(1-d)\times 1\times(1+d)=-8 \Rightarrow 9=d^2 \Rightarrow d=\pm 3$ 이므로 가장 큰 수는 4이다.

[예제 3]

세 수 2, x, 10이 순서대로 등차수열을 이룰 때, x의 값을 구하시오.

✍ 풀이

$2+10=2x \Rightarrow x=6$
따라서 $x=6$이다.

[개념 확인문제 6]

네 수 x, -3, y, 1이 순서대로 등차수열을 이룰 때, x, y의 값을 구하시오.

개념 파악하기 - (5) 등차수열의 합

※ 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 제 n항이 l일 때, 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n = a+(a+d)+(a+2d)+ \cdots +(l-2d)+(l-d)+l \quad \cdots\cdots ㉠$

㉠에서 우변의 항의 순서를 거꾸로 놓으면

$S_n = l+(l-d)+(l-2d)+ \cdots +(a+2d)+(a+d)+a \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠,㉡을 같은 변끼리 더하면

$2S_n = (a+l)+(a+l)+(a+l)+ \cdots +(a+l)+(a+l)+(a+l) = n(a+l)$

$S_n = \dfrac{n(a+l)}{2}$이고 $l = a_n = a+(n-1)d$ 이므로 $S_n = \dfrac{n\{a+a+(n-1)d\}}{2} = \dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$이다.

정리하면 다음과 같다.

① 첫째항이 a, 제 n항이 l일 때, $S_n = \dfrac{n(a+l)}{2}$

② 첫째항이 a, 공차가 d일 때, $S_n = \dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

Tip 1 둘 다 자주 나오므로 ①, ② 모두 암기가 되어 있어야 한다.

Tip 2 여기서 n은 더하고자하는 항의 총 개수임을 유의해야하고 l은 마지막 항이라는 것에 유의해야한다.

ex) 수열 $\{a_n\}$이 등차수열일 때, $S = a_2+a_3+a_4+ \cdots + a_8$의 값을 구하시오.

항의 총 개수는 $8-2+1 = 7$개 일 때 이므로 $n=7$이고 $l = a_8 = a+7d$ 이다.

$\therefore S = \dfrac{7(a_2+a_8)}{2} = \dfrac{7(a+d+a+7d)}{2} = \dfrac{7(2a+8d)}{2} = 7(a+4d)$

Tip a, b, x가 정수이고 $a<b$일 때, $a \le x \le b$를 만족시키는 x의 개수는 $b-a+1$이다

[예제 4]

다음을 물음에 답하시오.

(1) 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열의 첫째항부터 제 10항까지의 합을 구하시오.

(2) 두 자리의 자연수 중에서 8의 배수의 합을 구하시오.

✍ 풀이

(1) $a=1$, $d=2$ 이므로 $S_{10} = \dfrac{10(2+(10-1)2)}{2} = 100$ 이다.

(2) 두 자리 자연수 중에서 8의 배수를 작은 수부터 차례로 나열하면 16, 24, 32, …, 88, 96 이다.

이는 첫째항이 16이고, 공차가 8인 등차수열이므로 96을 제 n항이라 하면

$96 = 16+(n-1)8 \Rightarrow n = 11$

따라서 구하는 합은 $\dfrac{11(16+96)}{2} = 616$이다.

개념 파악하기 - (10) 등비수열의 합

※ 첫째항이 a, 공비가 $r(r \neq 0)$인 등비수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}$ ……㉠

양변에 공비 r를 곱하면

$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$ ……㉡

㉠에서 ㉡을 같은 변끼리 빼면

$$\begin{array}{rl} S_n = & a + ar + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \\ -\, rS_n = & \phantom{a+{}} ar + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n \end{array}$$

$(1-r)S_n = a - ar^n = a(1-r^n)$ 이므로

① $r \neq 1$일 때, $S_n = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1} = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

② $r = 1$일 때, $S_n = na$

Tip 1 등비수열의 합은 $r \neq 1$일 때와 $r = 1$일 때로 case분류할 수 있다.

Tip 2 ① 는 $r \neq 1$이기만 하면 쓸 수 있다. 즉, r이 음수여도 쓸 수 있다.

Tip 3 보통 $r > 1$이면 $S_n = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$을 쓰고 $r < 1$이면 $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$를 쓴다.

예를 들어 $r = 2$일 때, $\dfrac{a(2^n-1)}{2-1} = \dfrac{a(1-2^n)}{1-2}$ 의 경우 서로 같지만 좌변이 더 예쁘다.

Tip 4 여기서 n은 더하고자하는 항의 총 개수임을 유의해야한다.

ex) 수열 $\{a_n\}$이 등비수열일 때, $S = a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_m$ 의 값을 구하시오.

항의 총 개수는 $m-2+1 = m-1$개 일 때 이므로 $n = m-1$이고 첫째항 $a = a_2$이다.

$\therefore S = \dfrac{a_2(r^{m-1}-1)}{r-1}$

Tip 5 등비수열의 합 $S_n = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1} = \dfrac{a}{r-1} \times r^n - \dfrac{a}{r-1}$ 에서

크게 보면 꼴이 $S_n = A \times r^n + B$ $(r \neq 0, r \neq 1)$이라고 볼 수 있다.

① $A + B = 0$이면 수열 $\{a_n\}$은 a_1 부터 등비수열을 이룬다.

② $A + B \neq 0$이면 수열 $\{a_n\}$은 a_2 부터 등비수열을 이룬다.

등차수열과 마찬가지로 외워두면 편하지만 빈도수가 그렇게 높지 않으므로 등차수열 합의 꼴만 기억해도 좋다.

[예제 9]

다음을 물음에 답하시오.

(1) 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제 10항까지의 합을 구하시오.

(2) 첫째항부터 제 3항까지의 합이 2, 첫째항부터 제 6항까지의 합이 18인 등비수열의 첫째항부터 제 5항까지의 합을 구하시오.

✍ 풀이

(1) $a=3$, $r=2$ 이므로 $S_{10}=\dfrac{3(2^{10}-1)}{2-1}=3\times2^{10}-3$

(2) 첫째항을 a, 공비를 r라 하면 $S_3=\dfrac{a(r^3-1)}{r-1}=2$, $S_6=\dfrac{a(r^6-1)}{r-1}=\dfrac{a(r^3-1)(r^3+1)}{r-1}=S_3(r^3+1)=18$

$2(r^3+1)=18 \Rightarrow r^3=8 \Rightarrow r=2$, $\quad a=\dfrac{2}{7}$

$S_5=\dfrac{\frac{2}{7}(2^5-1)}{2-1}=\dfrac{2\times31}{7}=\dfrac{62}{7}$

[개념 확인문제 13]

공비가 실수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$S_5=12$, $S_{10}=120$일 때, $\dfrac{S_{15}}{3}$의 값을 구하시오.

Training_2 step
기출 적용편

❶ 등차수열과 등비수열

032 2019학년도 수능 나형

첫째항이 7인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $\dfrac{S_9 - S_5}{S_6 - S_2} = 3$ 일 때, a_7의 값을 구하시오. [3점]

033 2020학년도 수능 나형

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\dfrac{a_{16}}{a_{14}} + \dfrac{a_8}{a_7} = 12$ 일 때, $\dfrac{a_3}{a_1} + \dfrac{a_6}{a_3}$의 값을 구하시오. [3점]

034 2020학년도 고3 9월 평가원 나형

등차수열$\{a_n\}$에 대하여 $a_1 = a_3 + 8$, $2a_4 - 3a_6 = 3$일 때, $a_k < 0$을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은? [3점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

035 2019학년도 고3 9월 평가원 나형

등차수열$\{a_n\}$에 대하여 $a_1 = -15$, $|a_3| - a_4 = 0$일 때, a_7의 값은? [3점]

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

036 2019학년도 고3 9월 평가원 나형

자연수 n에 대하여 x에 대한 이차방정식 $x^2 - nx + 4(n-4) = 0$ 이 서로 다른 두 실근 α, $\beta\,(\alpha < \beta)$를 갖고, 세 수 1, α, β가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, n의 값은? [3점]

① 5 ② 8 ③ 11 ④ 14 ⑤ 17

037 2009년 고3 4월 교육청 나형

등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_3 = 40$, $a_8 = 30$일 때, $|a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}|$이 최소가 되는 자연수 n의 값을 구하시오. [3점]

개념 파악하기 - (3) 자연수의 거듭제곱의 합

※ 자연수의 거듭제곱의 합 유형

① $1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

첫째항이 1, 공차가 1인 등차수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합과 같으므로 $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

② $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

항등식 $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$에 $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$을 차례로 대입한 후 각 변끼리 더하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{rll}
2^3-1^3 &= 3\times1^2+3\times1+1 & (k=1)\\
3^3-2^3 &= 3\times2^2+3\times2+1 & (k=2)\\
4^3-3^3 &= 3\times3^2+3\times3+1 & (k=3)\\
&\vdots&\\
+\quad (n+1)^3-n^3 &= 3\times n^2+3\times n+1 & (k=n)\\
\hline
(n+1)^3-1^3 &= 3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+n &
\end{array}$$

정리하면

$$3\sum_{k=1}^{n}k^2=(n+1)^3-1^3-3\sum_{k=1}^{n}k-n=(n+1)^3-3\times\frac{n(n+1)}{2}-(n+1)=(n+1)\left\{(n+1)^2-\frac{3}{2}n-1\right\}$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

양변에 $\frac{1}{3}$을 곱하면 $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Tip 공식이 헷갈리는 경우 $n=1$을 넣어서 $1^2=\frac{1\times(1+1)\times(2\times1+1)}{6}=1$이 나오는지 체크해본다.

③ $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

항등식 $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$을 이용하여 ②과 같은 방법으로 구하면

$(n+1)^4-1^4=4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k+n$

이므로 $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

④ $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{6}\{(2n+1)+3\}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Tip ④번은 외워도 되고 안 외워도 그만이다. 나름 잘나오는 편이니 외워두면 편하다.

개념 파악하기 - (4) 분수 꼴로 된 수열의 합

※ $\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$ (단, $A\neq B$)

Tip 위의 공식을 무턱대고 외우는 것보다 아래와 같은 사고과정으로 기억하는 것을 추천한다.

예를 들어 $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ 를 분리할 때, $\frac{1}{\triangle}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$ 라고 쓰고

(기왕이면 양수가 편하니 $\frac{1}{\triangle}$의 오른쪽괄호 부분이 양수가 되도록 분모가 작은 것부터 먼저 쓴다.)

오른쪽괄호를 통분하면 $\frac{1}{\triangle}\left(\frac{2}{(2k-1)(2k+1)}\right)$ 가 되니 없던 2가 분자에 생겼다.

분자의 2를 없애주려면 $\triangle=2$가 되어야한다. 따라서 $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$ 이다.

※ 부분 분수의 합 속성 특강

부분 분수의 합에는 크게 ① 초말 유형과 ② 초초말말 유형이 있다.

① 초말 유형

명명하기를 $\frac{1}{p_nq_n}$ 꼴일 때, 왼쪽의 p_n에 n 대신 $n+1$을 대입하여 오른쪽의 q_n이 나온다면

한끝차라고 정의한다. ex) $\frac{1}{a_na_{n+1}}$, $\frac{1}{n(n+1)}$

조심해야할 점은 $n+1-n$ 가 1이 돼서 한끝차가 아니라는 점이다. 즉, $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ 도 한끝차이다.

한끝차에 시그마를 취하면 첫째항의 초항과 마지막항의 말항만 남는다.

ex) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}$

첫째항 $\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)$ 중 초항 $\frac{1}{1}$

마지막항 $\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$ 중 말항 $\frac{1}{n+1}$

따라서 한 끝차의 경우는 초말이 된다.

ex) $\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$ 의 경우도 한끝차이니까 초말이 된다.

$\therefore \frac{1}{2}-\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$

Guide step
개념 익히기편

❸ 수학적 귀납법

개념 파악하기 - (1) 수열의 귀납적 정의

※ 수열을 정의할 때, 수열의 일반항을 구체적인 식으로 나타내기도 하지만
이웃하는 여러 항 사이의 관계식으로 나타내기도 한다.

예를 들어 첫째항이 2이고, 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$을 $a_n=3n-1$ 와 같이 구체적인 식으로 나타내기도 하지만 다음과 같이 나타낼 수도 있다.

$$\begin{cases} a_1=2 \\ a_{n+1}=a_n+3 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases} \quad \cdots \ ㉠$$

역으로 ㉠이 주어지면 a_1이 결정되고, n에 1, 2, 3, $\cdots$을 차례로 대입하면
$a_2=a_1+3=5$
$a_3=a_2+3=8$
$a_4=a_3+3=11$
$\vdots$
과 같이 모든 항이 결정된다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여 a_n이 정해지므로 ㉠에 의하여 수열 $\{a_n\}$이 정의된다.

이처럼

① 처음 몇 개의 항의 값
② 이웃하는 여러 항 사이의 관계식

으로 수열 $\{a_n\}$을 정의하는 것을 수열의 **귀납적 정의**라 한다.

[개념 확인문제 1]

다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$의 제 4항을 구하시오.

(1) $\begin{cases} a_1=1 \\ a_{n+1}=a_n+n^2 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$

(2) $\begin{cases} a_1=12 \\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{n} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$

✎ 정답 및 해설 p. 394, 395

Training_1 step
필수 유형편

❸ 수학적 귀납법

Theme ① 등차수열과 등비수열의 귀납적 정의

001

수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1,\ a_{n+1}-a_n=2\ (n=1,\ 2,\ 3\cdots)$
과 같이 정의될 때, a_{20} 의 값을 구하시오.

002

수열 $\{a_n\}$이 $a_1=8,\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{2}\ \ (n=1,\ 2,\ 3\cdots)$
과 같이 정의될 때, $\log_{\frac{1}{2}} a_{10}$의 값을 구하시오.

003

수열 $\{a_n\}$이 $a_{n+2}+a_n=2a_{n+1}\ \ (n=1,\ 2,\ 3\cdots)$
과 같이 정의되고 $a_4=5,\ a_7=20$ 일 때,
a_{20}의 값을 구하시오.

004

첫째항이 1이고 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 있다.
x에 대한 이차방정식 $4a_nx^2-2a_{n+1}x+a_n=0$이
모든 자연수 n에 대하여 중근을 가질 때,
$\displaystyle\sum_{k=1}^{5}a_k$의 값을 구하시오.

005

수열 $\{a_n\}$이
$\dfrac{a_3}{a_6}=8,\ (a_{n+1})^2=a_na_{n+2}\ \ (n=1,\ 2,\ 3\cdots)$
과 같이 정의될 때, $\dfrac{a_2+a_3+a_4+a_5}{a_8+a_9+a_{10}+a_{11}}$의 값을 구하시오.

3.1 빠른정답

지수 Guide step

1	(1) $a^{11}b^{12}$ (2) a^2b^3 (3) $\frac{b^4}{a}$
2	(1) $-2,\ 1\pm\sqrt{3}i$ (2) $-2,\ 2,\ 2i,\ -2i$
3	(1) -3 (2) 2 (3) -2
4	(1) 3 (2) 2 (3) 4 (4) 5
5	(1) 1 (2) $\frac{1}{27}$ (3) $\frac{1}{16}$
6	(1) 25 (2) a^9 (3) $a^6b^3c^{-3}$
7	(1) $a^{\frac{2}{3}}$ (2) $\sqrt[5]{a^3}$ (3) $a^{-\frac{2}{7}}$
8	(1) 81 (2) $x^{-4}y^{-2}$
9	(1) $5^{2\sqrt{2}}$ (2) $2^{\sqrt{2}}$ (3) 3

지수 training ~ master step

1	ㄴ, ㅁ	21	②
2	6	22	①
3	-3	23	②
4	2	24	③
5	4	25	⑤
6	3	26	15
7	64	27	④
8	25	28	2
9	726	29	④
10	54	30	11
11	3	31	15
12	2	32	36
13	0	33	24
14	3	34	②
15	9	35	③
16	20	36	⑤
17	33	37	⑤
18	30		
19	11		
20	16		

지수함수와 로그함수 Guide step

1	(1) $y=-2(x+2)^2+3$ (2) $y=2x+10$ (3) $(x+2)^2+(y-4)^2=2$
2	3
3	풀이 참고
4	풀이 참고
5	(2),(3)
6	풀이 참고
7	풀이 참고
8	(1) 최댓값은 7, 최솟값은 3 (2) 최댓값은 4, 최솟값은 1
9	풀이 참고
10	풀이 참고
11	(1) 최댓값은 4, 최솟값은 1 (2) 최댓값은 -1, 최솟값은 -2

지수함수와 로그함수 training ~ master step

1	9	14	729
2	81	15	27
3	$\frac{1}{81}$	16	3
4	ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅅ	17	18
5	6	18	2
6	4	19	6
7	2	20	11
8	ㄹ, ㅁ	21	2
9	2	22	4
10	6	23	3
11	2	24	14
12	16	25	1
13	32	26	343

27	5	57	②
28	7	58	③
29	3	59	①
30	12	60	②
31	ㄱ, ㄷ, ㄹ, ㅂ	61	③
32	5	62	⑤
33	4	63	③
34	16	64	⑤
35	8	65	20
36	43	66	③
37	99	67	④
38	81	68	11
39	16	69	54
40	20	70	①
41	6	71	④
42	$A<C<B$	72	⑤
43	$b<a<a^b$	73	③
44	ㄱ, ㄴ	74	①
45	$A<B<C$	75	③
46	4	76	⑤
47	3	77	30
48	72	78	③
49	③	79	①
50	①	80	③
51	①	81	①
52	④	82	②
53	21	83	②
54	②	84	③
55	22	85	②
56	③		

따라서 $\log_a b = \log_{3^{\frac{k}{2}}} 3^{\frac{3k}{2}} = \dfrac{\frac{3k}{2}}{\frac{k}{2}} = \dfrac{6k}{2k} = 3$이다.

답은 ③

040

$n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 $\log_n 4 \times \log_2 9$의 값이 자연수

$\log_n 4 \times \log_2 9 = m$ (m은 자연수)

$\dfrac{2\log 2}{\log n} \times \dfrac{2\log 3}{\log 2} = \dfrac{4\log 3}{\log n} = 4\log_n 3 = m$

$n=2$ 일 때, $4\log_2 3$ 은 자연수가 아니므로 모순이다.

$n \geq 3$일 때, $\log_n 3 \leq \log_3 3 = 1$ 이므로

$4\log_n 3 = m$ (m은 자연수)이 되려면 다음과 같이

4가지의 case로 분류할 수 있다.

① $\log_n 3 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow 3 = n^{\frac{1}{4}} \Rightarrow 81 = n$

② $\log_n 3 = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 3 = n^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 9 = n$

③ $\log_n 3 = \dfrac{3}{4} \Rightarrow 3 = n^{\frac{3}{4}} \Rightarrow 3^{\frac{4}{3}} = n$

n은 자연수이어야 하므로 모순이다.

④ $\log_n 3 = \dfrac{4}{4} = 1 \Rightarrow 3 = n$

따라서 조건을 만족시키는 모든 n의 값의 합은 93이다.

답은 ①

041

$2^{\frac{1}{n}} = a,\ 2^{\frac{1}{n+1}} = b \Rightarrow \dfrac{1}{n} = \log_2 a,\ \dfrac{1}{n+1} = \log_2 b$

$$\left\{\frac{3^{\log_2 ab}}{3^{(\log_2 a)(\log_2 b)}}\right\}^5 = \left\{\frac{3^{\log_2 a + \log_2 b}}{3^{(\log_2 a)(\log_2 b)}}\right\}^5 = \left\{\frac{3^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}}{3^{\frac{1}{n(n+1)}}}\right\}^5$$

$$= \left\{3^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n(n+1)}}\right\}^5 = \left\{3^{\frac{2}{(n+1)}}\right\}^5 = 3^{\frac{10}{n+1}}$$

$3^{\frac{10}{n+1}}$ 이 자연수가 되도록 하려면 $n+1$ 이 10의 약수이어야 한다.

따라서 조건을 만족시키는 $n=1,\ 4,\ 9$ 이므로 모든 n의 값의 합은 14이다.

답은 ①

042

$a,\ b,\ c,\ k > 0$

$3^a = 5^b = k^c = z$ 라 두면

$3 = z^{\frac{1}{a}},\ 5 = z^{\frac{1}{b}},\ k = z^{\frac{1}{c}}$

$\log c = \log(2ab) - \log(2a+b)$

$\Rightarrow \log c = \log\dfrac{2ab}{2a+b} \Rightarrow c = \dfrac{2ab}{2a+b}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{c} = \dfrac{2a+b}{2ab} \Rightarrow \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{2a}$

$z^{\frac{1}{c}} = z^{\frac{1}{2a}} \times z^{\frac{1}{b}} = z^{\frac{1}{2a}+\frac{1}{b}} \Rightarrow k = \sqrt{3} \times 5 = 5\sqrt{3}$

따라서 $k^2 = 25 \times 3 = 75$이다.

Tip 놀랍게도 이 문제의 정답률이 9% 였다.
$= k$을 쓰면 손쉽게 구할 수 있는 문제임에도 말이다.
$a,\ b,\ c,\ d$가 아니라 $a,\ b,\ c,\ k$ 라는 문자를 쓴 이유는
$= k$ 테크닉을 쓸 때 약간의 당혹감을 주고자 하는
평가원의 의도로 보인다. 당황 하지 말고 $= z$ 로 두면 된다.

답은 75

043

두 양수 $a,\ b\ (a > b)$에 대하여

$9^a = 2^{\frac{1}{b}},\ (a+b)^2 = \log_3 64$

$3^{2a} = 2^{\frac{1}{b}} \Rightarrow 3^{2ab} = 2 \Rightarrow 2ab = \log_3 2$

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = \log_3 64$

$a,\ b > 0$이므로 $|a+b| = a+b = \sqrt{6\log_3 2}$

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + \log_3 2 = \log_3 64$

$\Rightarrow a^2 + b^2 = \log_3 32$

$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = \log_3 32 - \log_3 2 = \log_3 16$

$a > b$이므로 $|a-b| = a-b = \sqrt{4\log_3 2}$

따라서 $\dfrac{a-b}{a+b} = \sqrt{\dfrac{4\log_3 2}{6\log_3 2}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$이다.

답은 ④

047

100이하의 자연수 전체의 집합을 S, $n\in S$

$\{k \mid k\in S$ 이고 $\log_2 n-\log_2 k$는 정수$\}$

$\log_2 n-\log_2 k=m$ (m은 정수)

$\log_2\frac{n}{k}=m \Rightarrow \frac{n}{k}=2^m \Rightarrow \frac{n}{2^m}=k$

만약 $n=10$이라고 가정해보자.

$\frac{10}{2^m}=k$이 자연수가 되려면 10의 양의 약수가 2^m이 되도록 하면 된다. 10 의 약수 중 2^m (m은 정수)을 만족시키는 약수는 1, 2 이므로 $m=0,\ 1$ 이다.

또한 $\frac{10}{2^m}\le 100$ 이 되도록 하는 $m<0$인 정수를 택하면 된다. $m=-1,\ -2,\ -3$

따라서 $f(10)=5$이다.

마찬가지로 $n=99$ 라고 가정해보자.

$\frac{99}{2^m}=k$이 자연수가 되려면 99의 양의 약수가 2^m이 되도록 하면 된다. 99의 약수 중 2^m (m은 정수)을 만족시키는 약수는 1이므로 $m=0$ 이다.

또한 $\frac{99}{2^m}\le 100$ 이 되도록 하는 $m<0$인 정수를 택하면 된다. 이는 존재하지 않는다.

따라서 $f(99)=1$이다.

위의 예들을 통해 추론한 결과 $f(n)=1$ 이 되도록 하려면 n의 약수 중 2^m(m은 정수)을 만족시키는 약수가 1뿐이어야 하고($m=0$은 무조건 포함) $\frac{n}{2^m}\le 100$ 이 되도록 하는 $m<0$인 정수가 존재하지 않아야 한다.

n의 약수 중 2^m(m은 정수)을 만족시키는 약수가 1뿐이려면 n은 홀수이어야 한다. ⋯조건 ①

홀수 중에서 $\frac{n}{2^m}\le 100$이 되도록 하는 $m<0$인 정수가 존재하지 않는 것을 찾으면 된다. ⋯ 조건 ②

다시 말해 조건 ①, ②를 모두 만족시켜야한다.

만약 $n=49$ 이면 $\frac{49}{2^m}\le 100$을 만족시키는 음의 정수 m이 존재하므로 가능하지 않다. ($m=-1$)

따라서 n은 $51\le n\le 99$인 홀수이다.

즉, $n=51,\ 53,\ 55,\ 57,\ 59,\ 61,\ \cdots,\ 97,\ 99$ 이므로 25개다.

답은 25

[빠른 정답]

1	(1) $y=-2(x+2)^2+3$ (2) $y=2x+10$ (3) $(x+2)^2+(y-4)^2=2$
2	3
3	풀이 참고
4	풀이 참고
5	(2),(3)
6	풀이 참고
7	풀이 참고
8	(1) 최댓값은 7, 최솟값은 3 (2) 최댓값은 3, 최솟값은 1
9	풀이 참고
10	풀이 참고
11	(1) 최댓값은 4, 최솟값은 1 (2) 최댓값은 -1, 최솟값은 -2

[해설]

개념 확인문제 1

x 에 $x+2$를 대입하고 y에 $y-3$을 대입한다.

y축의 방향으로 a만큼 평행이동 : $y \rightarrow y-a$

$y-a=f(x)$보다는 $y=f(x)+a$와 같은 형태를 더 많이 쓴다.

(1) $y=-2x^2 \Rightarrow y=-2(x+2)^2+3$

(2) $y=2x+3 \Rightarrow y=2(x+2)+6 \Rightarrow y=2x+10$

(3) $x^2+(y-1)^2=2 \Rightarrow (x+2)^2+(y-4)^2=2$

답은 (1) $y=-2(x+2)^2+3$
(2) $y=2x+10$
(3) $(x+2)^2+(y-4)^2=2$

개념 확인문제 2

$2x-y+1=0$을 원점에 대하여 대칭이동시키려면

$x \rightarrow -x,\ y \rightarrow -y$

$2x-y+1=0 \Rightarrow -2x+y+1=0$를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동시키려면 $x \rightarrow x-2$

$-2x+y+1=0 \Rightarrow -2(x-2)+y+1=0$

직선 $y=2(x-2)-1=2x-5$이

원 $(x-4)^2+(y-a)^2=1$의 넓이를 이등분하려면

직선이 원의 중심을 지나면 된다.

원의 중심은 $(4,\ a)$이므로 직선의 식에 대입하면

$a=8-5=3$이다.

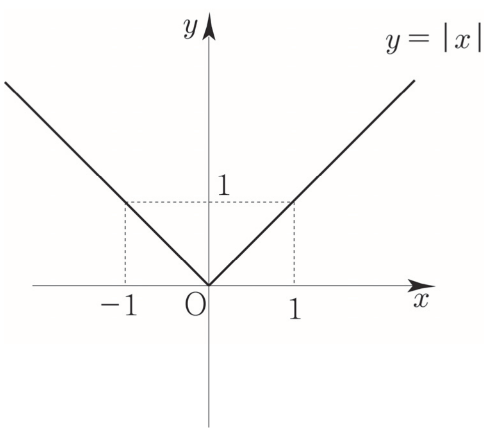
답은 3

개념 확인문제 3

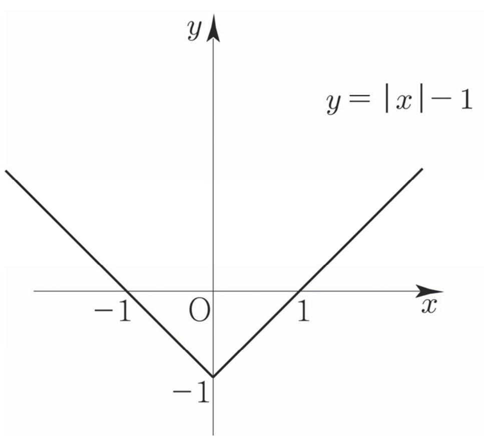
(1) $y=|x|-1$

① $y=x$를 기본함수로 두자.

② $y=|f(x)|$을 적용하면 $y=|x|$이다.



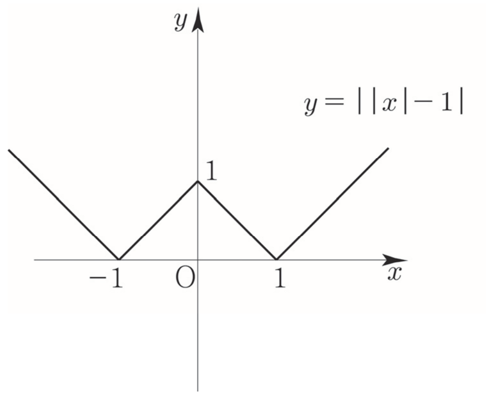
③ $y=|x|$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 $y=|x|-1$이다.



(2) $y=||x|-1|$

① $y=|x|-1$를 기본함수로 두자.

② $y=|f(x)|$을 적용하면 $y=||x|-1|$이다.



다르게 접근해도 된다.

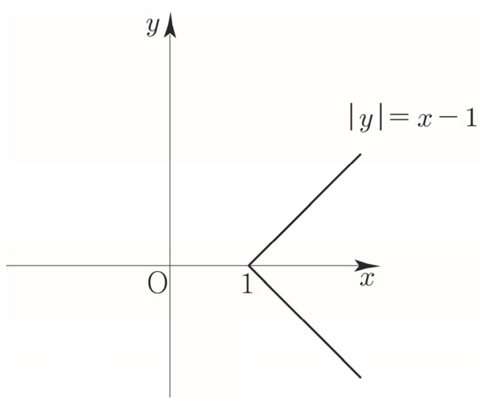
① $y=|x-1|$을 기본함수로 두자.

② $x \rightarrow |x|$ (x가 양수인 부분을 y축 대칭) 하면 $y=||x|-1|$이다.

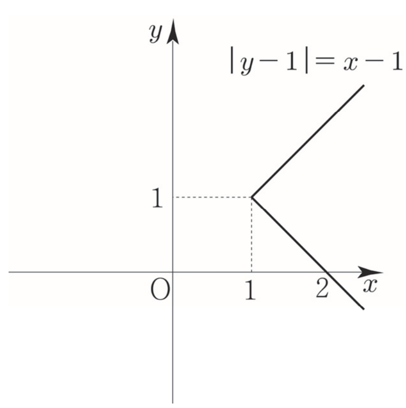
(3) $|y-1|=x-1$

① $y=x-1$를 기본함수로 두자.

② $y \rightarrow |y|$ (y가 양수인 부분을 x축 대칭) 하면 $|y|=x-1$이다.

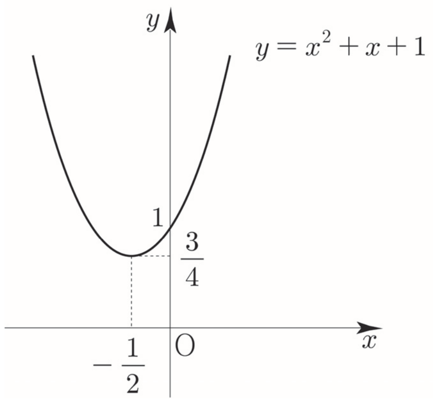


③ $|y|=x-1$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 $|y-1|=x-1$이다.



(4) $y=x^2+|x|+1$

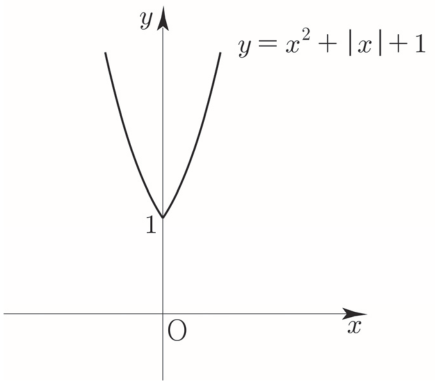
① $y=x^2+x+1$을 기본함수로 두자.



② $x \rightarrow |x|$ (x가 양수인 부분을 y축 대칭) 하면

$y=|x|^2+|x|+1$ 이 $|x|^2=x^2$ 이므로

$y=x^2+|x|+1$이다.

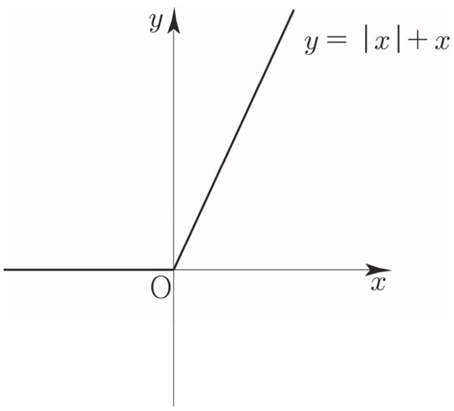


개념 확인문제 4

(1) $y=|x|+x$

$x \geq 0 \Rightarrow y=x+x=2x$
$x<0 \Rightarrow y=-x+x=0$

$$f(x)=\begin{cases} 2x & (x \geq 0) \\ 0 & (x<0) \end{cases}$$



(2) $y=|x|+|x-1|$

절댓값이 걸려있는 식은 x, $x-1$ 이므로

$x \leq 0$인지 $0<x \leq 1$인지 $1<x$에 따라

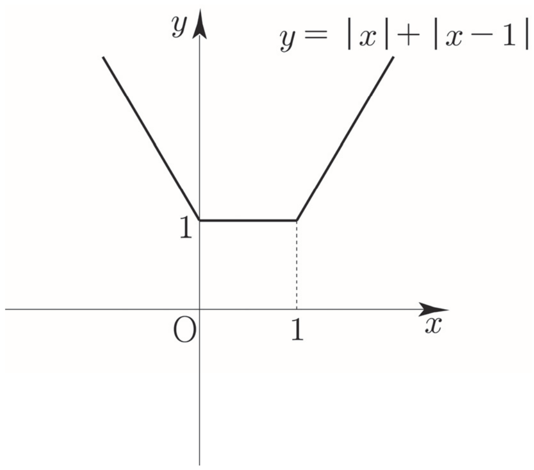
case분류할 수 있다.

$x>1 \Rightarrow y=x+x-1=2x-1$

$0<x \leq 1 \Rightarrow y=x-(x-1)=1$

$x \leq 0 \Rightarrow -x-(x-1)=-2x+1$

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1 & (x>1) \\ 1 & (0<x \leq 1) \\ -2x+1 & (x \leq 0) \end{cases}$$



개념 확인문제 5

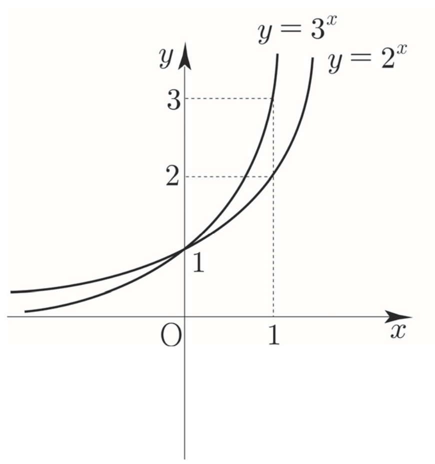
(2). (3) 만 지수함수이다.

(1)은 다항함수, (4)는 유리함수이다.

답은 (2),(3)

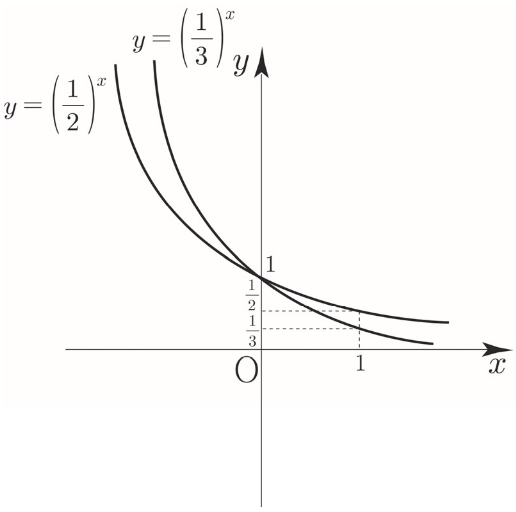
개념 확인문제 6

(1) $y=2^x$, $y=3^x$



$(0,\ 1)$에서 교차됨에 유의하자.
한 좌표축 안에 지수함수를 여럿이 그릴 때는
$x=1$을 대입하여 나오는 함숫값을 토대로 누가 위에 있고
아래에 있는지 판단할 수 있다.

(2) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$



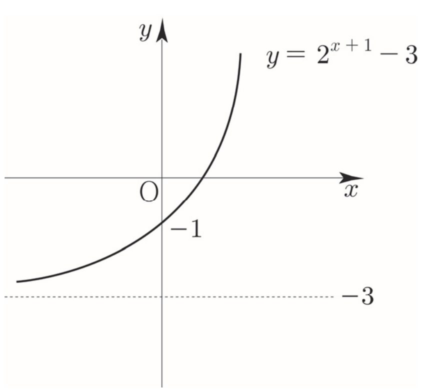
$(0,\ 1)$에서 교차됨에 유의하자.

개념 확인문제 7

(1) $y=2^{x+1}-3$

① $y=2^x$를 기본함수로 두자.
② x축의 방향으로 -1만큼 y축의 방향으로 -3만큼
평행이동하면 $y=2^{x+1}-3$이다.

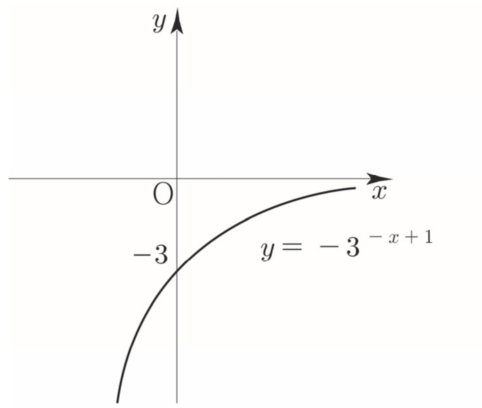
지수함수의 경우 x축 방향의 평행이동은 전체적인
그래프 개형에 영향을 주지 않으므로 y축 방향의 평행이동을 고려하면 된다.



점근선 : $y=-3$

(2) $y=-3^{-x+1}$

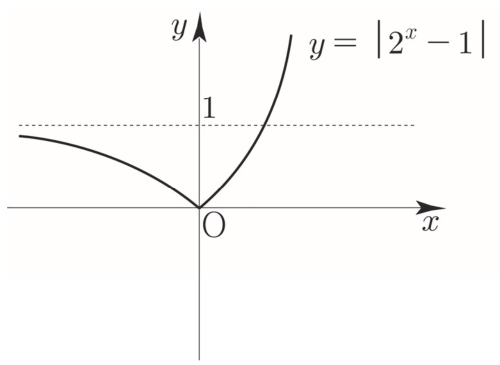
① $y=3^{-x}$를 기본함수로 두자.
② x축 방향으로 1만큼 평행이동하면
$y=3^{-(x-1)}=3^{-x+1}$이다.
③ x축에 대하여 대칭이동하면
$y \to -y$
$y=f(x) \Rightarrow -y=f(x) \Rightarrow y=-f(x)$
$y=-3^{-x+1}$이다.



점근선 : $y=0$

(3) $y=|2^x-1|$

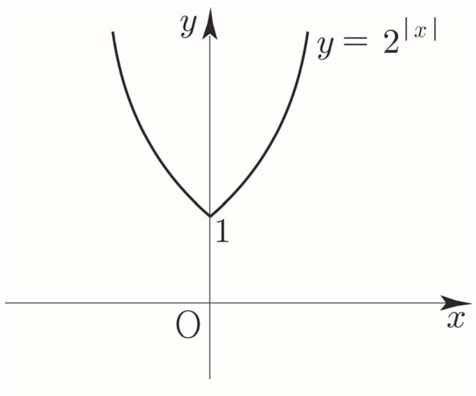
① $y=2^x-1$를 기본함수로 두자.
② $y=|f(x)|$을 적용하면 $y=|2^x-1|$



점근선 : $y=1$

(4) $y=2^{|x|}$

① $y=2^x$를 기본함수로 두자.
② $x \to |x|$ (x가 양수인 부분을 y축 대칭) 하면
$y=2^{|x|}$이다.



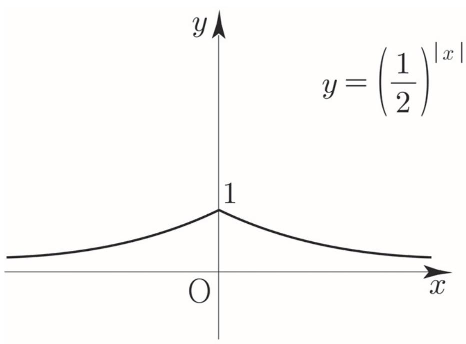
점근선은 존재하지 않는다.

(5) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|}+1$

① $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ 을 기본함수로 두자.

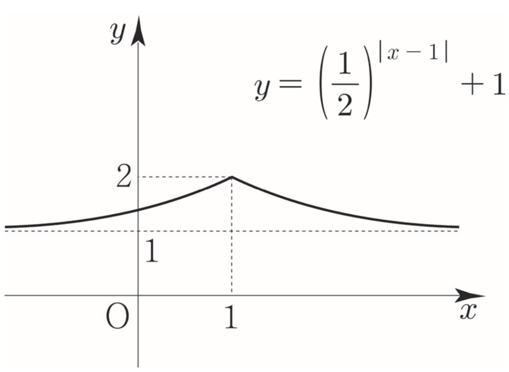
② $x \to |x|$ (x가 양수인 부분을 y축 대칭) 하면

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ 이다.



③ x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동

하면 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|}+1$이다.



점근선 : $y=1$

Tip $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|}$ 의 그래프를 그릴 때,

많은 학생들이 실수하는 포인트는 다음과 같다.

<실수하는 학생의 사고 과정>

① $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ 을 기본함수로 두자.

② x축의 방향으로 1만큼 평행이동하면

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$ 이다.

③ $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|}$

지수에 있는 $x-1$에만 절댓값을 거는 행위는

배운 적이 없다. 만약 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$ 에서

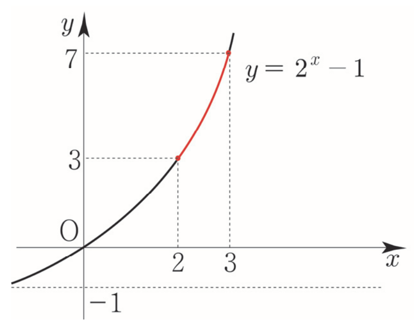
$x \to |x|$를 하면 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|-1}$ 이 되지

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|}$ 이 되지는 않는다.

따라서 우리가 배운 테두리 안에서 식을 설계해야한다.

개념 확인문제 8

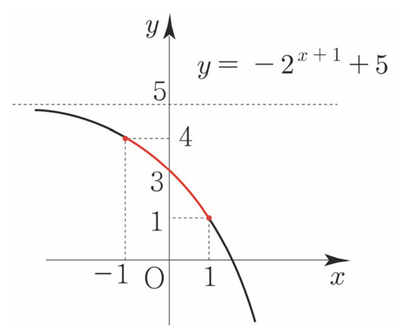
(1) 정의역이 $\{x|\ 2 \le x \le 3\}$인 함수 $y=2^{x}-1$



$x=2$ 일 때, 최솟값 $2^2-1=3$이다.

$x=3$일 때, 최댓값 $2^3-1=7$이다.

(2) 정의역이 $\{x|\ -1 \le x \le 1\}$인 함수 $y=-2^{x+1}+5$



$x=1$일 때, 최솟값 $-2^2+5=1$이다.

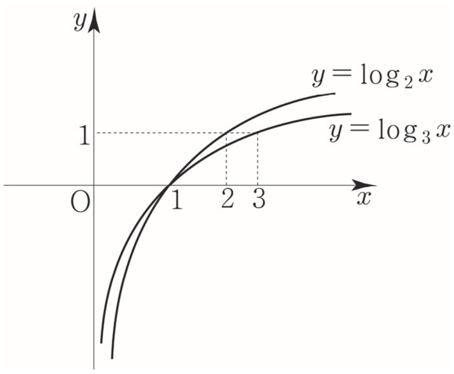
$x=-1$일 때, 최댓값 $-2^0+5=4$이다.

답은 (1) 최댓값은 7, 최솟값은 3

(2) 최댓값은 4, 최솟값은 1

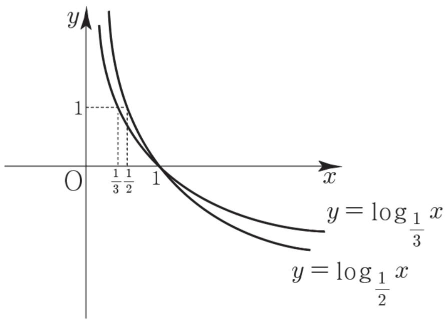
개념 확인문제 9

(1) $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$



$(1,\ 0)$에서 교차됨에 유의하자.
한 좌표축 안에 로그함수를 여럿이 그릴 때는
$y=1$의 그래프 만나는 점의 x좌표를 토대로 누가 위에
있고 아래에 있는지 판단할 수 있다.

(2) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$, $y=\log_{\frac{1}{3}} x$



$(1,\ 0)$에서 교차됨에 유의하자.

개념 확인문제 10

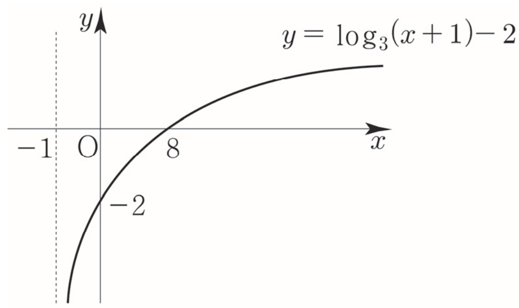
(1) $y=\log_3(x+1)-2$

① $y=\log_3 x$를 기본함수로 두자.

② x축의 방향으로 -1만큼 y축의 방향으로 -2만큼
평행이동하면 $y=\log_3(x+1)-2$이다

Tip 로그함수를 그릴 때, 점근선부터 찾는 것이 좋다.
진수가 0이 되도록 하는 x값을 a라 했을 때,
$x=a$가 점근선의 방정식이 된다.

로그함수의 경우 y축 방향의 평행이동은 전체적인
그래프 개형에 영향을 주지 않으므로 x축 방향의 평행이동
을 고려하면 된다.



점근선 : $x=-1$

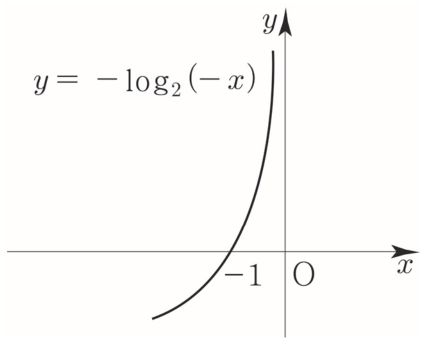
(2) $y=-\log_2(-x)$

① $y=\log_2 x$를 기본함수로 두자.

② $x\ \rightarrow\ -x$ (y축에 대하여 대칭)하면
$y=\log_2(-x)$이다.

③ $y\ \rightarrow\ -y$ (x축에 대하여 대칭)하면
$y=-\log_2(-x)$ 이다.

Tip 그래프가 익숙해지면 기본함수가 $y=-\log_2(-x)$
가 되는 날이 온다. 익숙해질 때까지 많이 그려보자.



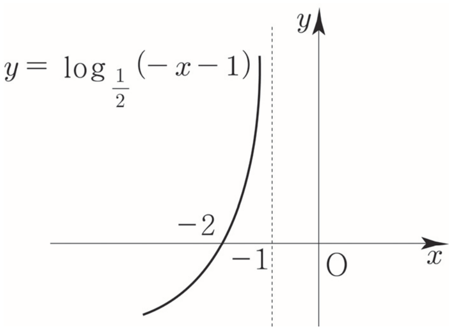
점근선 : $x=0$

(3) $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x-1)$

① $y=\log_{\frac{1}{2}} x$를 기본함수로 두자.

② $x\ \rightarrow\ -x$ (y축에 대하여 대칭)하면
$y=\log_{\frac{1}{2}}(-x)$이다.

③ x축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면
$y=\log_{\frac{1}{2}}(-(x+1))=\log_{\frac{1}{2}}(-x-1)$ 이다.

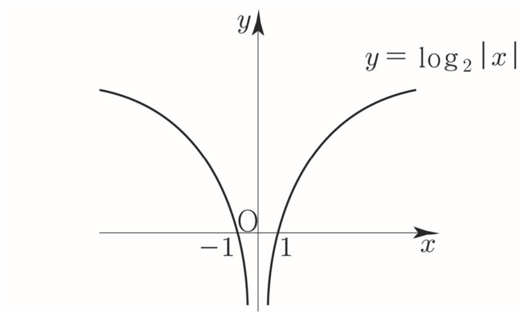


점근선 : $x=-1$

(4) $y=\log_2|x|$

① $y=\log_2 x$을 기본함수로 두자.

② $x \to |x|$ (x가 양수인 부분을 y축 대칭) 하면
$y=\log_2|x|$이다.



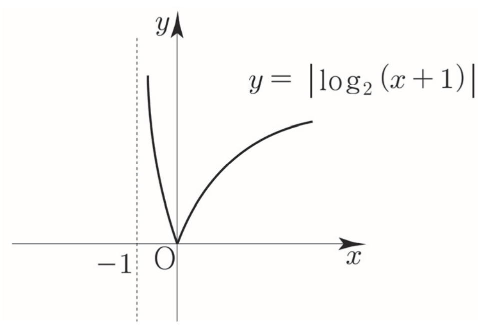
점근선 : $x=0$

Tip 만약 $y=\log_2 x^2$의 그래프를 그리라고 했을 때,
$y=2\log_2 x$가 아니라 $y=2\log_2|x|$임을 기억하자.
따라서 위와 같은 그래프형태가 그려진다.

(5) $y=|\log_2(x+1)|$

① $y=\log_2(x+1)$를 기본함수로 두자.

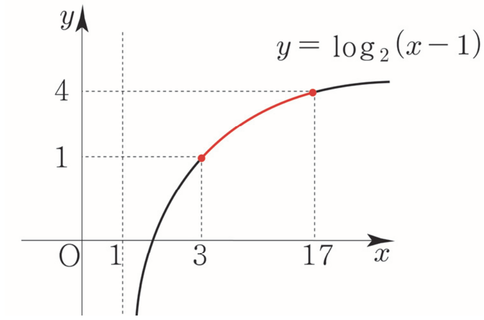
② $y=|f(x)|$를 적용하면 $y=|\log_2(x+1)|$이다.



점근선 : $x=-1$

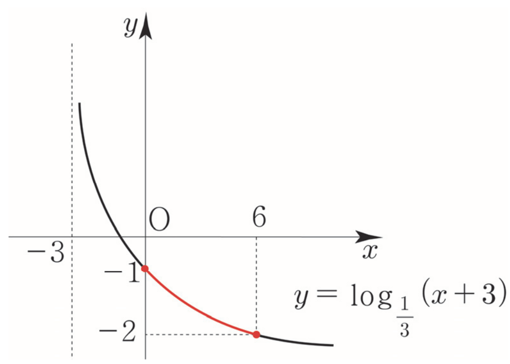
개념 확인문제 11

(1) 정의역이 $\{x|\ 3\le x\le 17\}$인 함수 $y=\log_2(x-1)$



$x=3$일 때, 최솟값은 $\log_2(3-1)=\log_2 2=1$이다.
$x=17$일 때, 최댓값은 $\log_2(17-1)=\log_2 16=4$이다.

(2) 정의역이 $\{x|\ 0\le x\le 6\}$인 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+3)$



$x=6$일 때, 최솟값은 $\log_{\frac{1}{3}}(6+3)=\log_{3^{-1}}3^2=-2$이다.
$x=0$일 때, 최댓값은 $\log_{\frac{1}{3}}(0+3)=\log_{3^{-1}}3=-1$이다.

답은 (1) 최댓값은 4, 최솟값은 1
(2) 최댓값은 -1, 최솟값은 -2

지수함수와 로그함수 Training – 1 step

[빠른 정답]

1	9	25	1
2	81	26	343
3	$\frac{1}{81}$	27	5
4	ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅅ	28	7
5	6	29	3
6	4	30	12
7	2	31	ㄱ, ㄷ, ㄹ, ㅂ
8	ㄹ, ㅁ	32	5
9	2	33	4
10	6	34	16
11	2	35	8
12	16	36	43
13	32	37	99
14	729	38	81
15	27	39	16
16	3	40	20
17	18	41	6
18	2	42	$A<C<B$
19	6	43	$b<a<a^b$
20	11	44	ㄱ, ㄴ
21	2	45	$A<B<C$
22	4	46	4
23	3	47	3
24	14	48	72

[해설]

001

$y=a\times 2^{x-1}$ 가 $(2,\ 8)$, $(b,\ 64)$를 지나므로
두 점을 대입하면
$8=2a \Rightarrow a=4$
$64=4\times 2^{b-1} \Rightarrow 16=2^4=2^{b-1} \Rightarrow b=5$
따라서 $a+b=9$이다.

답은 9

002

$f(x)=3^{ax+b}$에서 $f(1)=9$, $f(3)=27$이므로
$f(1)=3^{a+b}=3^2 \Rightarrow a+b=2$
$f(3)=3^{3a+b}=3^3 \Rightarrow 3a+b=3$

$a+b=2$, $3a+b=3$을 연립하면 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{2}$이다.

$f(x)=3^{\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}$

따라서 $f(a+3b)=f(5)=3^{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}}=3^4=81$이다.

답은 81

003

$A(-2,\ 9)$, $B(b,\ k)$, $C(0,\ c)$라 하자.
$2\overline{AC}=\overline{CB}$라는 말은
선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점이 C라는 뜻이다

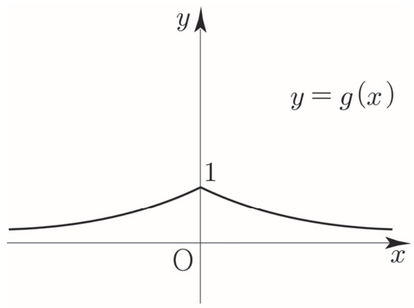
$\frac{2\times A+1\times B}{2+1}=\frac{2A+B}{3}=C$이므로
x좌표를 계산하면
$\frac{2A+B}{3}=\frac{2(-2)+b}{3}=0 \Rightarrow -4+b=0 \Rightarrow b=4$
따라서 $k=\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$이다.

답은 $\frac{1}{81}$

004

$g(x)=2^{-f(x)}$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

$$g(x)=\begin{cases} 2^{-x} & (x\geq 0) \\ 2^{x} & (x<0) \end{cases}$$



ㄱ. 함수 $y=g(x)$의 그래프는 모든 실수 x에 대하여 $g(-x)=g(x)$이므로 y축에 대하여 대칭이다.
따라서 ㄱ은 참이다.

ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\le g(0)$는
함수 $y=g(x)$가 $x=0$에서 최댓값을 갖는지 물어보는 것과 같다. 최댓값 $g(0)=1$을 가지므로
따라서 ㄴ은 참이다.

ㄷ. x축을 점근선으로 가지므로 ㄷ은 참이다.

ㄹ. 치역은 $\{y \mid 0<y\le 1\}$이므로 ㄹ은 참이다.

ㅁ. $0<x<1$ 일 때, x값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 ㅁ은 거짓이다.

ㅂ. $g(x_1)=g(x_2)$이면 $x_1=x_2$ 또는 이것의 대우인
$x_1\ne x_2$ 이면 $g(x_1)\ne g(x_2)$ 는
함수 $g(x)$가 일대일 함수인지 물어보는 것과 같다.
$y=k$(가로선)을 그었을 때, $g(x)$와 2개 이상 만나는 점이 존재하므로 $g(x)$는 일대일함수가 아니다.
따라서 ㅂ은 거짓이다.

ㅅ. $k>0$이면 $0<\dfrac{1}{k+1}<1$이므로
방정식 $g(x)=\dfrac{1}{k+1}$은 항상 서로 다른 2개의 실근을 갖는다. 따라서 ㅅ은 참이다.

답은 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅅ

005

$y=5^{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼.
y축의 방향으로 3만큼 평행이동
$x\to x-2,\ y\to y-3$

$y=5^{-(x-2)}+3=5^{-x+2}+3$

y축에 대하여 대칭이동
$x\to -x$

$y=5^{-(-x)+2}+3=5^{x+2}+3=5^{ax+b}+c$
$a=1,\ b=2,\ c=3$
따라서 $a+b+c=1+2+3=6$이다.

답은 6

006

$y=3^{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼. y축의 방향으로 n만큼 평행이동
$x\to x-m,\ y\to y-n$

$y=3^{3(x-m)}+n = 3^{-3m}\times 3^{3x}+n$
$m=-1,\ n=5$
따라서 $m+n=4$이다.

답은 4

007

$y=a^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동
$x\to -x$

$y=a^{-x}$

x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동
$x\to x-5,\ y\to y-4$

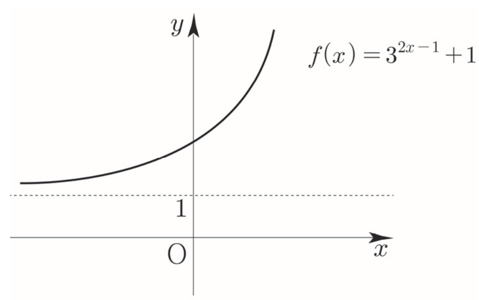
$y=a^{-(x-5)}+4=a^{-x+5}+4$ 가 $(3,\ 8)$을 지나므로

$8=a^{-3+5}+4 \Rightarrow 4=a^2 \Rightarrow a=2\ (a>0)$

답은 2

008

$f(x)=3^{2x-1}+1$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



016

두 곡선 $y=3^{x+m}$, $y=3^{-x}$이 y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하면 $A(0,\ 3^m)$, $B(0,\ 1)$이다.

$\overline{AB}=26$이므로 $|3^m-1|=26$이다.

① $3^m-1=26 \Rightarrow 3^m=27 \Rightarrow m=3$
② $3^m-1=-26 \Rightarrow 3^m=-25$
$3^m>0$ 이므로 모순이다.
따라서 $m=3$이다.

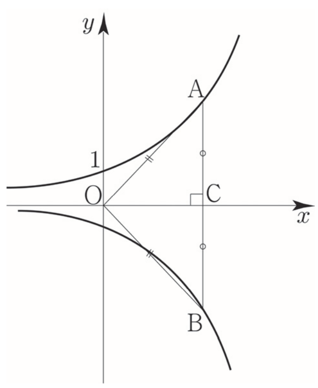
답은 3

Tip 비록 이 문제에서는 ②번 case가 모순이지만 길이를 계산할 때는 반드시 절댓값을 해줘야 한다는 것을 잊지 말자. 또한 점과 점 사이 공식을 사용하면 자연스럽게 절댓값이 붙는 것을 확인 할 수 있다.
$\sqrt{(0-0)^2+(3^m-1)^2}=|3^m-1|$ $\left(\sqrt{a^2}=|a|\right)$

017

두 곡선 $y=3^x$, $y=-9^{x-1}$이 y축과 평행한 직선과 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B

점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 C라 하자.



$\overline{OA}=\overline{OB}$이면 $\overline{AC}=\overline{BC}$이므로 점 C$(t,\ 0)$라 하면
$\overline{AC}=3^t$, $\overline{BC}=9^{t-1}$

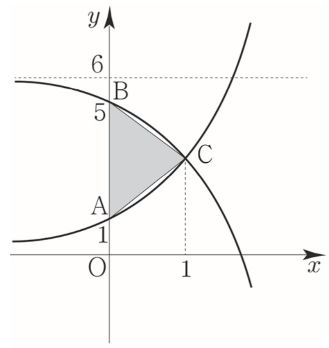
$3^t=9^{t-1} \Rightarrow 3^t=3^{2t-2} \Rightarrow t=2t-2 \Rightarrow t=2$
따라서 $\overline{AB}=18$, $\overline{OC}=2$이므로 삼각형 AOB의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OC}=\frac{1}{2}\times18\times2=18$이다.

답은 18

018

두 곡선 $y=3^x$, $y=-3^x+6$가 y축과 만나는 서로 다른 두 점을 각각 $A(0,\ 1)$, $B(0,\ 5)$

$3^x=-3^x+6 \Rightarrow 2\times3^x=6 \Rightarrow x=1$ 이므로
두 곡선의 교점은 $C(1,\ 3)$이다.

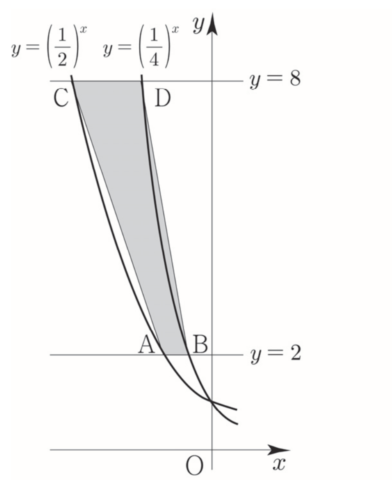


따라서 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times4\times1=2$이다.

답은 2

019

두 곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$가 $y=2$와 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라 하고, $y=8$과 만나는 서로 다른 두 점을 각각 C, D



$A(-1,\ 2)$, $B\left(-\frac{1}{2},\ 2\right)$, $C(-3,\ 8)$, $D\left(-\frac{3}{2},\ 8\right)$ 이므로
$\overline{AB}=\frac{1}{2}$, $\overline{CD}=\frac{3}{2}$ 이다.

따라서 사각형 ABDC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)\times6=6$이다.

답은 6

020

$y=\log_3(x-2)+3$의 그래프가 $(a,\ 5)$를 지나므로

$5=\log_3(a-2)+3 \Rightarrow 2=\log_3(a-2) \Rightarrow a-2=9$

따라서 $a=11$이다.

답은 11

021

좌표평면에서 두 곡선 $y=\log_3 x,\ y=\log_9 x$가 직선 $x=81$과 만나는 점을 각각 A, B

A(81, 4), B(81, 2)이므로
두 점 A, B사이의 거리는 2이다.

답은 2

022

함수 $f(x)=2^{x+a}+b$의 역함수를 $g(x)$

$y \to x,\ x \to y$

$x=2^{y+a}+b \Rightarrow x-b=2^{y+a} \Rightarrow \log_2(x-b)=y+a$

따라서 $g(x)=\log_2(x-b)-a$이다.

함수 $y=g(x)$의 그래프는 점 $(7,\ 1)$를 지나므로
$\log_2(7-b)-a=1$

점근선이 직선 $x=3$ 이므로
$b=3$

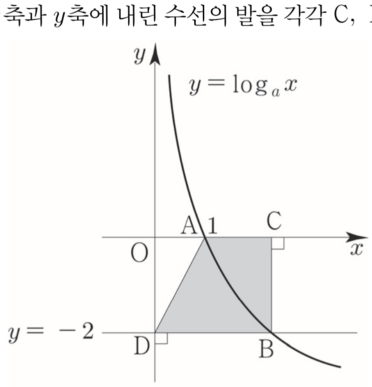
$\log_2(7-3)-a=1 \Rightarrow a=1$

따라서 $a+b=4$이다.

답은 4

023

$0<a<1$인 상수 a에 대하여 함수 $y=\log_a x$이 x축, 직선 $y=-2$와 만나는 점을 각각 A, B
점 B에서 x축과 y축에 내린 수선의 발을 각각 C, D



A(1, 0), C$(a^{-2},\ 0)$, B$(a^{-2},\ -2)$, D$(0,\ -2)$이므로
$\overline{AC}=a^{-2}-1,\ \overline{DB}=a^{-2},\ \overline{BC}=2$ 이다.

사각형 ACBD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(\overline{AC}+\overline{DB})\times\overline{BC}=\frac{1}{2}\times(2a^{-2}-1)\times 2=2a^{-2}-1$

$=17 \Rightarrow \frac{2}{a^2}=18 \Rightarrow \frac{1}{a}=3\ (0<a<1)$

답은 3

024

함수 $f(x)=\log_2(ax+b)$의 역함수를 $g(x)$

$y \to x,\ x \to y$

$x=\log_2(ay+b) \Rightarrow ay+b=2^x \Rightarrow y=\frac{1}{a}\times 2^x-\frac{b}{a}$

함수 $y=g(x)$의 그래프는 점 $(4,\ 2)$를 지나므로

$2=\frac{16}{a}-\frac{b}{a} \Rightarrow 2a=16-b\ (a\neq 0)$

점근선이 직선 $y=-6$이므로

$-\frac{b}{a}=-6 \Rightarrow b=6a$

$2a=16-b,\ b=6a \Rightarrow 8a=16 \Rightarrow a=2,\ b=12$

따라서 $a+b=14$ 이다.

답은 14

역함수의 성질을 이용해서 풀어보자.
$g(x)$가 점 $(4,\ 2)$를 지나면 역함수인 $f(x)$는 점 $(2,\ 4)$를 지나고 $g(x)$가 $y=-6$을 점근선으로 가지면 역함수인 $f(x)$는 $x=-6$을 점근선으로 가진다.
$y=\log_2(ax+b)$ 에서 점근선이 $x=-6$이므로
$-6a+b=0 \Rightarrow b=6a$이고 함수가 점$(2,\ 4)$를 지나므로
$4=\log_2(2a+6a) \Rightarrow 8a=16 \Rightarrow a=2,\ b=12$

025

점 A가 $y=\log_2(-x)$위에 있으므로
A$(t,\ \log_2(-t))$라 둘 수 있다.
점 B(4, 0) 에 대하여 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점 C가 y축 위에 있으므로 점 C$(0,\ k)$ 이다.

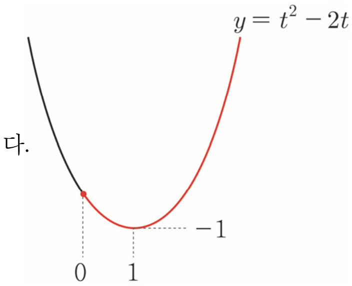
$f(x)=\dfrac{x^{\log x}}{x^2}$ 양변에 상용로그를 취하면

$\log f(x)=\log\dfrac{x^{\log x}}{x^2}=(\log x)^2-2\log x \quad (x\ge 1)$

$\log x=t$라 치환하자.
$x\ge 1$에서 t의 범위를 구하면 $t\ge 0$이다.

$y=t^2-2t$

$t=1$일 때, 최솟값 -1이다.



$\log f(x)=t^2-2t$
$y=\log x$는 증가함수이므로 t^2-2t가 최솟값을 가질 때,
$f(x)$가 최솟값을 갖는다.

$t=1 \Rightarrow \log x=1 \Rightarrow x=10$일 때,
$\log f(10)=-1$

최솟값 $f(10)=\dfrac{1}{10}$이다.

$a=10,\ b=\dfrac{1}{10}$

따라서 $10(a-b)=10\left(10-\dfrac{1}{10}\right)=100-1=99$이다.

답은 99

038

$y=2^x+6$의 점근선은 $y=6$ 이므로
$y=6$과 $y=\log_3 x+2$의 교점은
$6=\log_3 x+2 \Rightarrow 4=\log_3 x \Rightarrow x=81$

답은 81

039

$A(1,\ 0),\ B(k,\ \log_3 k),\ C\left(k,\ \log_{\frac{1}{3}} k\right)$의

무게중심의 좌표가 $\left(\dfrac{19}{3},\ 0\right)$ 이다.

무게중심을 G라 했을 때, $\dfrac{A+B+C}{3}=G$ 이므로

무게중심의 x좌표를 구하면

$\dfrac{1+k+k}{3}=\dfrac{19}{3} \Rightarrow 1+2k=19 \Rightarrow k=9$

$\overline{BC}=\log_3 9-\log_{\frac{1}{3}} 9=4$

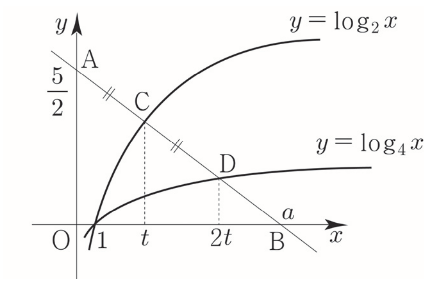
따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times(9-1)\times\overline{BC}=\dfrac{1}{2}\times 8\times 4=16$ 이다.

답은 16

040

좌표평면 위의 두 점 $A\left(0,\ \dfrac{5}{2}\right)$과 $B(a,\ 0)$ $(a>1$인 상수$)$
를 지나는 직선이 두 곡선 $y=\log_2 x,\ y=\log_4 x$와
만나는 점을 각각 C, D
$\overline{AC}=\overline{CD}$이므로 점 C의 x좌표를 t라 두면
점 D의 x좌표는 $2t$이다.



두 점 $A\left(0,\ \dfrac{5}{2}\right)$, $D(2t,\ \log_4 2t)$의 중점이 $C(t,\ \log_2 t)$

이므로 $\dfrac{\frac{5}{2}+\log_4 2t}{2}=\log_2 t \Rightarrow \dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{2}\log_2 2t=2\log_2 t$

$\Rightarrow 5+1+\log_2 t=4\log_2 t \Rightarrow 6=3\log_2 t \Rightarrow t=4$

$t=4$이므로 $C(4,\ 2)$ 이다.
직선 AC의 방정식을 구하면

기울기 $=\dfrac{2-\frac{5}{2}}{4-0}=\dfrac{4-5}{8}=-\dfrac{1}{8}$이고 y절편이 $\dfrac{5}{2}$이므로

$y=-\dfrac{1}{8}x+\dfrac{5}{2}$ 이다. $B(a,\ 0)$을 대입하면

$0=-\dfrac{1}{8}a+\dfrac{5}{2} \Rightarrow a=20$

답은 20

Tip 040번은 보통 학생들이 어려워하는 문제 중 하나이다.
쉬운 문제와 어려운 문제를 가르는 요소 중 하나가
바로 미지수 놓기인데 이 문제에서는 점 C, D의 x좌표를
모두 모르기 때문에 미지수 놓기를 주저할 수 있다.
$\overline{AC}=\overline{CD}$의 조건을 바탕으로 하나의 미지수로 통일하는
문제였다. 미지수를 놓는 것을 두려워하지 말자!

점 B의 y좌표는 $f(\log_2\sqrt{m})=2^{\log_2\sqrt{m}}$이다.

$-2^{\log_2\sqrt{m}}+m=2^{\log_2\sqrt{m}} \Rightarrow -\sqrt{m}+m=\sqrt{m}$

$\Rightarrow 2\sqrt{m}=m \Rightarrow 4m=m^2 \Rightarrow m=4 \ (m>2)$

답은 ②

055

$2^x=k \Rightarrow x=\log_2 k,\quad 2^{x-2}=k \Rightarrow x-2=\log_2 k$

$P_k(\log_2 k,\ k)$, $Q_k(\log_2 k+2,\ k)$이므로 $\overline{P_kQ_k}=2$ 이다.

($y=2^x$를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동시키면 $y=2^{x-2}$이므로 $\overline{P_kQ_k}=2$라고 판단해도 좋다.)

삼각형 OP_kQ_k의 넓이 A_k 는 $\frac{1}{2}\times\overline{P_kQ_k}\times k=k$이므로

따라서 $A_1+A_4+A_7+A_{10}=1+4+7+10=22$이다.

답은 22

056

$A(\log_8 a,\ a)$, $B(\log_8 b,\ b)$, $C(\log_4 a,\ a)$, $D(\log_4 b,\ b)$ 이므로

삼각형 AEB의 넓이는

$\frac{1}{2}(a-b)(\log_8 a-\log_8 b)=20$이므로

$\frac{1}{2}(a-b)\frac{1}{3}\left(\log_2\frac{a}{b}\right)=20 \Rightarrow \frac{1}{2}(a-b)\left(\log_2\frac{a}{b}\right)=60$ 이다.

따라서 삼각형 CDF의 넓이는

$\frac{1}{2}(a-b)(\log_4 a-\log_4 b)=\frac{1}{2}(a-b)\frac{1}{2}\left(\log_2\frac{a}{b}\right)=30$이다.

답은 ③

057

1보다 큰 양수 a에 대하여 두 곡선 $y=a^{-x-2}$과 $y=\log_a(x-2)$가 직선 $y=1$과 만나는 두 점을 각각 A, B

$a^{-x-2}=1 \Rightarrow x=-2 \ (a>1)$ 이므로

점 $A(-2,\ 1)$이다.

$\log_a(x-2)=1 \Rightarrow x=2+a$이므로

점 $B(2+a,\ 1)$이다.

따라서 $\overline{AB}=2+a-(-2)=4+a=8 \Rightarrow a=4$이다.

답은 ②

Tip 선분 AB의 길이를 구할 때 그저 y값을 빼는 게 아니라 절댓값을 취해줘야 하지만 $a+2>0$이라 그냥 빼서 구해도 된다.

058

$A(1,\ 0)$, $B(3,\ 0)$, $R(k,\ 0)$

$Q(k,\ \log_2(k-2))$, $P(k,\ \log_2 k)$

점 Q가 선분 PR의 중점이므로

$\log_2 k=2\log_2(k-2) \Rightarrow k=(k-2)^2 \Rightarrow k^2-5k+4=0$

$\Rightarrow (k-4)(k-1)=0 \Rightarrow k=4 \ (k>3)$

사각형 ABQP의 넓이는

삼각형 ARP의 넓이 − 삼각형 BRQ의 넓이 이므로

사각형 ABQP의 넓이

$=\frac{1}{2}\times(4-1)\times2-\frac{1}{2}\times(4-3)\times1=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$이다.

답은 ③

059

$y=2^x-1$와 $y=\log_2(x+1)$은 $y=x$에 대하여 대칭되어 있고 직선 AB의 기울기가 -1이므로

$A(2,\ 3) \Rightarrow B(3,\ 2)$이다.

따라서 사각형 ACDB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times(2+3)\times1=\frac{5}{2}$이다.

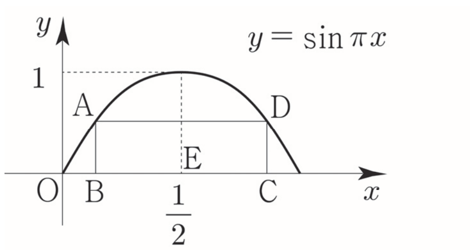
답은 ①

Tip 그 당시 시험장에서 이 문제를 처음 보았을 때, $y=2^x-1$ 과 $y=\log_2(x+1)$를 보고 혹시 서로 역함수 관계($y=x$ 대칭)가 아닐까 생각하며 풀었던 기억이 아직까지 생생하다.

이 문제와는 별개로 2020학년도 고3 9월 평가원 가형 15번 문제에서 정답률 50% 지수로그 문제가 출제되었는데 출제의 핵심 point가 역함수의 관계를 이용하는 것이었다. 만약 미적분까지 다 배운 가형 응시 학생이라면 찾아서 풀어보길 권한다.

010

$E\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$라 하면



대칭성에 의해서 $\overline{AD} = 2\overline{BE} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} = \overline{BE}$ 이므로

$B\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3},\ 0\right) = B\left(\frac{1}{6},\ 0\right)$ 이다.

$\overline{AB} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

따라서 직사각형 ABCD의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ 이다.

답은 $\frac{1}{3}$

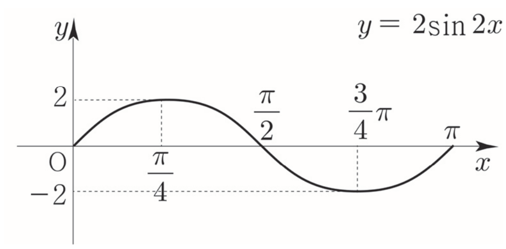
011

$y = a\sin(bx - c)$

최댓값이 2이고 최솟값이 -2이므로 $a = 2$

주기가 $\frac{5}{6}\pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \pi$ 이므로 $\frac{2\pi}{b} = \pi \Rightarrow b = 2$

$y = 2\sin(2x - c)$는 $y = 2\sin 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 평행이동하여 구할 수 있다.



$y = 2\sin 2x$ 의 그래프 위의 점 $(0,\ 0)$를 기준으로 $y = 2\sin(2x - c)$ 위의 점 $\left(\frac{\pi}{3},\ 0\right)$을 살펴보면

$(0,\ 0) \rightarrow \left(\frac{\pi}{3},\ 0\right)$이므로 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{3}$만큼 평행이동했다고 볼 수 있다.

(여기서 주의해야할 점은 $y = 2\sin 2x$ 를 평행이동시키는 것이지 $y = \sin x$를 평행이동시키는 것이 아니라는 점이다.)

하지만 $y = 2\sin 2x$ 는 주기가 π인 주기함수이므로 x축의 방향으로 $n\pi$(n은 정수)만큼 더 평행이동 하여도 조건을 만족시킨다.
즉, $y = 2\sin(2x - c)$는 $y = 2\sin 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $n\pi + \frac{\pi}{3}$(n은 정수)만큼 평행이동하여 구할 수 있다.

$x \rightarrow x - \left(n\pi + \frac{\pi}{3}\right)$

$y = 2\sin 2\left(x - n\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(2x - 2n\pi - \frac{2}{3}\pi\right)$

이므로 $c = 2n\pi + \frac{2}{3}\pi$ (n은 정수) 이다.

$2\pi < c < 3\pi$ 이므로 $c = 2\pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{8}{3}\pi$이다.

따라서 $\frac{3abc}{\pi} = \frac{3}{\pi} \times 2 \times 2 \times \frac{8}{3}\pi = 32$이다.

답은 32

Tip 위의 풀이를 완벽히 이해했다면 어떠한 미정계수 문제가 나와도 다 풀 수 있다. 누구에게 설명할 수 있을 때까지 체화해보자!

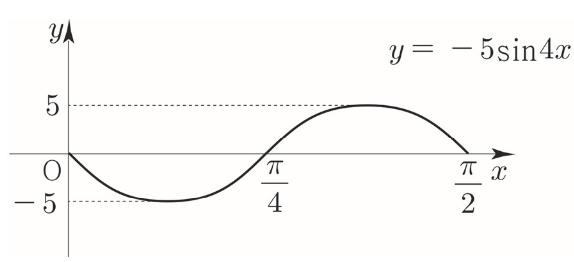
012

이 문제는 $a < 0$라는 것에 조심해야한다.

최댓값이 5이고 최솟값이 -5이므로 $a = -5$이다.

주기가 $\frac{3}{8}\pi - \left(-\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{2}$이므로 $\frac{2\pi}{b} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow b = 4$

$y = -5\sin(4x - c)$는 $y = -5\sin 4x$의 그래프를 x축의 방향으로 평행이동하여 구할 수 있다.



$y = -5\sin 4x$ 의 그래프 위의 점 $(0,\ 0)$를 기준으로 $y = -5\sin(4x - c)$ 위의 점 $\left(-\frac{\pi}{8},\ 0\right)$을 살펴보면

$a < -1$을 만족하지 않으므로 모순이다.

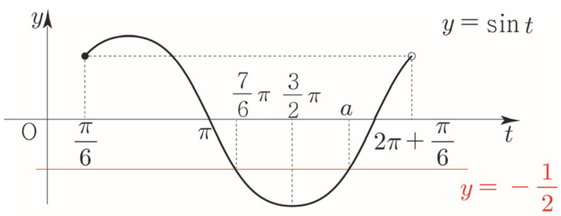
따라서 모든 실수 a의 값의 곱은 $-\frac{1}{2}$이다.

답은 $-\frac{1}{2}$

029

$2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) = -1 \quad (0 \le x < \pi)$

$2x+\frac{\pi}{6} = t$라 치환하면 $\sin t = -\frac{1}{2} \quad \left(\frac{\pi}{6} \le t < 2\pi+\frac{\pi}{6}\right)$



$\pi < t < \frac{3}{2}\pi$에서 $\sin t = -\frac{1}{2}$ 을 만족하는 $t = \frac{7}{6}\pi$

대칭성을 이용하여 a를 구하면

$\frac{7}{6}\pi + a = 3\pi \Rightarrow a = \frac{11}{6}\pi$

$t = \frac{7}{6}\pi$ or $t = \frac{11}{6}\pi$

$2x+\frac{\pi}{6} = t$이므로 $x = \frac{\pi}{2}$ or $x = \frac{5}{6}\pi$ 이다.

따라서 모든 근의 합은 $\frac{4}{3}\pi$이다.

답은 $\frac{4}{3}\pi$

030

$\cos^2 x - \frac{\sin x}{2} = \frac{1}{2} \quad (0 \le x \le 2\pi)$

$-\sin^2 x - \frac{\sin x}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

$\Rightarrow (2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$

① $\sin x = -1 \Rightarrow x = \frac{3}{2}\pi$

② $\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ or $x = \frac{5}{6}\pi$

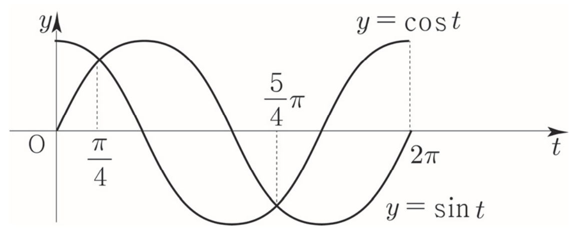
따라서 모든 근의 합은 $\frac{5}{2}\pi$이다.

답은 $\frac{5}{2}\pi$

031

$\sin 2x - \cos 2x > 0 \quad (0 \le x \le \pi)$

$2x = t$라 치환하면 $\sin t > \cos t \quad (0 \le t \le 2\pi)$



$\sin t > \cos t \quad (0 \le t \le 2\pi) \Rightarrow \frac{\pi}{4} < t < \frac{5}{4}\pi$

$2x = t$이므로 $\frac{\pi}{8} < x < \frac{5}{8}\pi$이다.

답은 $\frac{\pi}{8} < x < \frac{5}{8}\pi$

032

$2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \ge 1+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \quad (0 \le x < 2\pi)$

$x+\frac{\pi}{6} = t$라 치환하면

$x-\frac{\pi}{3} = x+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2} = t-\frac{\pi}{2}$

$2\cos^2\left(t-\frac{\pi}{2}\right) \ge 1+\cos t \quad \left(\frac{\pi}{6} \le t < 2\pi+\frac{\pi}{6}\right)$

$\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = \sin t$ 이므로

$2-2\cos^2 t \ge 1+\cos t \Rightarrow 2\cos^2 t + \cos t - 1 \le 0$

$\Rightarrow (2\cos t - 1)(\cos t + 1) \le 0 \Rightarrow -1 \le \cos t \le \frac{1}{2}$

$0<x<\pi$에서 $\cos x=-\frac{1}{2}$를 만족시키는 $x=\frac{2}{3}\pi$
이를 바탕으로 점 C의 x좌표를 구하면
$bx=\frac{2}{3}\pi \Rightarrow x=\frac{2}{3b}\pi$

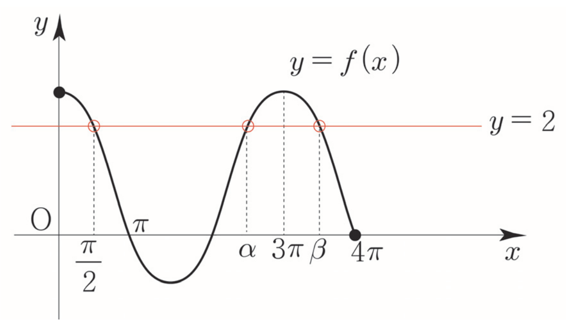
대칭성을 이용하면 ($x=\frac{\pi}{b}$에 대하여 대칭)
$\overline{\mathrm{CD}}=2\left(\frac{\pi}{b}-\frac{2}{3b}\pi\right)=\frac{2\pi}{3b}$

주기를 이용하면 $\overline{\mathrm{AB}}=\frac{2\pi}{b}$이다.

사각형 ABCD의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\left(\frac{2\pi}{b}+\frac{2\pi}{3b}\right)\times 3=6\pi \Rightarrow b=\frac{2}{3}$

$0\le x\le 4\pi$에서 방정식 $f(x)=2$
$2\cos\frac{2}{3}x+1=2 \Rightarrow \cos\frac{2}{3}x=\frac{1}{2}$

$0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos x=\frac{1}{2}$를 만족시키는 $x=\frac{\pi}{3}$
이를 바탕으로 $f(x)=2$ $(0<x<\pi)$를 만족시키는
x를 구하면 $\frac{2}{3}x=\frac{\pi}{3} \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$



대칭성에 의해서 ($x=3\pi$에 대하여 대칭)
$\alpha+\beta=6\pi$
따라서 $0\le x\le 4\pi$에서 방정식 $f(x)=2$의
모든 해의 합은 $\frac{\pi}{2}+6\pi=\frac{13}{2}\pi$이다.

답은 ②

삼각함수의 그래프 Master step

[빠른 정답]

64	①	71	②
65	⑤	72	$S=\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$
66	256	73	②
67	5	74	3
68	13	75	③
69	24	76	37
70	②		

[해설]

064

$y=a\cos^2x+a\sin x+b$ 의 최댓값이 10, 최솟값이 1

$y=a(1-\sin^2x)+a\sin x+b=-a\sin^2x+a\sin x+a+b$

$\sin x=t$라 치환하면
$y=-at^2+at+a+b$ $(-1\le t\le 1)$

$y=-at^2+at+a+b=-a\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}a+b$

a의 부호에 따라 최솟값과 최솟값이 달라지므로
case분류하면 다음과 같다.

① $a>0$
$t=\frac{1}{2}$일 때, 최댓값 $\frac{5}{4}a+b=10$
$t=-1$일 때, 최솟값 $-a+b=1$

연립하면 $a=4,\ b=5$이다.
($a>0$이므로 조건을 만족한다.)

② $a=0$
$y=b$이므로 최댓값이 10이면서 최솟값이 1일 수 없으므로
모순이다.

③ $a<0$
$t=-1$일 때, 최댓값 $-a+b=10$

$t=\frac{1}{2}$일 때, 최솟값 $\frac{5}{4}a+b=1$

연립하면 $a=-4,\ b=6$이다.

($a<0$이므로 조건을 만족한다.)

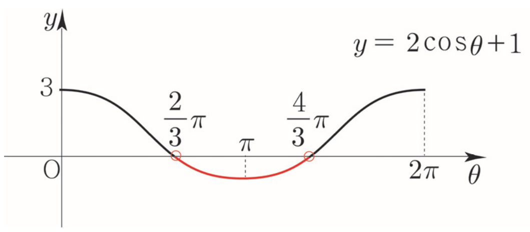
따라서 $ab=20$ or $ab=-24$이므로 $p+q=-4$이다.

답은 ①

065

x에 대한 방정식 $x^n=2\cos\theta+1$ (n은 자연수)
의 실근의 개수

(가) n이 짝수이고 $\frac{2}{3}\pi<\theta<\frac{4}{3}\pi$이면 a개

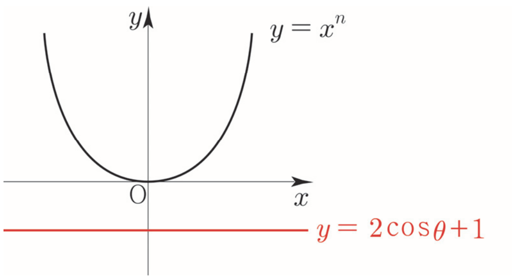


$\frac{2}{3}\pi<\theta<\frac{4}{3}\pi \Rightarrow 2\cos\theta+1<0$

$x^n=2\cos\theta+1$의 실근의 개수는

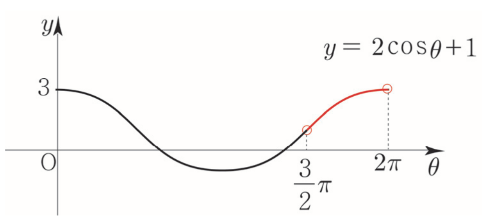
$y=x^n$ 와 $y=2\cos\theta+1$의 교점의 개수와 같다.

n이 짝수이므로 그림을 그리면 아래와 같다.



Tip 여기서 조심해야할 점은 x에 대한 방정식이라는 것이다. θ는 상수로 취급해야한다.
따라서 $a=0$이다.

(나) n이 짝수이고 $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$이면 b개

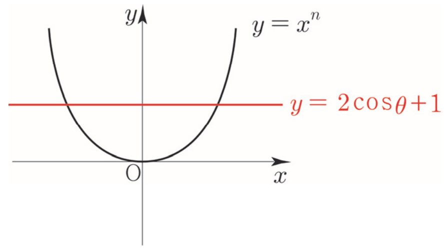


$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi \Rightarrow 2\cos\theta+1>1$

$x^n=2\cos\theta+1$의 실근의 개수는

$y=x^n$ 와 $y=2\cos\theta+1$의 교점의 개수와 같다.

n이 짝수이므로 그림을 그리면 아래와 같다.

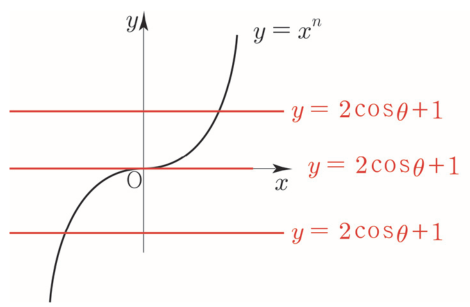


따라서 $b=2$이다.

(다) n이 홀수이고 $\frac{1}{3}\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이면 c개

n이 홀수이면 $2\cos\theta+1$의 부호와 상관없이

$y=x^n$ 와 $y=2\cos\theta+1$의 교점이 1개 이므로 $c=1$이다.



따라서 $a+2b+3c=0+4+3=7$이다.

답은 ⑤

066

$a_n=\sin\frac{n\pi}{4}$

n에 숫자를 대입해보면서 규칙을 파악해보자.

$a_1=\sin\frac{1}{4}\pi=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$a_2=\sin\frac{1}{2}\pi=1$

$a_3=\sin\frac{3}{4}\pi=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$a_4=\sin\pi=0$

$a_5=\sin\frac{5}{4}\pi=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$a_6=\sin\frac{3}{2}\pi=-1$

$a_7 = \sin\frac{7}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$a_8 = \sin 2\pi = 0$

a_9부터는 sin이 주기함수이므로 $a_1,\ \cdots\ a_8$의 값이 반복된다.

이를 바탕으로 $\sum_{n=1}^{32} n(a_n)^2$를 구해보자,

마찬가지로 n에 숫자를 대입해보면서 규칙을 찾아보자.

$n=1 \Rightarrow 1\times\frac{1}{2}$

$n=2 \Rightarrow 2\times 1$

$n=3 \Rightarrow 3\times\frac{1}{2}$

$n=4 \Rightarrow 4\times 0$

$n=5 \Rightarrow 5\times\frac{1}{2}$

$n=6 \Rightarrow 6\times 1$

$n=7 \Rightarrow 7\times\frac{1}{2}$

$n=8 \Rightarrow 8\times 0$

$n=9 \Rightarrow 9\times\frac{1}{2}$

$\vdots$

n이 홀수일 때를 묶어서 계산해보자.

$\frac{1}{2}(1+3+5+\ \cdots\ +31) = \frac{1}{2}\times\frac{16(1+31)}{2} = 128$

n이 짝수일 때를 묶어서 계산해보자.

$2+6+10+\ \cdots\ +30 = \frac{8(2+30)}{2} = 128$

따라서 $\sum_{n=1}^{32} n(a_n)^2 = 256$이다.

답은 256

067

함수 $y = k\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+k^2-6$의 그래프가 제 1사분면을 지나지 않도록 하는 모든 정수 k의 개수

k의 범위에 따라 case분류하면 다음과 같다.

① $k>0$

$y = k\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+k^2-6$의 최댓값은 $k+k^2-6$이므로

이 그래프가 제 1사분면을 지나지 않도록 하려면

최댓값 $k+k^2-6 \le 0$이어야 한다.

$(k-2)(k+3) \le 0 \Rightarrow -3 \le k \le 2$

전제조건 $k>0$까지 고려하면 $0<k\le 2$이다.

② $k=0$

$y=-6$이므로 제 1사분면을 지나지 않으므로

조건을 만족시킨다.

Tip 빼먹기 쉬운 case이므로 각별히 유의해야한다.

$y=ax^2+x+2$는 2차함수인가? 답은 “모른다”이다.

$a\ne 0$이어야 2차함수이지 $a=0$이면 1차함수가 되기 때문이다. 만약 방정식 $ax^2+x+2=0$의 서로 다른 실근의 개수를 조사하기 위해 판별식을 쓸 때에도 $a\ne 0$라는 전제조건을 붙인 후 써야한다.

이는 2010학년도 수능 가형 8번 문제에서 확인할 수 있으니 찾아서 풀어보길 추천한다. 썰을 풀자면 재수생시절 2010학년도 수능 가형을 현장에서 풀 당시 a가 0인지 0이 아닌지 고려했던 기억이 아직까지 생생하다.

③ $k<0$

$y = k\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+k^2-6$의

최댓값은 $-k+k^2-6$이므로

이 그래프가 제 1사분면을 지나지 않도록 하려면

최댓값 $-k+k^2-6 \le 0$이어야 한다.

$(k+2)(k-3) \le 0 \Rightarrow -2 \le k \le 3$

전제조건 $k<0$까지 고려하면 $-2 \le k < 0$이다.

따라서 조건을 만족시키는 정수 k는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$이므로 모든 정수 k의 개수는 5이다.

답은 5

068

$y = \frac{|\tan x|}{\tan x+2}\ \left(\frac{3}{4}\pi \le x < \frac{3}{2}\pi\right)$

$\tan x = t$라 치환하자.

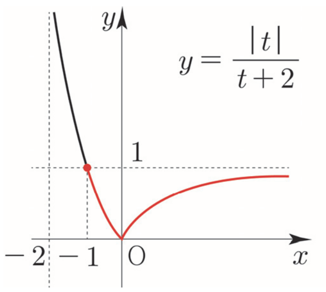
$\frac{3}{4}\pi \le x < \frac{3}{2}\pi$에서 t의 범위를 구하면 $-1 \le t$

$y = \frac{|t|}{t+2}\ (-1 \le t)$

t의 범위에 따라 case분류 하면

$t>0 \Rightarrow y=\dfrac{t}{t+2}=1+\dfrac{-2}{t+2}$

$t<0 \Rightarrow y=\dfrac{-t}{t+2}=-1+\dfrac{2}{t+2}$



$t=-1 \Rightarrow x=\dfrac{3}{4}\pi=a$ 일 때, 최댓값 $1=M$

$t=0 \Rightarrow x=\pi=b$ 일 때, 최솟값 $0=m$

따라서 $\dfrac{16a}{b}+M+m=13$ 이다.

답은 13

069

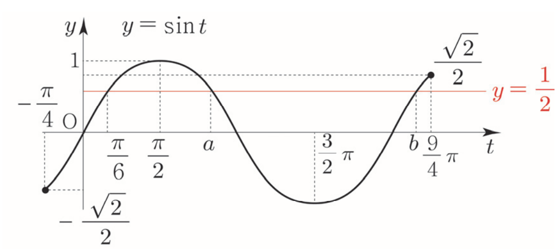
$y=4\sin\dfrac{1}{4}(x-\pi)$ $(0 \le x \le 10\pi)$와 직선 $y=2$가 만나는 점의 x좌표를 찾아보자.

$4\sin\dfrac{1}{4}(x-\pi)=2 \Rightarrow \sin\dfrac{1}{4}(x-\pi)=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{1}{4}(x-\pi)=t$로 치환하자.

$0 \le x \le 10\pi$에서 t의 범위를 구하면 $-\dfrac{\pi}{4} \le t \le \dfrac{9}{4}\pi$

$\sin t=\dfrac{1}{2}\ \left(-\dfrac{\pi}{4} \le t \le \dfrac{9}{4}\pi\right)$



대칭성을 이용하면 ($x=\dfrac{\pi}{2}$에 대하여 대칭)

$\dfrac{\pi}{6}+a=\pi \Rightarrow a=\dfrac{5}{6}\pi$

주기성을 이용하면 (주기 2π)

$\dfrac{\pi}{6}+2\pi=b \Rightarrow b=\dfrac{13}{6}\pi$

다시 x의 값으로 변화해주면

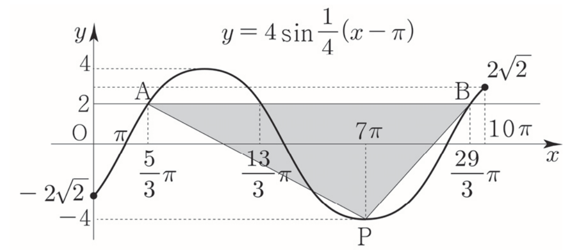
$y=4\sin\dfrac{1}{4}(x-\pi)$ $(0 \le x \le 10\pi)$

와 직선 $y=2$가 만나는 점의 x좌표는 다음과 같다.

$\dfrac{1}{4}(x-\pi)=t \Rightarrow x=4t+\pi$

$\Rightarrow x=\dfrac{5}{3}\pi$ or $x=\dfrac{13}{3}\pi$ or $x=\dfrac{29}{3}\pi$

이를 바탕으로 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값을 구해보자.



점 P와 직선 $y=2$ 사이의 거리를 $h(0<h \le 6)$라 하자.

삼각형 PAB의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times h$

넓이의 최댓값은 $\overline{AB}=8\pi$, $h=6$일 때이다.

따라서 최댓값은 $\dfrac{1}{2}\times 8\pi\times 6=24\pi \Rightarrow k=24$이다.

답은 24

Tip 사실 이 문제에서는 A, B의 좌표를 구하지 않아도 답을 구할 수 있다. 점의 좌표가 중요한 것이 아니라 $\overline{AB}$의 길이가 중요하기 때문이다. 주어진 구간에서 $\overline{AB}$의 최댓값은 $y=4\sin\dfrac{1}{4}(x-\pi)$의 주기 8π와 같으므로 넓이의 최댓값을 보다 빠르게 구할 수 있다.
혹시나 점 A, B좌표를 구하는데 조금이라도 시간이 걸렸거나 어려웠다면 익숙해지도록 반드시 체화시키자.

070

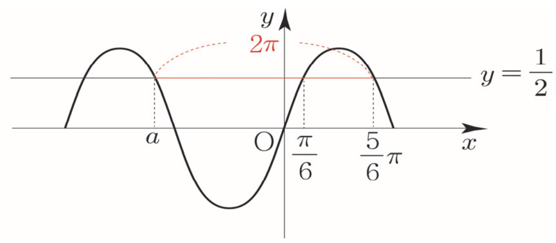
$f(\cos x)=\sin 6x$

x에 $\dfrac{\pi}{2}-x$를 대입하면

$f(\sin x)=\sin 6\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sin(3\pi-6x)=\sin 6x$이므로

$f(\sin t)+f(\cos t)=1 \Rightarrow 2\sin 6t=1 \Rightarrow \sin 6t=\dfrac{1}{2}$

$\sin x=\dfrac{1}{2}$를 만족시키는 음수 x의 최댓값을 a라 하면



$\frac{5\pi}{6}-2\pi=-\frac{7}{6}\pi=a$ 이므로

$f(\sin t)+f(\cos t)=1$을 만족시키는 음수 t의 최댓값은

$6t=a \Rightarrow t=-\frac{7}{36}\pi$이다.

답은 ②

071

$|\cos x|=\frac{3}{4}+2\cos x$

① $\cos x \geq 0$

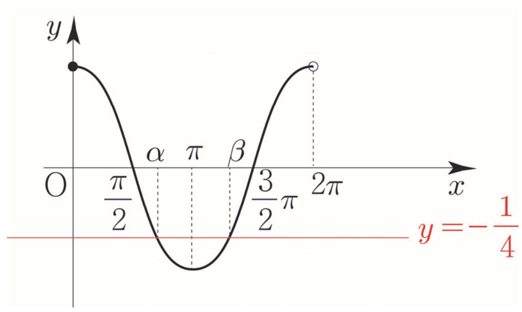
$\cos x=\frac{3}{4}+2\cos x \Rightarrow \cos x=-\frac{3}{4}$이므로

전제 조건 $\cos x \geq 0$에 모순이다.

② $\cos x<0$

$-\cos x=\frac{3}{4}+2\cos x \Rightarrow \cos x=-\frac{1}{4}$

$\cos x=-\frac{1}{4} \quad (0 \leq x<2\pi)$



$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi,\ \pi<\beta<\frac{3}{2}\pi$이고 $\cos\alpha=\cos\beta=-\frac{1}{4}$

$\sin\alpha=\frac{\sqrt{15}}{4},\ \sin\beta=-\frac{\sqrt{15}}{4}$ 이므로

$\tan\alpha=-\sqrt{15},\ \tan\beta=\sqrt{15}$

$8\sin\alpha+\tan\alpha+16\sin\beta+5\tan\beta$

$=2\sqrt{15}-\sqrt{15}-4\sqrt{15}+5\sqrt{15}=2\sqrt{15}$

답은 ②

072

$f(x)=\cos x \quad (0 \leq x \leq \pi),\ g(x)=\sin x$

$S=\left\{x \mid g\left(f^{-1}(x)\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

$f^{-1}(x)$의 치역은 $f(x)$의 정의역과 같으므로

$f^{-1}(x)=t$라 치환하면 $0 \leq t \leq \pi$이다.

$g(t)=\sin t=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (0 \leq t \leq \pi)$를 만족시키는

$t=\frac{\pi}{3}$ or $t=\frac{2}{3}\pi$이다.

$f^{-1}(x)=\frac{\pi}{3} \Rightarrow x=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

$f^{-1}(x)=\frac{2}{3}\pi \Rightarrow x=f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=-\frac{1}{2}$

따라서 집합 S를 원소나열법으로 나타내면

$S=\left\{-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right\}$이다.

답은 $S=\left\{-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right\}$

Tip $f(x)$의 정의역은 $f^{-1}(x)$의 치역과 같고
$f(x)$의 치역은 $f^{-1}(x)$의 정의역과 같다. 이러한 관계를
2020 규토 모의고사 나형 14번에 출제하였는데
2020학년도 수능 나형 10번에서 출제되었다는.
쏘리 질러~~

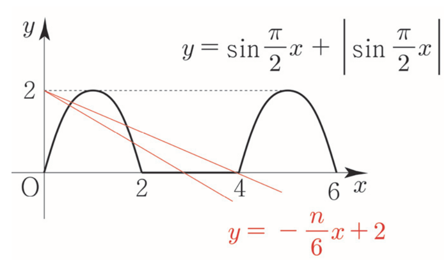
073

$y=\sin\frac{\pi}{2}x+\left|\sin\frac{\pi}{2}x\right|$

$\sin\frac{\pi}{2}x \geq 0 \Rightarrow y=2\sin\frac{\pi}{2}x$

$\sin\frac{\pi}{2}x<0 \Rightarrow y=0$

$y=-\frac{n}{6}x+2$ 의 x절편은 $\frac{12}{n}$



$y=\sin\frac{\pi}{2}x+\left|\sin\frac{\pi}{2}x\right|$ 와 $y=-\frac{n}{6}x+2$ 가

서로 다른 세 점에서 만나려면 $2<\frac{12}{n}<6$이어야한다.

따라서 자연수 $n=3,\ 4,\ 5$ 이므로 자연수 n의 개수는 3이다.

답은 ②

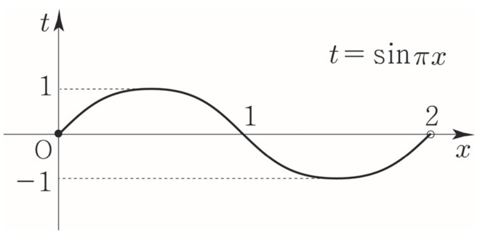
074

방정식 $2\cos^2\pi x-2\sin\pi x+2a-3=0\ (0\le x<2)$의 서로 다른 실근의 개수가 3

$$2(1-\sin^2\pi x)-2\sin\pi x+2a-3$$
$$=-2\sin^2\pi x-2\sin\pi x+2a-1=0$$

$\sin\pi x=t$라 치환하면 $2t^2+2t-2a+1=0$
이는 t에 대한 이차방정식이므로 아래와 같은 3가지 case가 가능하다.

① 해가 없다. ② 중근 t ③ 서로 다른 두 실근 $t_1,\ t_2$



범위가 $0\le x<2$이므로 $\sin\pi x=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
즉, 예를 들어 방정식 $2t^2+2t-2a+1=0$의 두 근이 $t=0,\ t=3$일 때, $\sin\pi x=0,\ \sin\pi x=3$이므로 x에 대한 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 2이다.

결국 x에 대한 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 3이려면 $t=1$또는 $t=-1$이어야 한다.

(i) $t=1$

$2t^2+2t-2a+1=0\Rightarrow 5-2a=0\Rightarrow 2a=5$
$2t^2+2t-4=0$

$\Rightarrow t^2+t-2=0$

$\Rightarrow (t+2)(t-1)=0$

$\Rightarrow t=-2$ or $t=1$

$t=-2$일 때, $\sin\pi x=t$는 실근이 존재하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $t=-1$

$2t^2+2t-2a+1=0\Rightarrow 2a=1\Rightarrow a=\frac{1}{2}$

$2t^2+2t=0\Rightarrow 2t(t+1)=0\Rightarrow t=0$ or $t=-1$
$t=0\Rightarrow\sin\pi x=0\Rightarrow x=0$ or $x=1$

$t=-1\Rightarrow\sin\pi x=-1\Rightarrow x=\frac{3}{2}$

서로 다른 세 실근의 합은 $0+1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$이므로

따라서 $a+b=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=3$이다.

답은 3

075

$0\le t\le 3$인 실수 t와 상수 k에 대하여 $t\le x\le t+1$에서 방정식 $\sin\frac{\pi}{2}x=k$의 모든 해의 개수를 $f(t)$

$y=\sin\frac{\pi}{2}x$는 치역이 $\{y\mid -1\le y\le 1\}$이고 주기가 4

이므로 $0\le x\le 4$에서 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$와 $y=k$와 두 점에서

만나려면 $-1<k<1$이어야 한다.

만약 $k<0$일 경우 $f(0)=0$이므로 모순이고

$k=0$이면 $\sin\frac{\pi}{2}x=0$을 만족시키는 x는 $0,\ 2,\ 4$이므로

$t\le x\le t+1$안에 $\sin\frac{\pi}{2}x=0$을 만족시키는 x값이

두 개일 수 없다, 따라서 $f(t)=2$가 나올 수 없으므로
모순이다. 즉, $k>0$이다.

$0\le x\le 4$에서 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$와 직선 $y=k$와 만나는

두 점의 x좌표를 각각 $x_1,\ x_2\ (x_1<x_2)$라 하면
다음과 같이 case분류할 수 있다.

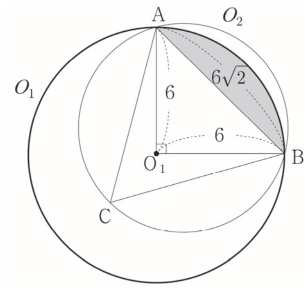
① $x_2-x_1>1$
$f(t)=2$를 만족시키는 t의 값이 존재하지 않으니 모순이다.

② $x_2-x_1<1$
$f(t)=2$를 만족시키는 t의 값이 여러개 존재하니 모순이다.

③ $x_2-x_1=1$

$f(0)=1$이므로 $x_1=\frac{1}{2},\ x_2=\frac{3}{2}$

$0\le t<\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}<t\le\frac{3}{2}$일 때, $f(t)=1$

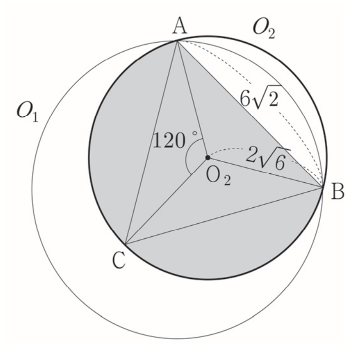


원 O_1의 중심을 O_1라 하면 삼각형 ABO_1은
직각이등변삼각형이므로 위의 그림에서 색칠한 영역의 넓이는
$\frac{1}{2}\times 6^2\times\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\times 6^2=9\pi-18$이다.

선분 AB와 원 O_2로 둘러싸인 부분의 넓이를 구해보자.
우선 원 O_2의 반지름을 R이라 하면
정삼각형 ABC 의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times(6\sqrt{2})^2$ 이므로
외접원 넓이 공식에 의해서

$$\frac{(6\sqrt{2})^3}{4R}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(6\sqrt{2})^2$$

$$\Rightarrow \frac{6\sqrt{2}}{R}=\sqrt{3} \Rightarrow R=2\sqrt{6}$$



원 O_2의 중심을 O_2라 하면
위의 그림에서 색칠한 영역의 넓이는
부채꼴 ABO_2의 넓이+삼각형 ABO_2의 넓이이므로
(단, 호 AB가 C를 포함한다.)
$\frac{1}{2}\times(2\sqrt{6})^2\times\frac{4}{3}\pi+\frac{1}{2}\times(2\sqrt{6})^2\times\sin 120^\circ$

$=16\pi+6\sqrt{3}$
따라서 원 O_1과 원 O_2의 공통부분의 넓이는
$9\pi-18+16\pi+6\sqrt{3}=-18+6\sqrt{3}+25\pi$이므로
$p+q+r=13$이다.

답은 13

사인법칙과 코사인법칙 Master step

[빠른 정답]

44	12	48	③
45	④	49	13
46	①	50	⑤
47	⑤	51	150

[해설]

044

$\angle B=90^\circ$ 이므로 선분 AC는 원의 지름이 되고
원의 넓이가 25π 이므로 $\overline{\mathrm{AC}}=10$이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=6$, $\overline{\mathrm{AC}}=10$이므로
$(\overline{\mathrm{AC}})^2=(\overline{\mathrm{AB}})^2+(\overline{\mathrm{BC}})^2 \Rightarrow \overline{\mathrm{BC}}=8$

$\angle\mathrm{ACB}=\theta$라 하자.
삼각함수 같다 technic을 사용하면
$\overline{\mathrm{EC}}=4$이므로
$\tan\theta=\frac{6}{8}=\frac{\overline{\mathrm{DE}}}{\overline{\mathrm{EC}}}=\frac{\overline{\mathrm{DE}}}{4} \Rightarrow \overline{\mathrm{DE}}=3$

$\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{AC}}-\overline{\mathrm{EC}}=10-4=6$이므로
$(\overline{\mathrm{AD}})^2=(\overline{\mathrm{AE}})^2+(\overline{\mathrm{DE}})^2=36+9=45 \Rightarrow \overline{\mathrm{AD}}=3\sqrt{5}$

내접원의 반지름을 r이라 하자.
내접원의 공식사용하면
삼각형 ADE 의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 6\times 3=9$이므로
$\frac{6+3+3\sqrt{5}}{2}\times r=9 \Rightarrow r=\frac{6}{3+\sqrt{5}}=\frac{9-3\sqrt{5}}{2}$
따라서 $a+b=12$이다.

답은 12

045

$\overline{\mathrm{BC}}=a$, $\overline{\mathrm{AC}}=b$, $\overline{\mathrm{AB}}=c$라 하자.

$\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{BE}}:\overline{\mathrm{CF}}=2:3:4 \Rightarrow \overline{\mathrm{AD}}=2k$, $\overline{\mathrm{BE}}=3k$, $\overline{\mathrm{CF}}=4k$

$$\frac{10+8+6}{2}\times r=\frac{1}{2}\times 8\times 6 \Rightarrow 24r=48 \Rightarrow r=2$$

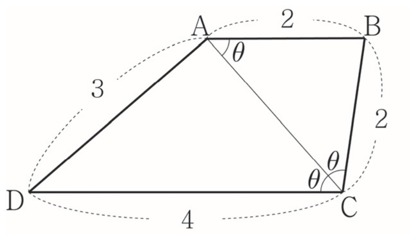
답은 ③

049

$\angle BAC=\theta$라 하자.

$\overline{AB}=\overline{BC}=2$ 이므로 $\angle BCA=\angle BAC=\theta$이다.

$\overline{AB} /\!/ \overline{CD}$ 이므로 $\angle BAC$와 $\angle ACD$는 서로 엇각이다.
즉, $\angle ACD=\angle BAC=\theta$이다.



$\overline{AC}=x$ 라 하자.
삼각형 ABC에서 코사인법칙을 사용하면

$$\cos\theta=\frac{4+x^2-4}{2\times 2\times x}=\frac{x^2}{4x}=\frac{x}{4}$$

삼각형 ACD에서 코사인법칙을 사용하면

$$\cos\theta=\frac{16+x^2-9}{2\times 4\times x}=\frac{7+x^2}{8x}$$

$$\frac{x}{4}=\frac{7+x^2}{8x} \Rightarrow 2x^2=7+x^2 \Rightarrow x^2=7 \Rightarrow x=\sqrt{7}$$

$$\Rightarrow \cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{4} \Rightarrow \sin\theta=\frac{3}{4}$$

사각형 ABCD의 넓이는 삼각형 ACD 의 넓이와
삼각형 ABC의 넓이의 합이므로

$$\frac{1}{2}\times 4\times \sqrt{7}\times \sin\theta+\frac{1}{2}\times 2\times \sqrt{7}\times \sin\theta$$

$$=3\sqrt{7}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{4}\sqrt{7}$$

따라서 $p+q=13$이다.

답은 13

다르게 풀어보자!
$\overline{DA}$와 $\overline{CB}$에 연장선을 그어 만나는 점을 E라고 하면
삼각형 EAB와 삼각형 EDC는 $1:2$닮음이므로
$\overline{EA}=3$, $\overline{EB}=2$이다.
코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle DCE)=\frac{6^2+4^2-4^2}{2\times 6\times 4}=\frac{3}{4}$$

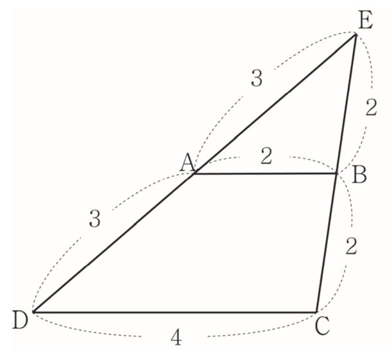
$$\Rightarrow \sin(\angle DCE)=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

따라서 삼각형 EDC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 6\times 4\times\frac{\sqrt{7}}{4}=3\sqrt{7}$

이때, 삼각형 EAB와 삼각형 EDC의 넓이비는 $1:4$이므로

사각형 ABCD의 넓이는 $\frac{3}{4}\times 3\sqrt{7}=\frac{9}{4}\sqrt{7}$이다.

$\therefore 13$



050

ㄱ. $\angle BFE=90^\circ-\theta$

$\angle BFG=60^\circ-\theta$ 이므로
$\angle BFE=30^\circ+60^\circ-\theta=90^\circ-\theta$이다.
따라서 ㄱ은 참이다.

ㄴ. $\overline{BF}=4\sin\theta$
$\overline{EF}=\overline{EG}=2$이므로
삼각형 EFG 에서 코사인법칙을 사용하면

$$\cos 120^\circ=\frac{4+4-\left(\overline{FG}\right)^2}{2\times 2\times 2}=-\frac{1}{2} \Rightarrow \overline{FG}=2\sqrt{3}$$

Tip 한 내각의 크기가 120° 인 이등변삼각형의
세 변의 길이비는 $1:1:\sqrt{3}$이다.
이 성질을 활용하면 좀 더 빠르게 길이를 구할 수 있다.

삼각형 BFG에서 사인법칙을 사용하면

$$\frac{\overline{BF}}{\sin\theta}=\frac{2\sqrt{3}}{\sin 120^\circ}=4 \Rightarrow \overline{BF}=4\sin\theta$$

따라서 ㄴ은 참이다.

ㄷ. 선분 BE의 길이는 항상 일정하다.

삼각형 BFE 에서 코사인법칙을 사용하면

$$\cos(90^\circ-\theta)=\frac{(\overline{BF})^2+(\overline{FE})^2-(\overline{BE})^2}{2\times\overline{BF}\times\overline{FE}}$$

$$\Rightarrow\ \sin\theta=\frac{16\sin^2\theta+4-(\overline{BE})^2}{16\sin\theta}\ \Rightarrow\ \overline{BE}=2$$

따라서 ㄷ은 참이다.

답은 ⑤

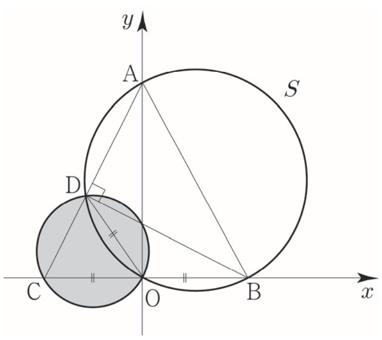
Tip ㄱ,ㄴ,ㄷ 문제를 풀 때는 항상 ㄱ, ㄴ,ㄷ이 유기적으로 연결되어 있다는 생각을 해야 한다.
간단히 말해서 바로 ㄷ을 물어보면 어려우니 ㄷ을 풀기위해 ㄱ, ㄴ과 같은 징검다리 놓아준 것이라 생각하면 된다.
그러니 출제자의 호의를 무시하지 말자. 이 문제에서도 ㄷ을 풀 때, ㄱ과 ㄴ이 활용된 것을 볼 수 있다.

051

$\angle AOB=90^\circ$ 이므로 선분 AB가 원 S의 지름이다.

$(\overline{AB})^2=(\overline{AO})^2+(\overline{OB})^2=16+4=20\ \Rightarrow\ \overline{AB}=2\sqrt{5}$

점 D는 원 위의 점이므로 $\angle ADB=90^\circ$ 이다.
즉, 점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발은 D이다.



직각삼각형 CBD에 외접하는 원을 그려보자.
외접원의 중심이 O이므로 선분 OD는 외접원의 반지름과 같다. 즉, $\overline{OD}=2$ 이다.

삼각형 ACO와 삼각형 ABO는 서로 합동이므로 $\angle ACO=\angle ABO$ 이다.

$$\cos(\angle ACO)=\cos(\angle ABO)=\frac{\overline{OB}}{\overline{AB}}=\frac{2}{2\sqrt{5}}$$

$$\cos(\angle ACO)=\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\ \Rightarrow\ \sin(\angle ACO)=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

삼각형 OCD에 외접하는 원의 반지름을 R이라 하자.
삼각형 OCD에서 사인법칙을 사용하면

$$\frac{2}{\sin(\angle ACO)}=2R\ \Rightarrow\ \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{5}}}=R\ \Rightarrow\ R=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

따라서 외접원의 넓이는 $\frac{5}{4}\pi$이므로 $120k=120\times\frac{5}{4}=150$ 이다.

답은 150

$a_4=5,\ a_7=20$ 이므로

$a+3d=5,\ a+6d=20 \Rightarrow a=-10,\ d=5$

$a_{20}=a+19d=-10+95=85$

답은 85

004

방정식 $4a_nx^2-2a_{n+1}x+a_n=0$가 중근을 가지려면

판별식 $D=0 \Rightarrow (a_{n+1})^2-4(a_n)^2=0$

$\Rightarrow (a_{n+1}-2a_n)(a_{n+1}+2a_n)=0$

모든 항이 양수이므로 $a_{n+1}=2a_n$ 이다.

$a=1,\ r=2$이므로

$$\sum_{k=1}^{5}a_k=\frac{1\times(2^5-1)}{2-1}=31$$

답은 31

Tip 만약 모든 항이 양수라는 말이 없다면 조심해야 한다. $(a_{n+1}-2a_n)(a_{n+1}+2a_n)=0$ 이라는 말은

$a_{n+1}=2a_n$ or $a_{n+1}=-2a_n$ 이다.

$a_{n+1}=2a_n$ (공비가 2인 등비수열) 아니면

$a_{n+1}=-2a_n$ (공비가 -2인 등비수열) 가 아니라,

$a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=-4,\ a_4=-8,\ \cdots$와 같이

규칙적이지 않은 수열도 가능하다.

<흑색 or 백색이 아니라 회색 같은 느낌-_-;;>

005

$\frac{a_3}{a_6}=8,\ (a_{n+1})^2=a_na_{n+2}\ (n=1,\ 2,\ 3\cdots)$

a_n은 등비수열이고 $\frac{a_3}{a_6}=\frac{ar^2}{ar^5}=\frac{1}{r^3}=8 \Rightarrow r=\frac{1}{2}$

$$\frac{a_2+a_3+a_4+a_5}{a_8+a_9+a_{10}+a_{11}}=\frac{ar+ar^2+ar^3+ar^4}{ar^7+ar^8+ar^9+ar^{10}}=\frac{1}{r^6}=64$$

답은 64

006

$a_1=1,\ a_{n+1}-a_n=2n-1\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$$a_8=a_1+\sum_{k=1}^{7}(2k-1)=1+\frac{7(1+13)}{2}=50$$

답은 50

007

$a_1=\frac{1}{9},\ a_{n+1}=3^na_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$a_2=3a_1$

$a_3=3^2a_2=3^{2+1}a_1$

$a_4=3^3a_3=3^{3+2+1}a_1$

$\vdots$

$a_7=3^6a_6=3^{6+5+4+3+2+1}a_1=3^{21}a_1=3^{19}$

답은 19

008

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2,\ b_{n+1}-b_n=a_n$

a_n은 공비가 2인 등비수열이고 $a_3=8$ 이므로

$ar^2=8 \Rightarrow 4a=8 \Rightarrow a=2,\ r=2$

$a_n=2^n$

$b_{n+1}-b_n=2^n,\ a_1=b_1=2$

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=2+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^n$$

따라서 $\frac{b_{10}}{a_5}=\frac{2^{10}}{2^5}=32$이다.

답은 32

009

$a_na_{n+1}=n^2$

$a_1a_2=1,\ a_2a_3=4,\ a_3a_4=9,\ a_4a_5=16$

$a_3=x$ 라 하면

$a_2=\frac{4}{x} \Rightarrow a_1=\frac{x}{4}$

$a_4=\frac{9}{x} \Rightarrow a_5=\frac{16x}{9}$

$$\frac{a_1a_5}{a_2}=\frac{\frac{x}{4}\times\frac{16x}{9}}{\frac{4}{x}}=\frac{x^3}{9}=24 \Rightarrow x=6$$

따라서 $a_3=6$이다.

답은 6