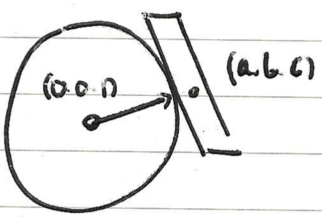
좌표공간 위의 구 $C : x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$에 대하여 구면 C 위의 점 $P(a,\ b,\ c)$가 $a>0$, $b>0$, $c>1$을 만족하면서 구면 위를 움직일 때, 점 P에서 구면에 접하는 평면을 α라 하자. 평면 α가 x축, y축, z축과 만나는 점을 각각 A, B, C라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이의 최솟값은?

① $2+\sqrt{2}$　　② $1+2\sqrt{2}$　　③ $2+2\sqrt{2}$　　④ $3+2\sqrt{2}$　　⑤ $2+3\sqrt{2}$

〈21번〉

주어진 구와 (a.b.c)를 이때 그림에 나타내면 다음과 같다.



따라서 이 평면의 법선 벡터는 (a.b.c-1) 가 되고, 구의 방정식에 의해 $a^2+b^2+(c-1)^2=1$ 을 만족한다.

$\rightarrow ax+by+(c-1)z = a^2+b^2+c(c-1) \rightarrow ax+by+(c-1)z = c$

도형 OABC를 사각뿔로 생각하고 $V=\frac{1}{3}Sh$ 를 이용하면

$S=\frac{c^2}{2ab(c-1)}$ 가 되고, $a^2+b^2+c^2-2c=0$ 에 의해

$2c-c^2 \geq 2ab$ ($2c-c^2$는 $2ab$ 이므로) $\rightarrow S \geq \frac{c}{(2-c)(c-1)}$

따라서 $\frac{1}{S} \leq \frac{(2-c)(c-1)}{c} \leq 3-2\sqrt{2}$ ($3+2\sqrt{2}$ 임)